НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 3 • № 2 • 2000

УДК 517.9

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ В НЕКРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Л. И. Каранджулов

Техн. ун-т, София,
Ин-т прикл. математики и информатики,
България, 1000, София, п.к. 384
e-mail: likar@vmei.acad.bg

A criterion for existence of an unique asymptotic solution is obtained for a singular perturbed linear boundary-value problem for ordinary differential equation with impulse effects in the noncritical case, when the degenerate equation has a unique solution.

Для сингулярно збуреної лінійної імпульсної крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь одержано критерій існування єдиного асимптотичного розв'язку за умови, що вироджене рівняння має єдиний розв'язок.

1. Введение и постановка задачи. После выхода в свет монографии А. М. Самойленко и Н. А. Перестюка [1] результаты А. Б. Васильевой и В. Ф. Бутузова [2, 3] были перенесены на импульсные системы Д. Баиновым, С. Христовым [4] и Д. Баиновым, В. Ковачевым [5].

В настоящей работе рассматривается линейная сингулярно возмущенная дифференциальная система с общими краевыми и импульсными условиями.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\varepsilon\dot{x} = A(t)x + \varepsilon A_1(t)x + \varphi(t), t \in [a, b], t \neq \tau_i, i = \overline{1, p}, \tag{1}$$

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_p < \tau_{p+1} = b,$$

с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени τ_i

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = S_i x + d_i \tag{2}$$

и с краевым условием

$$l(x) = h, h \in \mathbb{R}^m. \tag{3}$$

Пусть выполнены следующие условия:

У$_1$) A — $(n \times n)$-мерная постоянная матрица; если $\lambda_i \in \sigma(A)$, то $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0, i = \overline{1, n}$;

У$_2$) $A_1(t)$ — $(n \times n)$-мерная матрица, элементы которой — непрерывные функции произвольного порядка на интервале $[a, b]$;

 © Л. И. Каранджулов, 2000

У$_3$) вектор-функция $\varphi(t)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ есть кусочно-непрерывная с точками разрыва первого рода $\tau_i, i=\overline{1,p}$, т. е.

$$\varphi(t)=\varphi_i(t),\ \ t\in(\tau_{i-1},\tau_i],\ \ i=\overline{1,p},\ \ \varphi(a)=\varphi_1(\tau_0),\ \ \varphi(b)=\varphi_{p+1}(\tau_{p+1}),$$
$$\varphi_{i+1}(\tau_i)=\lim_{t\to\tau_i+0}\varphi(t),\ \ i=\overline{1,p};$$

У$_4$) S_i — $(n\times n)$-мерные постоянные матрицы, $d_i\in\mathbb{R}^n$;
У$_5$) l — линейный ограниченный векторный функционал

$$l=\operatorname{col}(l^1,\ldots,l^m)\in(C[a,b]\setminus\tau_i\to R^n,R^m).$$

Вырожденная система

$$Ax_0+\varphi(t)=0, t\neq\tau_i, \tag{4}$$

на основании условия У$_1$ имеет единственное решение (некритический случай [2]) $x_0(t) = A^{-1}\varphi(t), t\in[a,b], t\neq\tau_i$, которое, вообще говоря, не удовлетворяет условиям (2), (3).

В настоящей работе с помощью пограничных функций [2] найдено решение $x(t,\varepsilon)$ задачи (1) — (3), которое при $\varepsilon\to0$ и $t\in(\tau_i,\tau_{i+1}], i=\overline{0,p}$ $(\tau_0=a,\tau_{p+1}=b)$, переходит в решение вырожденной системы (4).

Первые иссследования подобных систем связаны с работами [6, 7].

В дальнейшем, если B — некоторая $(m\times n)$-мерная матрица, через B^+ обозначим псевдообратную по Муру – Пенроузу матрицу к матрице B, а через P_B, P_{B^*} — ортопроекторы $P_B\colon R_n\to\ker B, P_{B^*}\colon R_m\to\ker B^*,\ B^*=B^T$, соответственно [8 – 11].

2. Основные результаты. Решение задачи (1) — (3) ищем в виде

$$x^i(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k[x_k(t)+\Pi_k^i(w_{i-1})],\quad w_{i-1}=\frac{t-\tau_{i-1}}{\varepsilon},\qquad t\in(\tau_{i-1},\tau_i], \tag{5}$$

где $\Pi_k^i(w_{i-1})$ — пограничные функции в правых окрестностях точки $t=\tau_{i-1}, i=\overline{1,p+1}$.

Подставляя (5) в (1) — (3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов разложения (5).

Для определения $x_k(t)$ имеем соотношение

$$x_k(t)=\begin{cases}-A^{-1}\varphi(t),\quad k=0;\\[2ex] A^{-1}(Lx_{k-1})(t),\quad L=\dfrac{d}{dt}-A_1(t),\quad k=1,2,\ldots.\end{cases} \tag{6}$$

При этом $\lim\limits_{t\to\tau_i+0}x_k(t)=x_k^{i+1}(\tau_i)$.

Условие У$_5$ показывает, что l — аддитивный функционал. Следовательно, l можно представить следующим образом: $l=\sum\limits_{i=1}^{p+1}l_i, l_i\in(C[\tau_{i-1},\tau_i]\to\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$.

Подставляя (5) в условие (3), получаем

$$l\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\left[x_k^i(t)+\Pi_k^i\left(\frac{(\cdot)-\tau_{i-1}}{\varepsilon}\right)\right]\right)=h\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{p+1} l_i \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left[x_k^i(t) + \Pi_k^i \left(\frac{(\cdot) - \tau_{i-1}}{\varepsilon} \right) \right] \right) = h.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, имеем

$$\sum_{i=1}^{p+1} l_i \left(x_k^i(t) + \Pi_k^i \left(\frac{(\cdot) - \tau_{i-1}}{\varepsilon} \right) \right) = \begin{cases} h, & k = 0; \\ 0, & k = 1, 2, \ldots . \end{cases} \tag{7}$$

Напомним, что пограничные функции Π_k^i определены в правых окрестностях точки τ_i и быстро затухают. Поэтому значения $\Pi_k^i \left(\dfrac{t - \tau_{i-1}}{\varepsilon} \right)$ при $t = \tau_i$ полагаем равными нулю. Тогда

$$\Delta \Pi_k^i |_{t=\tau_{i-1}} = \Pi_k^i \left(\frac{\tau_{i-1} - \tau_{i-1}}{\varepsilon} \right) - \Pi_k^i \left(\frac{\tau_{i-1} - \tau_{i-2}}{\varepsilon} \right) = \Pi_k^i \,(0).$$

Подставим (5) в импульсные условия (2). Для $\Pi_k^i(0)$ при $i = \overline{2, p+1}$ получаем выражения

$$\Pi_k^i \,(0) = b_k^{i-1} = (E + S_{i-1}) x_k^{i-1}(\tau_{i-1}) - x_k^i(\tau_{i-1}) + \begin{cases} d_{i-1}, & k = 0; \\ 0, & k = 1, 2, \ldots . \end{cases} \tag{8}$$

