УДК 517.9

СИМПЛЕКТИЧНІ ІНВАРІАНТНІ РЕДУКЦІЇ ЦІЛКОМ ІНТЕГРОВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПРОСТОРАХ ТА ЇХ ІНВАРІАНТНІ ПІДМНОГОВИДИ

М. І. Копич

Ін-т прикл. пробл. механіки та математики НАН України,
Україна, 290601, Львів, вул. Наукова, 3б

Finite-dimensional reductions of dynamical systems and their complete Liouville – Arnold integrability are studied. A problem of finding a formula of the embedding mapping for Hamiltonian systems with a non-canonical symplectic structure is considered. A Korteweg – de Vries dynamical system is studied as an example.

Вивчаються скінченновимірні редукції динамічних систем та їх повна інтегровність за Ліувіллем – Арнольдом. Розглянуто питання про побудову формул для відображення вкладення для гамільтонових систем, симплектична структура яких задана неканонічно. Як приклад розглянуто динамічну систему Кортевега – де Фріза.

1. Інваріантні функціонали динамічної системи та повна інтегровність за Ліувіллем – Арнольдом її скінченновимірних редукцій. Розглянемо нелінійну динамічну систему

$$du/dt = K[u], \tag{1}$$

де $K\colon M \to T(M)$ — гладке поліноміальне векторне поле на періодичному функціональному банаховому просторі $M \subset W_r^q(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z};\mathbf{R}^m)$, $q \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{Z}_+$; $t \in \mathbf{R}$ — еволюційний параметр.

Відповідно до градієнтно-голономного алгоритму дослідження інтегровності [1] динамічних систем розглянемо характеристичне рівняння Лакса [2]

$$d\varphi/dt + K^{'*}[u]\cdot\varphi = 0, \tag{2}$$

де $\varphi := \varphi(x,t;\lambda) \in T^*(M)$, щодо якого припустимо, що воно допускає асимптотичний при $|\lambda| \to \infty$ розв'язок вигляду

$$\varphi(x,t;\lambda) \simeq a(x,t;\lambda)\exp[\omega(x,t;\lambda) + \partial^{-1}\sigma(x,t;\lambda)], \tag{3}$$

$$a(x,t;\lambda) \simeq \sum_{j\in\mathbf{Z}_+} a_j[u]\lambda^{-j+s(a)}, \quad \sigma(x,t;\lambda) \simeq \sum_{j\in\mathbf{Z}_+} \sigma_j[u]\lambda^{-j+s(\sigma)},$$

де $\mathbf{C} \ni \lambda$ — параметр, а функціонали

$$\gamma_j := \int_0^{2\pi} dx\sigma_j[u] \in D(M), \quad j \in \mathbf{Z}_+, \tag{4}$$

є інваріантними функціоналами динамічної системи (1), тобто $d\gamma_j/dt = 0$, $t \in \mathbf{R}$, $j \in \mathbf{Z}_+$, на джет-многовиді $J(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z};\mathbf{R}^m)$, що локально дифеоморфний функціональному простору M.

Вважатимемо, що динамічна система (1) допускає існування афінно-узгоджених невироджених розв'язків $\vartheta, \eta : T^*(M) \to T(M)$ операторного рівняння нетеровості [2], тобто виконані рівності

$$\begin{aligned} &\vartheta' \cdot K - \vartheta \cdot K^{'*} - K' \cdot \vartheta = 0, \\ &\eta' \cdot K - \eta \cdot K^{'*} - K' \cdot \eta = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

При цьому сума $\vartheta + \lambda\eta : T^*(M) \to T(M)$ для всіх $\lambda \in \mathbf{R}$ є імплектичним оператором для системи (1) на M.

Тоді, як відомо [2], оператори (ϑ, η) визначають на функціональному просторі M афінно-узгоджену бігамільтонову структуру [1], а динамічна система (1) має нескінченну ієрархію функціонально незалежних інволютивних інваріантних функціоналів (4).

Розглянемо процедуру Новікова – Богоявленського [3, 4] побудови локальних скінченновимірних джет-редукцій на інваріантні підмноговиди динамічної системи (1), що мають згадані вище властивості. Задамо на M інваріантний лагранжів функціонал $\mathcal{L}_N : M \to \mathbf{R}$, де

$$\mathcal{L}_N := -\gamma_{N+1} + \sum_{j=0}^{N} c_{j,N}\gamma_j, \tag{6}$$

$c_{j,N} \in \mathbf{R}$, $j = \overline{0, N}$, $N \in \mathbf{Z}_+$, — довільний фіксований набір чисел.

Нехай функціональний підмноговид $M_N \subset M$ задано як сукупність критичних точок невиродженого функціонала Лагранжа (6), тобто

$$M_N := \{u \in M : \mathrm{grad}\mathcal{L}_N[u] = 0\}, \tag{7}$$

де $\mathcal{L}_N[u] \in D(J^{\overline{N}}(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z};\mathbf{R}^m))$ для деякого $\overline{N} \in \mathbf{Z}_+$.

Теорема 1. *Підмноговид (7) є скінченновимірним інваріантним симплектичним функціональним підмноговидом (парної розмірності), локально дифеоморфно вкладеним у джет-підмноговид $J(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z};\mathbf{R}^m)$, причому векторні поля d/dx та d/dt на M_N канонічно гамільтонові, з функціями Гамільтона $h_N^{(x)}$, $h_N^{(t)} : M_N \to \mathbf{R}$, що задовольняють такі співвідношення:*

$$\langle \mathrm{grad}\mathcal{L}_N[u], u_x\rangle = -dh_N^{(x)}/dx, \qquad \langle \mathrm{grad}\mathcal{L}_N[u], u_t\rangle = -dh_N^{(t)}/dx. \tag{8}$$

Доведення. Оскільки густини $\gamma_j[u] : M \to \mathbf{R}$, $j \in \mathbf{Z}_+$, згідно з припущеннями, є локальними функціоналами скінченного порядку на просторі M, що локально дифеоморфний джет-многовиду $J(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z};\mathbf{R}^m)$, то підмноговид $M_N \subset M$ є джет-підмноговидом скінченного порядку, інваріантним [5] відносно векторних полів d/dx та d/dt на M.

Для вивчення симплектичної структури підмноговиду $M_N \subset M$ скористаємось теорією Е. Картана [6] на джет-многовидах [2, 7, 8]. Нехай $I(\xi) \subset \Lambda(J(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z};\mathbf{R}^m))$ є замкнутим диференціальним ідеалом в алгебрі Грассмана $\Lambda(J(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z};\mathbf{R}^m))$, породженим 1-формами $\xi_j := du^{(j)} - u^{(j+1)}dx$, $j \in \mathbf{Z}_+$, що анулюють векторне поле d/dx на

$J(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z};\mathbf{R}^m)$, тобто $i_{d/dx}\xi_j = 0$ для всіх $j \in \mathbf{Z}_+$, де $i_{d/dx}$ – звичайне внутрішнє диференціювання і

$$d/dx := \partial/\partial x + \sum_{j\in\mathbf{Z}_+} \langle u^{(j+1)}, \partial/\partial u^{(j)}\rangle. \tag{9}$$

Векторне поле d/dt на $J(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z};\mathbf{R}^m)$ має вигляд

$$d/dt := \partial/\partial t + \sum_{j\in\mathbf{Z}_+} \langle K^{(j)}, \partial/\partial u^{(j)}\rangle, \tag{10}$$

де, за визначенням, $K^{(j)} := d^jK/dx^j$, $j \in \mathbf{Z}_+$.

Розглянемо 1-форму $d\mathcal{L}_N \in \Lambda^1(J(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z};\mathbf{R}^m))$, визначену на M_N:

$$d\mathcal{L}_N \equiv d\left(i_{\frac{d}{dx}}\mathcal{L}_N dx\right) = di_{\frac{d}{dx}}\left(\mathcal{L}_N dx + \sum_{j=0}^{\overline{N}}\langle p_j, \xi_j\rangle\right) =$$

$$= \left(di_{\frac{d}{dx}} + i_{\frac{d}{dx}}d\right)\left(\mathcal{L}_N dx + \sum_{j=0}^{\overline{N}}\langle p_j, \xi_j\rangle\right) -$$

$$- i_{\frac{d}{dx}}\left(d\mathcal{L}_N \wedge dx + \sum_{j=0}^{\overline{N}}\langle dp_j, \wedge\xi_j\rangle + \sum_{j=0}^{\overline{N}}\langle p_j, d\xi_j\rangle\right), \tag{11}$$

де, за визначенням, $p_j : J^{(\overline{N})}(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z};\mathbf{R}^m) \to \mathbf{R}^m$, $j = \overline{0,N}$, — вектор-функції, що задовольняють умову

$$i_{\frac{\partial}{\partial u^{(j)}}}\left(d\mathcal{L}_N \wedge dx + \sum_{j=0}^{\overline{N}}(\langle dp_j, \wedge\xi_j\rangle + \langle p_j, d\xi_j\rangle)\right) \in I(\xi) \tag{12}$$

для всіх $j = \overline{1, \overline{N}+1}$.

Це означає, що 2-форма $d\mathcal{L}_N \wedge dx + \sum\limits_{j=0}^{\overline{N}} d\langle p_j, \xi_j\rangle$ не залежить від диференціалів $du^{(j)}$, $j = \overline{1, \overline{N}+1}$, за модулем ідеалу $I(\xi)$. З (11) знаходимо $dp_j/dx + p_{j-1} = \partial\mathcal{L}_N/\partial u^{(j)}$ для $j = \overline{1, \overline{N}+1}$, причому, за визначенням, $p_{-1} = p_{\overline{N}+1} = 0$. Набір співвідношень (12) допускає такий розв'язок:

$$p_j = \sum_{k=0}^{\overline{N}}(-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\frac{\partial\mathcal{L}_N}{\partial u^{(j+k+1)}}, \qquad j = \overline{0, \overline{N}}. \tag{13}$$

Підставляючи (13) у (11), отримуємо

$$d\mathcal{L}_N = \frac{d}{dx}\left[\left(\mathcal{L}_N - \sum_{j=0}^{\overline{N}}\langle p_j, u^{(j+1)}\rangle\right)dx + \sum_{j=0}^{\overline{N}}\langle p_j, du^{(j)}\rangle\right] +$$

$$+\langle \mathrm{grad}\mathcal{L}_N[u], du\rangle|_{\mathrm{mod} I(\xi)}, \tag{14}$$

де використано формулу Е. Картана для похідної Лі $d/dx := i_{\frac{d}{dx}} d + di_{\frac{d}{dx}}$. Отже, покладаючи $u \in M_N$, одержуємо, що на інтегральному підмноговиді ідеалу $I(\xi) \subset \subset \Lambda(J(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}; \mathbf{R}^m))$ справджується рівність $d\mathcal{L}_N = d/dx\alpha_N^{(1)}$, $dh_N^{(x)}/dx = 0$, де, за визначенням,

$$h_N^{(x)} := -\mathcal{L}_N + \sum_{j=0}^{\overline{N}} \langle p_j, u^{(j+1)}\rangle, \qquad \alpha_n^{(1)} := \sum_{j=0}^{\overline{N}} \langle p_j, du^{(j)}\rangle. \tag{15}$$

З іншого боку, грунтуючись на тотожності $d^2\mathcal{L}_N = 0$, з (14) знаходимо, що на M_N виконуються рівності

$$d/dx\Omega_N^{(2)} = 0, \qquad dh_N^{(x)} = -i_{\frac{d}{dx}}\Omega_N^{(2)}, \tag{16}$$

де $\Omega_N^{(2)} := d\alpha_N^{(1)} = \sum_{j=0}^{\overline{N}} \langle dp_j, \wedge du^{(j)}\rangle$ — канонічна симплектична структура на $J^{(2N)}(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}; \mathbf{R}^m)$ відносно якої, згідно з (16), векторне поле d/dx є гамільтоновим.