Введем обозначения

$$g_k^i(w_{i-1}) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k = 0; \\ \displaystyle\sum_{s=0}^{k-1} \frac{1}{s!} w_{i-1}^s A_1^{(s)}(\tau_{i-1}) \Pi_{k-1-s}^i(w_{i-1}) & \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots , \end{cases} \tag{9}$$
$$i = \overline{1, p+1}.$$

Согласно (7) – (9), пограничные функции $\Pi_0^i(w_0)$ удовлетворяют дифференциальным системам

$$\frac{d}{dw_0} \Pi_k^1(w_0) = A \Pi_k^1(w_0) + g_k^1(w_0), \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{10}$$

Пограничные функции $\Pi_k^i(w_{i-1})$ получаем как решения задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw_{i-1}} \Pi_k^i(w_{i-1}) &= A \Pi_k^i(w_{i-1}) + g_k^i(w_{i-1}), \quad w_{i-1} \in [0, +\infty), \\ \Pi_k^i \,(0) &= b_k^{i-1}, \quad i = \overline{2, p+1}, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{11}$$

На основании (7) имеем, что пограничные функции Π_k^i удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=1}^{p+1} l_i \left(\Pi_k^i \left(\frac{(\cdot) - \tau_{i-1}}{\varepsilon} \right) \right) = \begin{cases} h - \displaystyle\sum_{i=1}^{p+1} l_i (x_0^i(\cdot)) & \text{при} \quad k = 0; \\ - \displaystyle\sum_{i=1}^{p+1} l_i (x_k^i(\cdot)) & \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots . \end{cases} \tag{12}$$

Обозначим через $X(\tau), X(0) = E_n$ (E_n — единичная матрица) фундаментальную матрицу системы $\dfrac{d}{d\tau}x = Ax, \tau \in [0, +\infty)$.

Общее решение (10) при $k = 0$ имеет вид

$$\Pi_0^1(w_0) = X(w_0)c_0^1, c_0^1 \in \mathbb{R}^n, \tag{13}$$

а решение задачи Коши (11) при $k = 0$ таково:

$$\Pi_0^i(w_{i-1}) = X(w_{i-1})b_0^{i-1}, \quad i = \overline{2, p+1}. \tag{14}$$

Для определения неизвестного вектора c_0^1 подставим (13) в (12) при $k = 0$. В результате получим

$$l_1\left(X\left(\frac{(\cdot) - \tau_0}{\varepsilon}\right)\right)c_0^1 = \overline{h}_0(\varepsilon), \tag{15}$$

где

$$\overline{h}_0(\varepsilon) = h - \sum_{i=1}^{p+1} l_i(x_0^i(\cdot)) - \sum_{i=2}^{p+1} l_i\left(X\left(\frac{(\cdot) - \tau_{i-1}}{\varepsilon}\right)\right)b_0^{i-1}.$$

Обозначим через $D(\varepsilon) = l_1\left(X\left(\dfrac{(\cdot) - \tau_0}{\varepsilon}\right)\right)$ $(m \times n)$-мерную матрицу. Тогда для определения c_0^1 имеем уравнение

$$D(\varepsilon)c_0^1 = \overline{h}_0(\varepsilon). \tag{16}$$

В зависимости от функционала l_1 рассмотрим два случая.

2.1. Пусть $D(\varepsilon) = D_0 + O(\varepsilon^s e^{-\alpha/\varepsilon}), s \in \mathbb{N}, \alpha > 0$ и $\overline{h}_0(\varepsilon) = h_{00} + O(\varepsilon^q e^{-\beta/\varepsilon}), q \in \mathbb{N}, \beta > 0$, где D_0 — постоянная $(m \times n)$-мерная матрица, а h_{00} — постоянный m-мерный вектор. После отбрасывания экспоненциально малых элементов из (16) получим

$$D_0 c_0^1 = h_{00}. \tag{17}$$

Пусть выполнено условие

У$_6$) $\operatorname{rank} D_0 = n_1 < \min(m, n)$.

Система (17) имеет решение

$$c_0^1 = P_{D_0^r}c_{0r}^1 + D_0^+ h_{00}, \quad c_{0r}^1 \in \mathbb{R}^r, \ \ r = n - n_1, \tag{18}$$

тогда и только тогда, когда

$$P_{D_0^*}h_{00} \Longrightarrow P_{D_{0d}^*}h_{00} = 0, \quad d = m - n_1. \tag{19}$$

С учетом (18) пограничная функция (13) принимает вид

$$\Pi_0^1(w_0) = X(w_0)P_{D_0^r}c_{0r}^1 + X(w_0)D_0^+ h_{00}. \tag{20}$$

Чтобы определить вектор c_{0r}^1, рассмотрим системы (10) и (11) при $k = 1$. Их решения

$$\Pi_1^1(w_0) = X(w_0)c_1^1 + \int_0^{w_0} X(w_0)X^{-1}(s)\, g_1^1(s)ds, \quad c_1^1 \in \mathbb{R}^n,$$

$$\Pi_1^i(w_{i-1}) = X(w_{i-1})b_1^{i-1} + \int\limits_0^{w_{i-1}} X(w_{i-1})X^{-1}(s)\, g_1^i(s)ds, \quad i = \overline{2, p+1},$$

подставим в (12) при $k = 1$. Для определения неизвестного вектора c_1^1 получаем систему

$$D_0 c_1^1 = \overline{h}_1(\varepsilon), \tag{21}$$

где

$$\overline{h}_1(\varepsilon) = Q_0(\varepsilon)c_{0r}^1 + a_0(\varepsilon),$$

$$Q_0(\varepsilon) = -l_1 \left(\int\limits_0^{(\cdot)} X\left(\frac{(\cdot) - \tau_0}{\varepsilon}\right) X^{-1}(s)\, A_1(\tau_0) P_{D_0^r} ds \right),$$

$$a_0(\varepsilon) = -\left\{ \sum_{i=1}^{p+1} l_i(x_k^i(\cdot)) - \sum_{i=1}^{p+1} l_i \left(X\left(\frac{(\cdot) - \tau_{i-1}}{\varepsilon}\right)\right) b_1^{i-1} \right\} -$$

$$- \sum_{i=2}^{p+1} l_i \left(\int\limits_0^{(\cdot)} X\left(\frac{(\cdot) - \tau_{i-1}}{\varepsilon}\right) X^{-1}(s)\, g_1^i(s) ds \right) -$$

$$- l_1 \left(\int\limits_0^{(\cdot)} X\left(\frac{(\cdot) - \tau_0}{\varepsilon}\right) X^{-1}(s)\, A_1(\tau_0) X(s) D_0^+ h_{00} ds \right).$$

Предположим, что при $s_1 \in \mathbb{N}, s_2 \in \mathbb{N}, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ выполнено

$$Q_0(\varepsilon) = Q_{00} + O\left(\varepsilon^{s_1} \exp\left(-\frac{\alpha_1}{\varepsilon}\right)\right), \quad a_0(\varepsilon) = a_{00} + O\left(\varepsilon^{s_2} \exp\left(-\frac{\alpha_2}{\varepsilon}\right)\right).$$

Пренебрегая экспоненциально малыми элементами в $D(\varepsilon), Q_0(\varepsilon)$ и $a_0(\varepsilon)$, систему (21) записываем в виде

$$D_0 c_1^1 = Q_{00} c_{0r}^1 + a_{00}. \tag{22}$$

Обозначим через $\overline{Q}_0$ $(d \times r)$-мерную матрицу $\overline{Q}_0 = P_{D_{0d}^*} Q_{00}$. Из условия разрешимости системы (22) $P_{D_{0d}^*}(Q_{00}c_{0r}^1 + a_{00}) = 0$ находим систему

$$\overline{Q}_0 c_{0r}^1 = -P_{D_{0d}^*} a_{00}. \tag{23}$$

Пусть выполнены условия:

У$_7$) $\operatorname{rank} \overline{Q}_0 = r, \quad d > r$;

У$_8$) $P_{\overline{Q}_0^*} P_{D_{0d}^*} = 0$.

Тогда (23) имеет единственное решение

$$c_{0r}^1 = -\overline{Q}_0^+ P_{D_{0d}^*} a_{00},$$

подставляя которое в (20) и учитывая (14), находим окончательное представление для пограничных функций Π_0:

$$\Pi_0 = \begin{cases} \Pi_0^1(w_0) = -X(w_0) P_{D_0^r} \overline{Q}^+ P_{D_{0d}^*} a_{00} + X(w_0) D_0^+ h_{00}; \\ \Pi_0^i(w_{i-1}) = X(w_{i-1}) b_0^{i-1}, \quad i = \overline{2, p+1}. \end{cases} \tag{24}$$

Из условия $У_1$ и вида фундаментальной матрицы $X(\tau) = \exp(A\tau)$ следует, что пограничные функции Π_0 экспоненциально убывают.

Поскольку выполнено условие $У_6$, то система (22) имеет решение

$$c_1^1 = P_{D_0^r} c_{1r}^1 + D_0^+ (a_{00} - Q_{00} \overline{Q}^+ P_{D_{0d}^*} a_{00}),$$

которое подставляем в $\Pi_1^1(w_0)$:

$$\Pi_1^1(w_0) = X(w_0) P_{D_0^r} c_{1r}^1 + X(w_0) D_0^+ (a_{00} - Q_{00} \overline{Q}^+ P_{D_{0d}^*} a_{00}) +$$

$$+ \int\limits_0^{w_0} X(w_0) X^{-1}(s)\, g_1^1(s) ds. \tag{25}$$

Из системы (10) и (11) при $k = 2$ находим

$$\begin{aligned} \Pi_2^1(w_0) &= X(w_0) c_2^1 + \int\limits_0^{w_0} X(w_0) X^{-1}(s)\, g_2^1(s) ds, \quad c_2^1 \in \mathbb{R}^n, \\ \Pi_2^i(w_{i-1}) &= X(w_{i-1}) b_2^{i-1} + \int\limits_0^{w_{i-1}} X(w_{i-1}) X^{-1}(s)\, g_2^i(s) ds, \quad i = \overline{2, p+1}. \end{aligned} \tag{26}$$

С помощью (26) и (12) при $k = 2$ имеем

$$D(\varepsilon) c_2^1 = \overline{h}_2(\varepsilon), \tag{27}$$

где

$$\overline{h}_2(\varepsilon) = Q_0(\varepsilon) c_{1r}^1 + a_1(\varepsilon),$$

$$\begin{aligned} a_1(\varepsilon) = &- \sum_{i=1}^{p+1} l_i(x_k^i(\cdot)) - \sum_{i=2}^{p+1} l_i \left(X\left(\frac{(\cdot) - \tau_{i-1}}{\varepsilon} \right) \right) b_2^{i-1} - \\ &- \sum_{i=2}^{p+1} l_i \left(\int\limits_0^{(\cdot)} X\left(\frac{(\cdot) - \tau_{i-1}}{\varepsilon} \right) X^{-1}(s)\, g_2^i(s) ds \right) - \\ &- l_1 \left(\int\limits_0^{(\cdot)} X\left(\frac{(\cdot) - \tau_0}{\varepsilon} \right) X^{-1}(s)\, A_1(\tau_0) X(s) D_0^+ (a_{00} - Q_{00} \overline{Q}^+ P_{D_{0d}^*} a_{00}) ds \right) - \\ &- l_1 \left(\int\limits_0^{(\cdot)} X\left(\frac{(\cdot) - \tau_0}{\varepsilon} \right) X^{-1}(s)\, A_1(\tau_0) \int\limits_0^{s} X(s) X^{-1}(u)\, g_1^1(u) du \right) ds - \\ &- l_1 \left(\int\limits_0^{(\cdot)} X\left(\frac{(\cdot) - \tau_0}{\varepsilon} \right) X^{-1}(s)\, A_1'(\tau_0) s X(s) (-P_{D_0^r} \overline{Q}^+ P_{D_{0d}^*} a_{00} + D^+ h_{00}) \right). \end{aligned}$$

При предположении, что $a_1(\varepsilon) = a_{10} + O\left(\varepsilon^{s_3} \exp\left(-\dfrac{\alpha_3}{\varepsilon}\right)\right)$, $s_3 \in \mathbb{N}, \alpha_3 > 0$, пренебрегая экспоненциально малыми элементами в $D(\varepsilon), Q_0(\varepsilon)$ и $a_1(\varepsilon)$, систему (27) записываем в виде

$$D_0 c_2^1 = Q_{00} c_{1r}^1 + a_{10};$$

эта система разрешима, если

$$P_{D_{0d}^*}(Q_{00} c_{1r}^1 + a_{10}) = 0.$$

Из системы

$$\overline{Q}_0 c_{1r}^1 = -P_{D_{0d}^*} a_{10}$$

при условиях $У_7$ и $У_8$ получаем

$$c_{1r}^1 = -\overline{Q}_0^+ P_{D_{0d}^*} a_{10};$$

подставляя c_{1r}^1 в $\Pi_1^1(w_0)$ из (25), находим окончательное представление для Π_1:

$$\Pi_1 = \begin{cases} \Pi_1^1(w_0) & = & -X(w_0) P_{D_0^r} \overline{Q}_0^+ P_{D_{0d}^*} a_{10} + X(w_0) D_0^+ (a_{00} - Q_{00} \overline{Q}^+ P_{D_{0d}^*} a_{00}) + \\ & & + \int\limits_0^{w_0} X(w_0) X^{-1}(s)\, g_1^1(s) ds, \\ \Pi_1^i(w_{i-1}) & = & X(w_{i-1}) b_1^{i-1} + \int\limits_0^{w_{i-1}} X(w_{i-1}) X^{-1}(s)\, g_1^i(s) ds, \quad i = \overline{2, p+1}. \end{cases} \tag{28}$$