Згортаючи вираз (14) з векторним полем d/dx та використовуючи умову $i_{d/dx}I(\xi) \subset \subset I(\xi)$, знаходимо, що на інтегральному підмноговиді ідеалу $I(\xi)$ виконується рівність $\langle \mathrm{grad}\mathcal{L}_N[u], u_x\rangle = -dh_N^{(x)}/dx$, тобто маємо першу рівність з формул (8).

Враховуючи визначення $dh_N^{(t)} := -i_{d/dt}\Omega_N^{(2)}$, з (14) отримуємо $\langle \mathrm{grad}\mathcal{L}_N[u], u_t\rangle = = -dh_N^{(t)}/dx$, що доводить другу рівність в (8). Теорему доведено.

Розглянемо вираз (6), в якому a priori включено $(N+2) \in \mathbf{Z}_+$ функціонально незалежних інваріантів динамічної системи (1) $\gamma_j \in D(M)$, $j = \overline{0, N+1}$. Це означає, що на інваріантному підмноговиді $M_N \subset M$ існує $(N+1) \in \mathbf{Z}_+$ незалежних гамільтонових векторних полів $d/dt_j := K_j : M \to T(M)$, $j = \overline{0, N+1}$, які можна задати за допомогою таких виразів:

$$\frac{d}{dt_j}u := -\vartheta\mathrm{grad}\gamma_j[u] = K_j[u], \qquad dh_N^{(j)} := -i_{d/dt_j}\Omega_N^{(2)}, \tag{17}$$

де $j = \overline{0, N+1}$, причому всі векторні поля d/dt_j, $j = \overline{0, N+1}$, на M_N комутують. Векторні поля d/dx та d/dt, згідно з (6) та (17), лінійно залежать на M_N від базових векторних полів. З (7) для визначення підмноговиду $M_N \subset M$ при умові $\dim M_N = 2N+2$, згідно з теоремою Ліувілля – Арнольда [1], отримуємо повну інтегровність векторних полів d/dx та d/dt на скінченновимірному інваріантному підмноговиді $M_N \subset M$. Таким чином, виникає важлива проблема дослідження інваріантних многовидів цих векторних полів на канонічно симплектичному многовиді M_N, локально дифеоморфному джет-підмноговиду M^{2N+2} у $J^{(2\overline{N})}(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}; \mathbf{R}^m)$ розмірності $2N+2$.

З іншого боку, з (14) та з визначення канонічної симплектичної структури маємо $\Omega_N^{(2)} := d\alpha_N^{(1)}$, де $\alpha_N^{(1)} := \sum_{j=0}^{\overline{N}} \langle p_j, du^{(j)}\rangle \in \Lambda^1(J^{(\overline{N})}(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}; \mathbf{R}^m))$ — відповідна базова 1-форма із значеннями у $T^*(J^{(\overline{N})}(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}; \mathbf{R}^m))$. Це означає, що існує скінченновимірний підмноговид $\overline{M}^{N+1} \subset \overline{M}^{2N+2}$ такий, що $T^*(\overline{M}^{N+1}) = \overline{M}^{2N+2}$. У випадку $\overline{M}^{N+1} \simeq \mathbf{R}^{N+1}$ отримуємо, що підмноговид $M_N \simeq \overline{M}^{2N+2} \simeq T^*(\mathbf{R}^{N+1})$. Ця властивість буде використана в подальшому при дослідженні інваріантних многовидів векторних полів d/dt та d/dx на $M_N \subset M$.

2. Формули для відображення вкладення. Розглянемо питання про знаходження в явному вигляді формул для відображення вкладення інваріантних многовидів цілком інтегровних за Ліувіллем – Арнольдом неканонічно гамільтонових динамічних систем на кодотичних многовидах. Зауважимо, що канонічна теорія вкладення інваріантних многовидів цілком інтегровних за Ліувіллем – Арнольдом канонічно гамільтонових динамічних систем на кодотичних многовидах була розроблена в [9, 10].

Нехай маємо неканонічно гамільтонову систему (1), визначену за допомогою векторного поля $K : T^*(\mathbf{R}^n) \to T(T^*(\mathbf{R}^n))$ на кодотичному многовиді $T^*(\mathbf{R}^n)$, $n \in \mathbf{Z}_+$, симплектичну структуру якого задано у канонічних координатах $(q,p) \in T^*(\mathbf{R}^n)$ у вигляді точної 2-форми

$$\Omega^{(2)}(q,p) = \sum_{j=1}^{n} da_j(q,p) \wedge dq_j, \tag{18}$$

де функції $a_j : T^*(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$, $j = \overline{1,n}$, задовольняють властивість: $\det\{\partial a_j(q,p)/\partial p_k : j,k = \overline{1,n}\} \neq 0$, що гарантує невиродженість 2-форми (18).

Відповідна функція Гамільтона $H : T^*(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ має вигляд

$$-i_K \Omega^{(2)} = dH, \tag{19}$$

де $i_K : \Lambda(T^*(\mathbf{R}^n)) \to \Lambda(T^*(\mathbf{R}^n))$ — так зване внутрішнє диференціювання вздовж векторного поля $K : T^*(\mathbf{R}^n) \to T(T^*(\mathbf{R}^n))$.

Визначення 1 [11]. *Гамільтонове векторне поле (1), де $u := (q,p) \in T^*(\mathbf{R}^n)$, відносно симплектичної структури (19) на $T^*(\mathbf{R}^n)$ будемо називати цілком інтегровним за Ліувіллем у квадратурах, якщо існує рівно $n \in \mathbf{Z}_+$ гладких функцій $H_1 = H, H_2, \ldots, H_n \in D(T^*(\mathbf{R}^n))$ таких, що відповідні векторні поля $K_j : T^*(\mathbf{R}^n) \to T(T^*(\mathbf{R}^n))$, і $i_{K_j}\Omega^{(2)} = -dH_j$, $j = \overline{1,n}$.*

Згідно з теоремою В. Арнольда [1], підмноговид $M_h^n \subset T^*(\mathbf{R}^n)$ при умові його компактності є дифеоморфним тору $\mathbf{T}^n$, причому орбіти динамічної системи (1) є на ньому квазіперіодичними лінійними обмотками з фіксованим набором частот.

Вважатимемо, що набір 1-форм $\beta_j^{(1)} \in \Lambda^1(T^*(\mathbf{R}^n))$, $j = \overline{1,n}$, задовольняє умови теореми Галіссо – Ріба [7]. Відповідний ідеал $I(\beta) \subset \Lambda(U)$ має клас розмірності $n \in \mathbf{Z}_+$ і є замкнутим. Тоді на основі класичної теореми Фробеніуса – Картана [2] існує відповідний інтегральний многовид (M_β^n, π_β), де $\pi_\beta : M_\beta^n \to T^*(\mathbf{R}^n)$ — його відповідне вкладення, такий, що векторні поля K_j, $j = \overline{1,n}$, є дотичними до образу $\pi_\beta(M_\beta^n) \subset T^*(\mathbf{R}^n)$ і індукують векторні поля $Z_j : M_\beta^n \to T(M_\beta^n)$, $j = \overline{1,n}$, на многовиді M_β^n. Тоді можна визначити 1-форми $\pi_\beta^* f_j^{(1)} \in \Lambda^1(\pi_\beta^{-1}(U))$, $j = \overline{1,n}$, для яких виконується теорема Картана – Йоста [7].

Зрозуміло, що спеціальний вигляд симплектичної 2-форми (19) на кодотичному просторі $T^*(\mathbf{R}^n)$ накладає на властивості інтегрального многовиду (M_β^n, π_β) додаткові умови, що можуть бути ефективно використані для аналітичних формул для відображення вкладення $\pi_\beta : M_\beta^n \to T^*(\mathbf{R}^n)$. З огляду на цю обставину розглянемо симплектичну структуру $\Omega^{(2)}(q,p) \in \Lambda^2(T^*(\mathbf{R}^n))$, записану у вигляді

$$\Omega^{(2)}(q,p) = d\alpha_{(q,p)}^{(1)}, \qquad \alpha_{(q,p)}^{(1)} := \sum_{j=1}^{n} a_j(q,p) dq_j, \tag{20}$$

де 1-форма $\alpha^{(1)} \in \Lambda^1(\mathbf{R}^n)$.

З умови $\det\{\partial a_i(q,p)/\partial p_j : i,j = \overline{1,n}\} \neq 0$ стосовно 1-форми $\alpha^{(1)} \in \Lambda^1(\mathbf{R}^n)$ випливає, що симплектична структура $\Omega^{(2)} \in \Lambda^2(T^*(\mathbf{R}^n))$ невироджена, причому сукупність 1-форм $\alpha^{(1)}$ вигляду (20) повністю покриває канонічний простір $\Lambda^1(\mathbf{R}^n) = \{\sum_{j=1}^n p_j dq_j : q \in \mathbf{R}^n\}$.

Розглянемо частковий випадок теореми Ґалісо – Ріба [7], коли 1-форми $\beta_j^{(1)} := dH_j \in \Lambda^1(T^*(\mathbf{R}^n))$, $j = \overline{1,n}$.

Лема 1. *Нехай симплектична структура* $\Omega^{(2)} \in \Lambda^2(T^*(\mathbf{R}^n))$ *та 1-форма* $dH_j \in \Lambda^1(T^*(\mathbf{R}^n))$, $j = \overline{1,n}$ *поліноміально залежать від змінних* $(q,p) \in T^*(\mathbf{R}^n)$. *Тоді існує система раціональних 1-форм* $f_j^{(1)} \in \Lambda^1(T^*(\mathbf{R}^n))$, $j = \overline{1,n}$, *точних на інтегральному многовиді* $M_h^n := \{(q,p) \in T^*(\mathbf{R}^n) : H_j = h_j \in \mathbf{R}, j = \overline{1,n}\}$, *вкладеному у* $T^*(\mathbf{R}^n)$ *за допомогою відображення* $\pi_h : M_h^n \to T^*(\mathbf{R}^n)$, $h \in \mathbf{R}^n$.

Доведення. З умови алгебраїчної поліноміальності виразів $dH_j \in \Lambda^1(T^*(\mathbf{R}^n))$, $j = \overline{1,n}$, та раціональності симплектичної структури $\Omega^{(2)} \in \Lambda^2(T^*(\mathbf{R}^n))$ маємо, що лінійне рівняння [7] у вигляді

$$\Omega^{(2)}|_U = \sum_{j=1}^n dH_j|_U \wedge f_j^{(1)} \tag{21}$$

визначає однозначно (за модулем ідеалу $\operatorname{mod} I(dH)$) набір раціональних 1-форм $f_j^{(1)} \in \Lambda^1(U)$, $j = \overline{1,n}$, для будь-якого відкритого околу $U \subset T^*(\mathbf{R}^n)$, на якому 1-форми $dH_j|_U$, $j = \overline{1,n}$, лінійно незалежні. Тоді 1-форми $\pi_h^* f_j^{(1)}$, $j = \overline{1,n}$, є точними на $\pi_h^{-1}(U) \bigcap M_h^n$.

Розглянемо редукцію 1-форм $f_j^{(1)} \in \Lambda^1(U)$, побудованих вище, на інтегральний підмноговид $\pi_h^{-1}(U) \bigcap M_h^n$, тобто 1-форми $\overline{f}_j^{(1)} := \pi_h^* f_j^{(1)} \in \Lambda^1(\pi_h^{-1}(U) \bigcap M_h^n)$, $j = \overline{1,n}$, які є точними на $\pi_h^{-1}(U) \bigcap M_h^n$, тобто

$$\overline{f}_j^{(1)} := d\overline{t_j}, \tag{22}$$

де $\overline{t_j} : \pi_h^{-1}(U) \bigcap M_h^n \to \mathbf{R}$, $j = \overline{1,n}$, — деякі функціонально незалежні відображення, що параметризують карту $\pi_h^{-1}(U) \bigcap M_h^n$ на многовиді M_h^n.