Аналогичным способом последовательно находятся пограничные функции

$$\Pi_k^i(w_{i-1}), i = \overline{1, p+1}, k = 2, 3, \ldots .$$

Для доказательства того, что Π_1 экспоненциально убывает, используем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть для матрицы A выполнено условие $У_1$, а для вектор-функции $f(t) \in C[0, +\infty)$ — неравенство $\|f(t)\| \leq c^* \exp(-\alpha^* t)$ при $t \geq 0, c^* > 0, \alpha^* > 0$. Тогда существуют положительные постоянные c и γ такие, что система $\dfrac{dx}{dt} = Ax + f(t)$ имеет частное решение вида*

$$\overline{x}(t) = \int\limits_0^{+\infty} K(t, s) f(s) ds,$$

удовлетворяющее неравенству

$$\|\overline{x}(t)\| \leq c e^{-\gamma t}, \qquad t \geq 0,$$

где

$$K(t, s) = \begin{cases} X(t) X^{-1}(s), & 0 \leq s \leq t < \infty; \\ 0, & 0 < t < s \leq \infty. \end{cases}$$

Доказательство леммы проводится непосредственной проверкой.

Поскольку пограничные функции Π_0 экспоненциально убывают, а функции $g_1^i(w_{i-1})$ из (9) выражаются через Π_0^i, то, очевидно, $g_1^i(w_{i-1})$ экспоненциально ограничены. Это показывает, что условия леммы 1 выполнены и частные решения $\int\limits_0^{+\infty} X(w_0)X^{-1}(s)g_1^i(s)ds$ экспоненциально ограничены. Следовательно, пограничные функции Π_1 из (28) экспоненциально затухают.

Аналогичным способом доказывается, что $\lim\limits_{w_{i-1}\to+\infty} \Pi_k = 0$ и для каждого $k = 2, 3, \dots$.

По аналогии с [12] можно показать, что существуют положительные постоянные ε_0 и K такие, что для решений задачи (1) — (3) выполнена оценка

$$\|x^i(t,\varepsilon) - X_n^i(t,\varepsilon)\| \le K\varepsilon^{n+1}, t \in (\tau_{i-1}, \tau_i], \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

где

$$X_n^i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^i [x_k^i(t) + \Pi_k^i(w_{i-1})].$$

Приведенные выкладки позволяют сформулировать следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $D(\varepsilon) = D_0 + O(\varepsilon^s e^{-\alpha/\varepsilon})$ и выполнены условия $У_1$ – $У_7$. Если $\varphi(t) \in \in C^\infty[a,b] \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_p\}$, $d_i \in \mathbb{R}^n$ и $h \in \mathbb{R}^m$ удовлетворяют условию (19) $P_{D_{0q}^*} h_{00} = 0$, то импульсная краевая задача (1) — (3) имеет единственное решение, представимое асимптотическим рядом (5). Коэффициенты разложения $x_k(t)$ имеют вид (6), а первые пограничные функции Π_0, Π_1 – вид (24), (28). Это решение при $\varepsilon \to 0$ стремится к решению $x^0(t)$ вырожденной системы (4) при $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i], i = \overline{1, p+1}$.*

Следствие 1. *Пусть выполнены условия $У_1$ – $У_5$ и $\operatorname{rank} D_0 = n_1 = n$. Если $\varphi(t) \in \in C^\infty[a,b] \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_p\}$, $d_i \in \mathbb{R}^n$ и $h \in \mathbb{R}^m$ удовлетворяют условиям $P_{D_{0q}^*} h_{00} = 0$, $P_{D_{0q}^*} a_{00} = = 0$, то импульсная краевая задача (1) – (3) имеет единственное решение, представимое асимптотическим рядом (5). Коэффициенты разложения $x_k^i(t)$ имеют вид (6), а первые пограничные функции Π_0, Π_1 таковы:*

$$\Pi_0^i(w_{i-1}) = \begin{cases} X(w_0)D_0^+ h_{00} & \text{при} \quad i = 1; \\ X(w_{i-1})b_0^{i-1} & \text{при} \quad i = \overline{2, p+1}, \end{cases}$$

$$\Pi_1^i(w_{i-1}) = \begin{cases} X(w_0)D_0^+ a_{00} + \int\limits_0^{w_0} X(w_0)X^{-1}(s)\, g_1^1(s)ds, & i = 1; \\ X(w_{i-1})b_1^{i-1} + \int\limits_0^{w_{i-1}} X(w_{i-1})X^{-1}(s)\, g_1^i(s)ds, & i = \overline{2, p+1}. \end{cases}$$

Это решение при $\varepsilon \to 0$ и $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i]$ стремится к решению вырожденной системы.

В этом случае $P_{D_0} = 0$, $c_0^1 = D_0^+ h_{00}$, $c_1^1 = D_0^+ a_{00}$, $\overline{h}_1(\varepsilon) = a_{00} + O\left(\varepsilon^q e^{-\alpha/\varepsilon}\right)$.

Замечание 1. Если $m = n$ и $\det D_0 \neq 0$, то $D_0^+ = D_0^{-1}$. Если $m = n$ и $\operatorname{rank} D_0 < m = n$, то все выкладки в этом случае совпадают с изложенными выше.

Замечание 2. Если $m \neq n$, $\operatorname{rank} D_0 = n_1 = m$, то $P_{D_0^*} = 0$ и системы $D_0 c_0^1 = \overline{h}_0(\varepsilon)$, $D_0 c_1^1 = \overline{h}_1(\varepsilon)$ всегда разрешимы. В этом случае получаем семейство пограничных функций.

2.2. Пусть

$$D(\varepsilon) = D_0 + D_1\varepsilon + D_2\varepsilon^2 + \ldots + D_s\varepsilon^s + O\left(\varepsilon^q \exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)\right),$$

где D_i — $(m \times n)$-мерные постоянные матрицы, $\alpha > 0, q \in \mathbb{N}, s \in Z$. Предположим, что

$$\overline{h}_i(\varepsilon) = h_{i0} + h_{i1}\varepsilon + \ldots + h_{is}\varepsilon^s + O\left(\varepsilon^{q_i} \exp\left(-\frac{\alpha_i}{\varepsilon}\right)\right),$$
$$q_i \in \mathbb{N}, \alpha_i > 0, i = 0, 1.$$

Тогда решение системы $D(\varepsilon)c_i^1 = \overline{h}_i(\varepsilon)$ ищем в виде

$$c_i^1(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{s} c_{ik}^1 \varepsilon^k, i = 0, 1.$$