З іншого боку, враховуючи умови теореми Картана – Йоста [7] для 1-форм $d(\pi_\beta^* f_j^{(1)}) = 0$, $(\pi_\beta^* f_j^{(1)})(Z_k) = \delta_{jk}$, $j,k = \overline{1,n}$, на M_h^n для векторних полів $Z_j := d/dt_j$, $j = \overline{1,n}$, на многовиді M_h^n, встановлюємо, що $d/dt_j(\overline{t_k}) = \delta_{jk}$, $j,k = \overline{1,n}$, тобто з точністю до адитивних констант маємо

$$\overline{t}_j = t_j (\operatorname{mod} \mathbf{R}) \tag{23}$$

для всіх $j = \overline{1,n}$. Це означає, що параметризація карти $\pi_h^{-1}(U) \bigcap M_h^n$ за допомогою 1-форм (22) є глобальною, що є апріорною властивістю еволюційних параметрів $t_j \in \mathbf{R}$ векторних полів $d/dt_j = K_j$, $j = \overline{1,n}$, на многовиді $T^*(\mathbf{R}^n)$, що існують глобально, згідно з класичною теоремою про існування та єдиність розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь $\beta_j^{(1)}(K_i) = 0$.

Лема 2. *Нехай набір 1-форм* $dH_j \in \Lambda^1(T^*(\mathbf{R}^n))$, $j = \overline{1,n}$, *є лінійно незалежним майже скрізь на* M_h^n *для всіх* $h \in \mathbf{R}^n$. *Тоді конфігураційний простір* $\mathbf{R}^n \subset T^*(\mathbf{R}^n)$ *задає майже* *скрізь координатні карти на многовиді M_h^n, вкладеному у $T^*(\mathbf{R}^n)$, тоді і тільки тоді, коли для майже всіх $h \in \mathbf{R}^n$ векторна 1-форма dp на M_h^n однозначно визначається через векторну 1-форму dq на $\mathbf{R}^n$, як на карті на многовиді M_h^n.*

Доведення. Набір диференціальних рівностей $dH_j = 0$, $j = \overline{1,n}$, що справедливі на кожному інтегральному підмноговиді M_h^n, $h \in \mathbf{R}^n$, у випадку невиродженості матриці $\{\partial H_j(q,p)/\partial p_k : j,k = \overline{1,n}, (q,p) \in M_h^n\}$ приводить до лінійного алгебраїчного векторного співвідношення на многовиді M_h^n вигляду

$$dp = -\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^{-1}\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right) dq. \tag{24}$$

Використовуючи (24) для визначення редукцій $\pi_h^* f_j^{(1)} := \overline{f_j^{(1)}} \in \Lambda^1(M_h^n)$, $j = \overline{1,n}$, знаходимо, що $\overline{f_j^{(1)}} \in \Lambda^1(\mathbf{R}^n)$, $j = \overline{1,n}$, де $\mathbf{R}^n \subset T^*(\mathbf{R}^n)$ — власний конфігураційний простір, який, як згадувалося вище, є простором координат на картах многовиду M_h^n для майже всіх $h \in \mathbf{R}^n$, що й доводить лему.

Властивості вкладення інтегрального многовиду M_h^n у $T^*(\mathbf{R}^n)$, що встановлені вище, дають можливість розглянути більш загальну задачу опису власних локальних координат на многовиді M_h^n, які акумулюють у собі основну інформацію про динаміку векторного поля (1) на M_h^n, незалежну від вибору глобальних координат вихідного фазового простору $T^*(\mathbf{R}^n)$. З цією метою скористаємось теоремою Ліувілля – Арнольда [1] про існування глобально дифеоморфного відображення $\varphi^{-1} : M_h^n \to \mathbf{T}^n$ для майже кожного $h \in \mathbf{R}^n$ у випадку компактності підмноговиду M_h^n, що переводить траєкторії векторного поля (1) у лінійні квазіперіодичні обмотки тора $\mathbf{T}^n$. Як відомо, для будь-якого тора $\mathbf{T}^n$ існує дифеоморфне відображення $\xi^{-1} : \mathbf{T}^n \to \otimes_{j=1}^n \mathbf{S}_j^1$, що задає певну сепарацію динаміки на M_h^n на незалежні періодичні рухи по колах $\mathbf{S}_j^1$, $j = \overline{1,n}$. Це означає, що існує майже скрізь дифеоморфізм $\pi : \otimes_{j=1}^n \mathbf{S}_j^1 \rightleftarrows M_h^n$, тобто для майже всіх $h \in \mathbf{R}^n$, фіксованих вище, виконується рівність $\pi = \varphi \circ \xi$. При цьому відображення $\pi : \otimes_{j=1}^n \mathbf{S}_j^1 \to M$, згідно з лемами 1 та 2, у загальному випадку залежить від параметра вкладення $h \in \mathbf{R}^n$ у координатній карті конфігураційного простору $\mathbf{R}^n \subset T^*(\mathbf{R}^n)$. Це означає, що для змінних $\mu_j \in \mathbf{S}_j^1$, $j = \overline{1,n}$, та координат $q \in \mathbf{R}^n \subset T^*(\mathbf{R}^n)$ існує майже скрізь відображення

$$q = \pi(\mu; h), \tag{25}$$

яке і будемо вважати першою частиною шуканого відображення вкладення $\pi_h : M_h^n \to \to T^*(\mathbf{R}^n)$ у локальних координатах многовиду M_h^n.

Що стосується другої частини цього відображення, то потрібно скористатись дифеоморфізмом (25) і врахувати, що 1-форма $\alpha^{(1)} \in T^*(\mathbf{R}^n)$, введена у (20), є інваріантною, тобто $\pi^*\alpha^{(1)} = \alpha^{(1)}$ на M_h^n для майже всіх $h \in \mathbf{R}^n$, що a priori забезпечує також інваріантність симплектичної структури $\Omega^{(2)} = d\alpha^{(1)}$, тобто $\pi_h^*\Omega^{(2)} = \Omega^{(2)}$ на $T^*(\mathbf{R}^n)$.

Враховуючи цю властивість інваріантності, знаходимо, що для всіх $s = \overline{1,n}$

$$a_s(q(\mu;h),p) = \sum_{j=1}^n w_j \partial\mu_j/\partial q_s, \tag{26}$$

де $(\mu, w) \in T^*(M_h^n)$ — повний набір канонічно спряжених локальних координат на M_h^n у карті циклічних змінних на $\otimes_{j=1}^n \mathbf{S}_j^1 \simeq M_h^n$. З (26) випливає така формула для симплектичної структури: $\Omega^{(2)} = \sum_{j=1}^n dw_j \wedge d\mu_j$.

Співвідношення (26), враховуючи умови, накладені на коефіцієнти 1-форми $\alpha^{(1)} \in \in \Lambda^1(\mathbf{R}^n)$, дає можливість однозначно визначити координатні величини $p \in \mathbf{R}^n$ як деякі алгебраїчні вирази вигляду

$$p_j = \mathcal{A}_j(q(\mu; h), w), \tag{27}$$

де $j = \overline{1, n}$, для всіх $(\mu, w) \in T^*(M_h^n)$ і майже всіх $h \in \mathbf{R}^n$.

Перейдемо до опису множини вкладень $\otimes_{j=1}^n \mathbf{S}_j^1 \to M$, побудованих за допомогою формули (25), використовуючи при цьому теорію Пуанкаре – Картана канонічних перетворень симплектичної структури $\Omega^{(2)} \in \Lambda^2(T^*(\mathbf{R}^n))$.

Нехай $S : (\otimes_{j=1}^n \mathbf{S}_j^1) \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ – породжуюча функція розширеного канонічного перетворення вкладення вигляду

$$\overline{\pi} : T^*(M_h^n) \to T^*(M_h^n) \simeq T^*(\mathbf{R}^n), \tag{28}$$

де, за визначенням, $\prod \overline{\pi} := \pi \prod$, $\prod : T^*(M_h^n) \to M_h^n$ — операція проектування на M_h^n, яке задовольняє умову $\Omega^{(2)} = \overline{\pi}^* \Omega^{(2)}$, тобто

$$\sum_{j=1}^n a_j(q,p) dq_j = \sum_{j=1}^n w_j d\mu_j = -\sum_{j=1}^n t_j dh_j + dS(\mu; h). \tag{29}$$

Використовуючи (26), отримуємо

$$t_j = \partial S(\mu; h)/\partial h_j, \qquad w_j = \partial S(\mu; h)/\partial \mu_j, \tag{30}$$

де $j = \overline{1, n}$, причому

$$S(\mu; h) = \sum_{j=1}^n \int_{\mu_j^0}^{\mu_j} w_j(\mu; h) d\mu_j \tag{31}$$

для координат $(\mu; h) \in M_h^n \times \mathbf{R}^n$.

Серед множини всіх можливих канонічних перетворень (25) виберемо таке перетворення, яке задовольняє принцип сепарабельності Гамільтона – Якобі [1], тобто для якого, згідно з визначенням, маємо

$$S(\mu; h) := \sum_{j=1}^n S_j(\mu_j; h) \tag{32}$$

для всіх точок $(\mu; h) \in M_h^n \times \mathbf{R}^n$. Як наслідок з формул (30) – (32) одержуємо

$$dt_j = \sum_{k=1}^n \partial w_k(\mu_j; h)/\partial h_j d\mu_k \tag{33}$$

для всіх $j = \overline{1, n}$, $(\mu; h) \in M_h^n \times \mathbf{R}^n$.

З іншого боку, враховуючи вирази (22), (23) та (30) на M_h^n, виводимо характеристичне співвідношення вигляду

$$F_{js}(\mu; w) = \partial w_s(\mu_s; h)/\partial h_j, \tag{34}$$

де покладено, за визначенням,

$$\overline{f}_j^{(1)}(q,p) := \sum_{k=1}^{n} \overline{f}_{jk}(q,p)dq_k,$$
$$\overline{F}_{js}(\mu;w) := \sum_{k=1}^{n} \overline{f}_{jk}(q(\mu;h),\mathcal{A}(q(\mu;h),w))\frac{\partial q_k(\mu;h)}{\partial \mu_s} \tag{35}$$

для всіх $j,s=\overline{1,n}$ та $(\mu,w)\in T^*(M_h^n)$.

Тим самим, з проведеного аналізу аналітично побудованих $n^2\in\mathbf{Z}_+$ диференціальних співвідношень (34) випливає така теорема.

Теорема 2. *Існує $n^2\in\mathbf{Z}_+$ алгебраїчних функцій $\overline{F}_{js}:T^*(M_h^n)\to\mathbf{R}$, $j,s=\overline{1,n}$, таких, що мають місце характеристичні співвідношення типу Пікара – Фукса*

$$\overline{F_{js}}(\mu,w)=\partial w_s/\partial h_j, \qquad \partial\overline{F}_{js}(\mu,w)/\partial w_k=0, \tag{36}$$

що справедливі для певного відображення $q=\pi(\mu;h)$, $\mu\in M_h^n$, для всіх $j,k\neq s=\overline{1,n}$, та $(\mu,w)\in T^*(M_h^n)$, з яких, як наслідок, випливає система $n\in\mathbf{Z}_+$ алгебраїчних співвідношень для параметрів $w_j:=w_j(\lambda;h)$, $\lambda\in\mathbf{R}$, $j=\overline{1,n}$, загального вигляду

$$w_j^{m_j}+\sum_{k=1}^{m_j}c_{jk}(\lambda;h)w_j^{m_j-k}=0, \tag{37}$$

де цілі числа $m_j\in\mathbf{Z}_+$, $j=\overline{1,n}$, є фіксованими, а всі величини $c_{jk}(\lambda;h)$, $j,k=\overline{1,n}$, є алгебраїчними функціями параметрів вкладення $h\in\mathbf{R}^n$ та $\lambda\in\mathbf{R}$ (і лінійними афінними функціями параметрів вкладення $h\in\mathbf{R}^n$ з алгебраїчними за $\lambda\in\mathbf{R}$ коефіцієнтами, причому $\partial q(\mu;h)/\partial h\equiv 0$).