Подставляя $D(\varepsilon), \overline{h}_i(\varepsilon)$ и c_i^1 в систему $D(\varepsilon)c_i^1 = \overline{h}_i(\varepsilon)$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем алгебраическую систему для определения вектора $\overline{c}_i^1 = [c_{i0}^1 \ c_{i1}^1 \ \ldots \ c_{is}^1]^T$:

$$Q\overline{c}_i^1 = b_i, \tag{29}$$

где Q — $\big((2s+1)m \times (s+1)n\big)$-мерная матрица вида

$$Q = \begin{bmatrix} D_0 & & & & 0 \\ D_1 & D_0 & & & \\ D_2 & D_1 & D_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ D_s & D_{s-1} & D_{s-2} & \ldots & D_0 \\ & D_s & D_{s-1} & \ldots & D_1 \\ & & D_s & \ldots & D_2 \\ 0 & & & \ddots & \vdots \\ & & & & D_s \end{bmatrix},$$

а

$$b_i = [\underbrace{h_{i0} \ldots h_{is}}_{(s+1)\,m}\underbrace{0 \ldots 0}_{sm}]^T.$$

Пусть выполнено условие

У$_9$) $\operatorname{rank} Q = (s+1)n,\ (2s+1)m > (s+1)n.$

Тогда $\operatorname{rank} P_Q = 0$ и $\operatorname{rank} P_{Q^*} = \overline{d}\ (2s+1)m - (s+1)n$. Система (29) имеет решение

$$\overline{c}_i^1 = Q^+ b_i \ \text{ или } \ c_{ij}^1 = [Q^+ b_i]_{n_j}, \quad j = \overline{0, s},\ i = 0, 1,$$

тогда и только тогда, когда $P_{Q^*}b_i = 0$, откуда получаем условие

У$_{10}$) $P_{Q_{\overline{d}}^*}b_i = 0$,

где $P_{Q_{\overline{d}}^*}$ — $(\overline{d} \times (2s+1)m)$-мерная матрица, а $[Q^+b_i]_{n_0}$ — n первых элементов матрицы Q^+b_i, $[Q^+b_i]_{n_1}$ — n вторых элементов той же матрицы и т. д., $[Q^+b_i]_{n_s}$ — n последних элементов. Имеем

$$\Pi_0^i(w_{i-1}) = \begin{cases} X(w_0)\sum_{i=0}^{s}\varepsilon^j[Q^+b_0]_{n_j} & \text{при} \quad i=1; \\ X(w_{i-1})b_0^{i-1} & \text{при} \quad i=\overline{2,p+1}, \end{cases}$$

$$\Pi_1^i(w_{i-1}) = \begin{cases} X(w_0)\sum_{i=0}^{s}\varepsilon^j[Q^+b_1]_{n_j} + \int\limits_0^{w_0} X(w_0)X^{-1}(s)\, g_1^1(s)ds, \quad i=1; \\ X(w_{i-1})b_1^{i-1} + \int\limits_0^{w_{i-1}} X(w_{i-1})X^{-1}(s)\, g_1^i(s)ds, \quad i=\overline{2,p+1}. \end{cases} \tag{30}$$

Теорема 2. *Пусть* $D(\varepsilon) = D_0 + D_1\varepsilon + D_2\varepsilon^2 + \ldots + D_s\varepsilon^s + O\left(\varepsilon^q \exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)\right)$ *и выполнены условия У$_1$ – У$_5$, У$_9$, У$_{10}$. Тогда импульсная краевая задача (1) – (3) имеет единственное решение, представимое в виде асимптотического ряда (5), коэффициенты которого определяются по формулам (6) и (30). Это решение при* $\varepsilon \to 0$ *и* $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i = \overline{1,p+1}$, *стремится к решению вырожденной системы.*

Замечание 3. Если $\operatorname{rank} Q < \min((2s+1)m, (s+1)n)$, то $\overline{c}_i^1$ при определенных условиях находится так же, как и в предыдущем пункте.

3. Общие импульсные условия. Вместо (2) рассмотрим общие импульсные условия вида

$$N_i x(\tau_i + 0) + M_i x(\tau_i - 0) = d_i, \quad i = \overline{1,p}, \tag{31}$$

где

У$_{11}$) $M_i, N_i, i = \overline{1,p}$, – $(k_i \times n)$-мерные постоянные матрицы, $d_i \in \mathbb{R}^{k_i}$.

Подставляя (5) в импульсные условия (11) и принимая во внимание, что в левой окрестности точки τ_i пограничные функции равны нулю, т. е. $\Pi_k^i\left(\frac{t-\tau_{i-1}}{\varepsilon}\right)\Big|_{t=\tau_i} = 0$, получаем

$$N_i \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (x_k(\tau_{i+1}) + \Pi_k^{i+1}(0)) + M_i \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k^i(\tau_i) = d_i, \quad i = \overline{1,p}. \tag{32}$$

Пусть выполнено условие

У$_{12}$) $\operatorname{rank} N_i = m_i \le \min(k_i, n), \quad i = \overline{1,p}$.

С учетом условия У$_{12}$ и равенства (12) находим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (x_k(\tau_{i+1}) + \Pi_k^{i+1}(0)) = P_{N_i}\eta_i + N_i^+ \left[d_i - M_i \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k^i(\tau_i)\right], \quad \eta_i \in \mathbb{R}^n, \tag{33}$$

тогда и только тогда, когда

$$P_{N_i}^* \left[d_i - M_i \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k^i(\tau_i) \right] = 0. \tag{34}$$

Обозначим через $\triangle_k^i x|_{t=\tau_i}$ выражение

$$\triangle_k^i x|_{t=\tau_i} = x_k^{i+1}(\tau_i) + N_i^+ M_i x_k^i(\tau_i), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \ i = \overline{1, p+1}. \tag{35}$$

Учитывая обозначения (35), приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях ε в (33), (34). В результате получаем, что начальные условия для дифференциальных систем (10) и (11) имеют вид

$$\Pi_k^{i+1}(0) = \begin{cases} P_{N_i} + N_i^+ d_i - \triangle_0^i x|_{t=\tau_i} & \text{при} \quad k = 0, \\ -\triangle_k^i x|_{t=\tau_i} & \text{при} \quad k = 1, 2, \dots, \end{cases} \tag{36}$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} &P_{N_i^*}(d_i - M_i x_0^i(\tau_i)) = 0, \\ &P_{N_i^*} M_i x_k^i(\tau_i) = 0, \quad k = 1, 2, \dots . \end{aligned} \tag{36a}$$

В этом случае начальные условия (36) зависят от неизвестных n-мерных векторов η_i. Они определяются при нахождении последовательных решений дифференциальных систем (10), (12) при $k = 0, 1, \dots$.

Пусть $k = 0$. Общие решения систем (10) и (14) при $k = 0$

$$\begin{aligned} \Pi_0^1(\omega_0) &= X(\omega_0)\Pi_0^1(0), \\ \Pi_0^i(\omega_{i-1}) &= X(\omega_{i-1})\Pi_0^i(0), \ \ i = \overline{2, p+1}, \end{aligned} \tag{37}$$

подставляем в краевые условия (12) при $k = 0$. Вводим обозначения

$$c_0 = \begin{bmatrix} c_0^1 & c_0^2 & \dots c_0^{p+1} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(p+1)n},$$

где

$$c_0^1 = \Pi_0^1(0), \quad c_0^i = P_{N_i}\eta_i, \quad i = \overline{2, p+1}.$$

Подставляя (36) в (37), для нахождения вектора c_0 получаем алгебраическую систему

$$\widetilde{D}(\varepsilon)c_0 = \widetilde{h}_0, \tag{38}$$

где

$$\widetilde{D}(\varepsilon) = \left[l_1 X\left(\frac{(\cdot) - \tau_0}{\varepsilon}\right) l_2 X\left(\frac{(\cdot) - \tau_1}{\varepsilon}\right), \dots, l_{p+1} X\left(\frac{(\cdot) - \tau_p}{\varepsilon}\right)\right]$$

— $(m \times (p+1)n)$-мерная матрица,

$$\widetilde{h} = h - \sum_{i=1}^{p+1} l_i(x_0^i(\cdot)) - \sum_{i=2}^{p+1} l_i \left(N_{i-1}^+ \left(d_i - \triangle_0^{i-1} x|_{t=\tau_{i-1}} \right) \right).$$

Рассмотрим случай

$$\widetilde{D}(\varepsilon) = \widetilde{D}_0 + O\left(\varepsilon^{s_1} \exp\left(-\frac{\alpha_1}{\varepsilon}\right)\right), \quad s_1 \in \mathbb{N}, \alpha_1 > 0.$$

Пусть для постоянной матрицы $\widetilde{D}_0$ выполнено условие

У$_{13}$) $\operatorname{rank} \widetilde{D}_0 = s_1 < \min(m, (p+1)n)$.

Система (38) имеет решение

$$c_0 = P_{\widetilde{D}_0^q} c_{0q} + \widetilde{D_0^+ \widetilde{h}_0}, \quad q = (p+1)n - s_1$$

или

$$c_0^i = \left[P_{\widetilde{D}_0^q}\right]_{n_i} c_{0q} + \left[\widetilde{D_0^+ \widetilde{h}_0}\right]_{n_i}, \quad c_{0q} \in \mathbb{R}^q, \tag{39}$$

тогда и только тогда, когда

$$P^*_{\widetilde{D}_0} \widetilde{h}_0 = 0 => P^*_{\widetilde{D}_0^v} \widetilde{h}_0 = 0, \quad v = m - s_1. \tag{40}$$

Чтобы определить c_{0q}, необходимо рассмотреть системы (10) и (11) при $k = 1$.

Общее решение системы (10) при $k = 1$ имеет вид

$$\Pi_1^1(w_0) = X(w_0) c_1^1 + \int\limits_0^{w_0} X(w_0) X^{-1}(s)\, g_1^1(s) ds, \quad c_1^1 \in \mathbb{R}^n, \tag{41}$$

где $c_1^1 = \Pi_1^1(0) \in \mathbb{R}^n$ — вектор, которой будем определять.

Задача Коши (11) при $k = 1$ с начальными условиями (36) имеет решение

$$\Pi_1^i(w_{i-1}) = X(w_{i-1}) \left(- \triangle_1^{i-1} x\right)|_{t=\tau_i} + \int\limits_0^{w_{i-1}} X(w_{i-1}) X^{-1}(s)\, g_1^i(s) ds, \quad i = \overline{2, p+1}. \tag{42}$$

Подставляя (42) в (12), для определения вектора c_1^1 получаем систему

$$D(\varepsilon) c_1^1 = \widetilde{Q}_0(\varepsilon) c_{0q} + \widetilde{a}_0(\varepsilon), \tag{43}$$

где $D(\varepsilon)$ — матрица из (16),

$$\widetilde{Q}_0(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{p+1} l_i \left(\int\limits_0^{(\cdot)} X(\cdot) X^{-1}(s)\, A_1(\tau_{i-1}) X(s) \left[P_{\widetilde{D}_0^q}\right]_{n_i} ds \right),$$

$$\widetilde{a}_0(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{p+1} l_i \left(x_1^i(\cdot)\right) - \sum_{i=1}^{p+1} l_i \left(\int\limits_0^{(\cdot)} X(\cdot) X^{-1}(s)\, A_1(\tau_{i-1}) X(s) \left[\widetilde{D}^+ \widetilde{h}_0\right]_{n_i} ds \right) -$$

$$- \sum_{i=2}^{p+1} l_i \left(X(\cdot) \left(- \triangle_1^{i-1} x\right)|_{t=\tau_{i-1}} + n_{i-1}^+ \left(d_{i-1} - \triangle_0^{i-1} x|_{t=\tau_{i-1}}\right)\right).$$

Пусть

$$\widetilde{Q}_0(\varepsilon) = \widetilde{Q}_{00} + O\left(\varepsilon^{s_2} \exp\left(-\frac{\alpha_2}{\varepsilon}\right)\right), \quad \widetilde{a}_0(\varepsilon) = \widetilde{a}_{00} + O\left(\varepsilon^{s_3} \exp\left(-\frac{\alpha_3}{\varepsilon}\right)\right).$$

Из условия разрешимости $P^*_{D_0^d}(\widetilde{Q}_{00}c_{0q} + \widetilde{a}_{00}) = 0$ системы $D_0 c_1^1 = \widetilde{Q}_{00}c_{0q} + \widetilde{a}_{00}$ получаем систему

$$\overline{\overline{Q}}_0 c_{0q} = -P^*_{D_0^d}\widetilde{a}_{00}, \tag{44}$$

где $\overline{\overline{Q}}_0 = P^*_{D_0^d}\widetilde{Q}_{00}$.

Пусть выполнены следующие условия:

У$_{14}$) $\operatorname{rank}\overline{\overline{Q}}_0 = r_1,\ \ d > r_1$;

У$_{15}$) $P_{\overline{\overline{Q}}_0^*}P^*_{D_0^d} = 0$.