Доведення. Із співвідношень (36) випливає існування набору $n^2\in\mathbf{Z}_+$ заданих аналітично функцій $F_{js}:\mathbf{S}^1\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $j,s=\overline{1,n}$, що задовольняють тотожно умови

$$F_{js}(\mu_s,w_s)=\partial w_s/\partial h_j. \tag{38}$$

Розглядаючи останню рівність як диференціально-алгебраїчні співвідношення, встановлюємо їх інтегровність у загальному положенні до набору алгебраїчних кривих (37) з умовами на коефіцієнти, сформульованими у теоремі.

Як наслідок з теореми 2, згідно з формулами (27) отримуємо явний вираз для параметра еволюції $t\in\mathbf{R}$ динамічної системи (1) на інтегральному многовиді M_h^n:

$$t=\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{\mu_j^0}^{\mu_j}\frac{\partial w_j(\lambda;h)}{\partial h_1}d\lambda \tag{39}$$

для довільної початкової точки $\mu^0\in\otimes_{j=1}^n\mathbf{S}_j^1$, причому функції $w_j:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, $j=\overline{1,n}$, в (39) вважаються явно заданими розв'язками співвідношень (37). Тим самим, сформульована у теоремі Ліувілля – Арнольда інтегровність у „квадратурах” реалізована явно за допомогою прямого алгебраїчно-аналітичного алгоритму.

3. Гамільтонова система Хенона – Хейлеса як чотиривимірна локальна редукція динамічної системи Кортевега – де Фріза. Розглянемо на 2π-періодичному функціональному многовиді $M \subset C^3(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z};\mathbf{R})$ динамічну систему Кортевега – де Фріза [3, 12]

$$u_t = u_{xxx} + a6uu_x := K[u], u \in M, \tag{40}$$

де $a \in \mathbf{R}$ — параметр, а $K : M \to T^*(M)$ — векторне поле на M, афінно-бігамільтонове відносно імплектичної пари нетерових операторів $\vartheta, \eta : T^*(M) \to T(M)$, $\vartheta := \partial/\partial x$, $\eta := \frac{1}{4}\partial^3/\partial x^3 + a(u\partial/\partial x + \partial/\partial x)u$.

Розглянемо скінченновимірний інваріантний підмноговид $M^4 \subset M$: $M^4 := \{u \in M : 16\mathrm{grad}\gamma_3 = b\mathrm{grad}\gamma_{-1}, b \in \mathbf{R}\}$, де $\gamma_j \in D(M), j \in \mathbf{Z}$, — нескінченна ієрархія локальних інваріантів, асоційованих з системою (40).

У канонічних джет-координатах $\{u^{(0)} = q_1,\ u^{(1)} = p_1,\ 1/4aq_2^2 = -1/4u^{(2)} - 3/2a$, $dq_2/dx = p_2\} \in J^{(2)}(\mathbf{R};\mathbf{R})$ система (40) набере вигляду редукованої динамічної системи типу Хенона – Хейлеса [13, 14]:

$$\begin{aligned} &dq_1/dx = p_1, \qquad dq_2/dx = p_2,\\ &dp_1/dx = -\omega_1^2 q_1 - aq_2^2 - 6aq_1^2, \qquad dp_2/dx = -\omega_2^2 q_2 - 2aq_1q_2 + bq_2^{-3}, \end{aligned} \tag{41}$$

з функцією Гамільтона

$$H^{(x)}_{(a,b)} := 1/2\sum_{j=1}^{2}(p_j^2 + \omega_j^2 q_j^2) + aq_1q_2^2 + 2aq_1^3 + b/2q_2^2, \tag{42}$$

де виконано звичайне канонічне перетворення $q_1 \to q_1 - \omega_2^2/2a,\ \ q_2^2 \to q_2^2 + \omega_1^4/24a^2$ на многовиді $M^4 \simeq T^*(\mathbf{R}^2)$.

Теорема 3. *Динамічна система Кортевега – де Фріза (40) на чотиривимірному інваріантному підмноговиді $M^4 \simeq T^*(\mathbf{R}^2)$ еквівалентна канонічно-гамільтоновій системі вигляду*

$$dq_j/dt = \partial H^{(t)}_{(a,b)}/\partial p_j, \quad dp_j/dt = -\partial H^{(t)}_{(a,b)}/\partial q_j, \qquad j = \overline{1,2}, \tag{43}$$

з функцією Гамільтона $H^{(t)}_{(a,b)} \in D(T^*(\mathbf{R}^2))$:

$$\begin{aligned} H^{(t)}_{(a,b)} &= aq_2^4 + 4a^2q_1^2q_2^2 + 4a\omega_1^2q_1q_2^2 + \omega_1^2(4\omega_1^2 - \\ &\quad - \omega_2^2)q_2^2 + [(4\omega_1^2 - \omega_2^2) - 4aq_1]p_2^2 + 4aq_2p_1p_2. \end{aligned} \tag{44}$$

Доведення. Векторне поле (40) у канонічних змінних $(q,p)^\top \in T^*(\mathbf{R}^2)$ еквівалентне рівнянням (43), якщо в їх праві частини підставити вираз (44). Це означає, що функція Гамільтона (44) задовольняє співвідношення вигляду

$$\langle \mathrm{grad}\gamma_3 - b\mathrm{grad}\gamma_{-1}, u_t\rangle = -dH^{(t)}_{(a,b)}/dx, \qquad -i_{\frac{d}{dt}}\Omega^{(2)} = dH^{(t)}_{(a,b)}, \tag{45}$$

де, за визначенням, $\Omega^{(2)} := \sum_{j=1}^{2} dp_j \wedge dq_j \in \Lambda^2(T^*(\mathbf{R}^2))$, які можна використати для визначення функції (44), що й доводить теорему.

Розглянемо структуру підмноговидів редукованої динамічної системи Хенона – Хейлеса (41), де покладемо $a = 1/2$. Тоді отримаємо

$$dp_1/dx = -3q_1^2 - 1/2q_2^2, \quad dq_1/dx = p_1,$$
$$dp_2/dx = -q_1q_2 + b/q_2^3, \quad dq_2/dx = p_2, \tag{46}$$

де $b \in \mathbf{R}$ — параметр.

Застосовуючи алгебраїчно-аналітичну теорію [9, 10] побудови відображення вкладення $\pi : M^4 \to T^*(\mathbf{R}^2)$, отримуємо співвідношення типу Войцеховського [15]:

$$q_1 = 1/2\sum_{j=1}^{2}\mu_j, \quad q_2^2 = -\sum_{j=1}^{2}\mu_j,$$
$$p_1 = 2\sqrt{-\mu_1\mu_2}\frac{w_1 - w_2}{\mu_1 - \mu_2}, \quad p_2 = 2\frac{\mu_1w_1 - \mu_2w_2}{\mu_1 - \mu_2}. \tag{47}$$

Для явних виразів еволюції динамічної системи (46) в сепарабельних канонічних змінних $(\omega, \mu) \in T^*(M_h^2)$ знаходимо

$$t = \sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\mu_j^0}^{\mu_j}\frac{d\lambda}{\sqrt{b + \lambda h_1 + \lambda^2 h_2 - 14\lambda^5}}, \quad x = \sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\mu_j^0}^{\mu_j}\frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{b + \lambda h_1 + \lambda^2 h_2 - 14\lambda^5}}. \tag{48}$$

Розв'язуючи відповідну проблему Якобі обертання абелевих інтегралів (48), яка має точний аналітичний розв'язок [3, 16] у термінах ϑ-функцій Рімана, остаточний результат запишемо таким чином:

$$q_1(x) = c_1\frac{\Theta_0\left(-\frac{1}{2}\alpha x + \overline{x}^0\right)}{\Theta_\infty\left(-\frac{1}{2}\alpha x + \overline{x}^0\right)}, \quad q_2(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\Theta_\infty\left(-\frac{1}{2}\alpha x + \overline{x}^0\right) + c_2, \tag{49}$$

де $\alpha \in \mathbf{R}^2$ — набір квазічастот на торі $\mathbf{T}^2 \simeq M_h^2$, $\overline{x}^0 \in \mathbf{R}^2$ — деякий початковий вектор на торі $\mathbf{T}^2$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ — деякі параметри вкладення, залежні від $h_1, h_2 \in \mathbf{R}$, і Θ_0, Θ_∞ — відповідні ϑ-функції Рімана.

За допомогою вибору певних значень параметрів $c_j \in \mathbf{R}$, $j = \overline{1,2}$, з формул (49) можна отримати в явному вигляді аналітичні вирази для розв'язків системи Хенона – Хейлеса (40).

1. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1978. — 432 с.
2. *Prykarpatsky A.K., Mykytiuk I.V.* Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds: classical and quantum aspects. — Netherlands: Kluwer, 1999. — 560 p.
3. *Теория* солитонов / Под ред. С.П. Новикова. — М.: Наука, 1980. — 319 с.
4. *Marsden J.E., Ratiu T.S.* Introduction to mechanics and symmetry. — New York: Springer, 1994. — 493 p.
5. *Lax P.D.* Periodic solutions of the Korteweg – de Vries equation // Communs Pure and Appl. Math. — 1968. — **21**. — P. 467 – 490.
6. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. — М.: Мир, 1971. — 279 с.
7. *Притула М.М., Прикарпатський А.К., Микитюк І.В.* Елементи теорії диференціально-геометричних структур та динамічних систем. — Київ: УМК ВО, 1988. — 86 с.

8. *Прикарпатський А.К., Філь Б.М.* Категорія топологічних джет-многовидів та деякі застосування в теорії нелінійних нескінченновимірних динамічних систем // Укр. мат. журн. — 1993. — **44**, № 8. — С. 1136 – 1147.
9. *Прикарпатський Я.А., Самойленко А.М.* Симплектичний аналіз деформацій повільно збурених цілком інтегровних скінченновимірних гамільтонових систем та асоційованих з ними адіабатичних інваріантів // Нелінійні коливання. — 1999. — **2**, № 1. — P. 20 – 28.
10. *Самойленко А.М., Прикарпатський Я.А.* Дослідження інваріантних деформацій інтегральних многовидів адіабатично збурених цілком інтегровних гамільтонових систем. I // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 10. — С. 1379 – 1390.
11. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи мат. наук. — 1983. — **38**, № 1. — С. 3 – 67.
12. *Фаддеев Л.Д., Тахтаджян Л.А.* Гамильтонов подход в теории солитонов. — М.: Наука, 1986. — 527 с.
13. *Adler M.* On a trace functional for formal pseudo-differential operators and the symplectic structures of KdV // Inv. Math. — 1979. — **50**, № 3. — P. 219 – 248.
14. *Blaszak M., Rauch-Wojciechowski S.* A generalized Henon – Heiles system and related integable Newton equations // J. Math. Phys. — 1994. — **35**, № 4. — P. 1693 – 1709.
15. *Kopych M., Prykarpatsky Y., Samuliak R.* Adiabatic invariants of a generalized Henon – Heiles Hamiltonian system and the structure of chaotic motion // Допов. НАН України. — 1997. — № 2. — P. 33 – 36.
16. *Зверович Э.И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях // Успехи мат. наук. — 1971. — **26**, № 1. — С. 113 – 176.

Одержано 30. 12. 99