При выполнении условий У$_{14}$ и У$_{15}$ решением системы (44) является $c_{0q} = -\overline{\overline{Q}}_0^+ P^*_{D_0^d}\widetilde{a}_{00}$, которое последовательно подставляем в (39), (37) и получаем окончательное представление для Π_0:

$$\Pi_0 = \begin{cases} \Pi_0^1(\omega_0) & = & -X(\omega_0)\left[P_{\widetilde{D}_0^q}\right]_{n_1}\overline{\overline{Q}}_0^+ P^*_{D_0^d}\widetilde{a}_{00} + X(\omega_0)\left[\tilde{D}_0^+\tilde{h}_0\right]_{n_1}; \\ \Pi_0^i(\omega_{i-1}) & = & -X(\omega_{i-1})\left[P_{\widetilde{D}_0^q}\right]_{n_i}\overline{\overline{Q}}_0^+ P^*_{D_0^d}\widetilde{a}_{00} + \\ & & +X(\omega_{i-1})\left\{\left[\tilde{D}_0^+\tilde{h}_0\right]_{n_i} + N_{i-1}^+\left(d_{i-1} - \triangle_0^{i-1}x|_{t=\tau_{i-1}}\right)\right\}, \\ & & i = \overline{2, p+1}. \end{cases} \tag{45}$$

Обозначим

$$\widetilde{Q}_1(\varepsilon) = -l_1\left(\int_0^{(\cdot)} X(\cdot)X^{-1}(s)\ A_1(\tau_0)X(s)P_{\widetilde{D}_0^r}ds\right),$$

$$\widetilde{a}_1(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{p+1} l_i\left(x_2^i(\cdot)\right) - \sum_{i=2}^{p+1} l_i\left(\Pi_2^i(\cdot)\right) -$$

$$- l_1\left(\int_0^{(\cdot)} X(\cdot)X^{-1}(s)\ A_1(\tau_0)X(s)D_0^+\left[\widetilde{a}_{00} - \widetilde{Q}_{00}\overline{\overline{Q}}_0 + P^*_{D_0^d}\widetilde{a}_{00}\right]ds\right) -$$

$$- l_1\left(\int_0^{(\cdot)} X(\cdot)X^{-1}(s)\ A_1(\tau_0)\int_0^s X(s)X^{-1}(u)\ g_1^1(u)duds\right).$$

Предположим, что

$$\widetilde{Q}_1(\varepsilon) = \widetilde{Q}_{10} + O\left(\varepsilon^{s_4} \exp\left(-\frac{\alpha_4}{\varepsilon}\right)\right), \quad \widetilde{a}_1(\varepsilon) = \widetilde{a}_{10} + O\left(\varepsilon^{s_5} \exp\left(-\frac{\alpha_5}{\varepsilon}\right)\right),$$

где $c_4, c_5 \in \mathbb{N}, \alpha_4 > 0, \alpha_5 > 0, \widetilde{Q}_{10}$ — постоянная матрица, $\widetilde{a}_{10}$ — постоянный вектор.

Если выполнены условия:

У$_{16}$) $\operatorname{rank} \overline{\overline{Q}}_1 = \operatorname{rank} \left(P^*_{D_0^d} \widetilde{Q}_{10} \right) = r_2, \ d > r_2$;

У$_{17}$) $P_{\overline{\overline{Q}}_1^*} P^*_{D_0^d} = 0$,

то аналогично получаем выражения для Π_1:

$$\Pi_1 = \begin{cases} \Pi_1^1(\omega_0) = -X(\omega_0) P_{D_0^r} \widetilde{Q}_1^+ P^*_{D_0^d} \widetilde{a}_{10} + X(\omega_0) D_0^+ \left[\widetilde{a}_{00} - \widetilde{Q}_{00} \overline{\overline{Q}}_0 + P^*_{D_0^d} \widetilde{a}_{00} \right] + \\ \qquad + \int\limits_0^{\omega_0} X(\omega_0) X^{-1}(s)\, g_1^1(s) ds; \\ \Pi_1^i(\omega_{i-1}) = -X(\omega_{i-1}) \triangle_1^{i-1} x|_{t=\tau_{i-1}} + \\ \qquad + \int\limits_0^{\omega_{i-1}} X(\omega_{i-1}) X^{-1}(s)\, g_1^i(s) ds, \quad i = \overline{2, p+1}. \end{cases} \tag{46}$$

Очевидно, пограничные функции Pi_0, Π_1 экспоненциально убывают.

Теорема 3. *Пусть*

$$D(\varepsilon) = D_0 + O\left(\varepsilon^s \exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)\right), \quad \widetilde{D}(\varepsilon) = \widetilde{D}_0 + O\left(\varepsilon^{s_1} \exp\left(-\frac{\alpha_1}{\varepsilon}\right)\right)$$

и выполнены условия У$_1$ – У$_3$, У$_5$, У$_{11}$, У$_6$, У$_{12}$ – У$_{15}$. Тогда импульсная краевая задача (1), (31), (3) имеет единственное решение, представимое формальным рядом вида (5). Коэффициенты разложения $x_k(t)$ имеют вид (6), а первые пограничные функции Π_0, Π_1 *— вид (45), (46) тогда и только тогда, когда выполнено условие* (36a).

Оценим остаточный член. Сначала рассмотрим сингулярно возмущенную краевую задачу

$$\varepsilon \dot{x} = Ax + f(t, \varepsilon), \quad t \neq \tau_i, \quad t \in [a, b], \tag{47}$$

$$M_i x(\tau_i - 0) + N_i x(\tau_i + 0) = 0, \quad i = \overline{1, p}, \tag{48}$$

$$lx(\cdot) = 0. \tag{49}$$

Решение системы (47) в каждом подынтервале $[\tau_0, \tau_1], (\tau_1, \tau_2], \ldots, (\tau_p, \tau_{p+1}]$ ищем в виде

$$x_i(t, \varepsilon) = W(t, \tau_{i-1}, \varepsilon) x(\tau_{i-1}) + \int\limits_{\tau_{i-1}}^{t} W(t, s, \varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} f(s, \varepsilon) ds, \tag{50}$$

где $W(t, s, \varepsilon)$ $(W(s, s, \varepsilon) = E_n)$ — фундаментальная нормированная матрица системы $\varepsilon \dot{w} = Aw$, для которой выполнена оценка [2]

$$\|W(t, s, \varepsilon)\| \leq \beta \exp\left(-\alpha \frac{t - s}{\varepsilon}\right), \quad \beta > 0, \ \alpha > 0, \ a \leq s \leq t \leq b, \tag{51}$$

и, кроме того, выполнено неравенство

$$\int \left\| \frac{1}{\varepsilon} W(t, s, \varepsilon) \right\| ds \leq M, \quad M > 0 \ \text{для} \ \varepsilon \to 0 \ \text{и} \ t \in [a, b]. \tag{52}$$

Если M_i, N_i — неособые квадратные матрицы, то можно построить [5] с помощью $W(t,s,\varepsilon)$ так называемую фундаментальную матрицу импульсной системы (47), (48).

Тогда неизвестным в (50) будет только $x_1(\tau_0)$, которое можно найти из краевого условия. В данном случае (M_i, N_i — произвольные прямоугольные матрицы) нет возможности составить подобную фундаментальную матрицу, потому что ранги $N_i, i=\overline{1,p}$, разные. В этой работе выбран подход, в котором импульсные условия рассматриваются как внутренние краевые условия. Тогда объединяем условия (48), (49) в одно, как это сделано в [6, 7].

Поскольку функционал l аддитивный, то условие (49) можно записать в виде

$$l(x) = \sum_{i=1}^{p+1} l_i(x_i), l_i : \{x_i :]\tau_{i-1}, \tau_i] \to R^n\} \to R^m.$$

Пусть $\bar{l}_i$ — $((m+\nu)\times n,\ \nu = k_1 + \ldots + k_p)$-мерные векторные функционалы:

$$\bar{l}_1(x_1) = [l_1, 0_1, 0_2, \ldots, 0_p]^T x_1(\cdot) + [0_0, M_1, 0_2, \ldots, 0_p]^T x_1(\tau_1),$$

$$\bar{l}_i(x_i) = [0_0, 0_1, \ldots, N_{i-1}, \ldots, 0_p]^T x_i(\tau_{i-1}) + [l_i, 0_1, \ldots, 0_p]^T x_i(\cdot) +$$

$$+ [0_0, 0_1, \ldots, M_i, \ldots, 0_p]^T x_i(\tau_i), i = \overline{2,p},$$

$$\bar{l}_{p+1}(x_{p+1}) = [0_0, 0_1, \ldots, 0_{p-1}, N_p]^T x_{p+1}(\tau_p) + [l_{p+1}, 0_1, \ldots, 0_p]^T x_{p+1}(\cdot),$$

где 0_0 — $(m\times n)$-мерная нулевая матрица, а $0_i, i=\overline{1,p}$, — нулевые матрицы размерности $k_i \times n$. Тогда условия (48), (49) запишутся в виде

$$\sum_{i=1}^{p+1} \bar{l}_i(x_i) = 0. \tag{53}$$

Вместо задачи (47) — (49) рассмотрим эквивалентную задачу (47), (53).

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \overline{h}(\varepsilon) &= -\sum_{i=1}^{p+1} l_i \left(\int_{\tau_{i-1}}^{(\cdot)} W(\cdot, s, \varepsilon)\frac{1}{\varepsilon} ds \right), \\ R(\varepsilon) &= [R_1(\varepsilon) \quad R_2(\varepsilon) \ldots R_{p+1}(\varepsilon)], \\ c &= \operatorname{col}(x_1(\tau_0) \ldots x_{p+1}(\tau_p)), \end{aligned} \tag{54}$$

где $R(\varepsilon)$ — $((m+\nu)\times(p+1)n)$-мерная матрица, $R_i(\varepsilon) = \bar{l}_i W(\cdot, \tau_{i-1}, \varepsilon)$ — $((m+\nu)\times n)$-мерные матрицы.

Подставляя (50) в импульсное краевое условие (53), получаем алгебраическую относительно вектора c систему с матрицей $R(\varepsilon)$ из (54), т. е.

$$R(\varepsilon)c = \overline{h}(\varepsilon). \tag{55}$$

Лемма 2. *Пусть* $R_i(\varepsilon) = R_{i0} + O\left(\varepsilon^{q_i}\exp\left(-\frac{\gamma_i}{\varepsilon}\right)\right)$, $q_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i > 0$, R_{i0} – $((m+\nu)\times n)$*-мерные постоянные матрицы и* $R_0 = (R_{10}\ R_{20}\ \ldots\ R_{p+1,0})$ — $((m+\nu)\times(p+1)n)$*-мерная постоянная матрица. Если* $\operatorname{rank} R_0 < \min(m+\nu, (p+1)n)$*, то импульсная краевая* *задача (47), (53) имеет $(p+1)n$-параметрическое решение вида*

$$x_i(t,\varepsilon) = W(t,\tau_{i-1},\varepsilon)\left[P_{R_0}\right]_{n_i}\overline{\eta} + W(t,\tau_{i-1},\varepsilon)\left[R_0^+\overline{h}(\varepsilon)\right]_{n_i} +$$

$$+\int\limits_{\tau_{i-1}}^{t} W(t,s,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}f(s,\varepsilon)ds \tag{56}$$

тогда и только тогда, когда выполнено $P_{R_0^*}\overline{h}(\varepsilon) = 0$, где R_0^+– единственная псевдообратная по Муру – Пенроузу матрица к матрице R_0, а P_{R_0} и $P_{R_0^*}$ — соответствующие ортопроекторы на $\ker(R_0)$ и $\ker(R_0^*)$.

Доказательство. Отбросим экспоненциально малые элементы в матрице $R_i(\varepsilon)$. Тогда система (55) примет вид

$$R_0 c = \overline{h}(\varepsilon).$$

При $\operatorname{rank} R_0 < \min(m+\nu,(p+1)n)$ эта система имеет параметрическое решение вида

$$c = P_{R_0}\overline{\eta} + R_0^+\overline{h}(\varepsilon), \quad \overline{\eta}\in R^{(p+1)n}, \tag{57}$$

тогда и только тогда, когда $P_{R_0^*}\overline{h}(\varepsilon) = 0$. Из (57) получаем

$$x_i(\tau_{i-1},\varepsilon) = \left[P_{R_0}\right]_{n_i}\overline{\eta} + \left[R_0^+\overline{h}(\varepsilon)\right]_{n_i}$$

где $\left[P_{R_0}\right]_{n_1}$ и $\left[R_0^+\overline{h}(\varepsilon)\right]_{n_1}$, $\left[P_{R_0}\right]_{n_2}$ и $\left[R_0^+\overline{h}(\varepsilon)\right]_{n_2}$, $\ldots$, $\left[P_{R_0}\right]_{n_{p+1}}$ и $\left[R_0^+\overline{h}(\varepsilon)\right]_{n_{p+1}}$ — соответственно n первых элементов, n вторых элементов, $\ldots$, n последних элементов матриц P_{R_0} и $R_0^+\overline{h}(\varepsilon)$. Подставляя $x_i(\tau_{i-1},\varepsilon)$ в (50), получаем (56). Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и леммы 2. Тогда асимптотическое решение импульсной краевой задачи (1), (31), (3) имеет представление*

$$x(t,\varepsilon) = X_n(t,\varepsilon) + u(t,\varepsilon), \tag{58}$$

где

$$X_n(t,\varepsilon) = X_n^i(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n}\left(x_k^i(t) + \Pi_k^i(w_{i-1})\right), \quad t\in(\tau_{i-1},\tau_i],$$

и $\|u(t,\varepsilon)\| \le c\varepsilon^{n+1}$. При этом $x(t,\varepsilon)$ стремится к решению вырожденной системы $x_0(t)$ при $\varepsilon\to 0$ и $t\in(a,b]\setminus\{\tau_1,\ldots,\tau_p\}$.

Доказательство. Подставляя (58) в (1), (31), (3), для остаточного члена $u(t,\varepsilon)$ получаем задачу

$$\varepsilon\dot{u} = Au + G(t,u,\varepsilon), \quad t\ne\tau_i, \quad t\in[a,b],$$

$$M_i u(\tau_i - 0) + N_i u(\tau_i + 0) = 0, \quad i=\overline{1,p}, \tag{59}$$

$$lu(\cdot,\varepsilon) = 0,$$

где функция $G(t,u,\varepsilon)$ имеет вид

$$G(t,u,\varepsilon) = AX_n(t,\varepsilon) + \varepsilon A_1(t)\left[u(t,\varepsilon) + X_n(t,\varepsilon)\right] + \varphi(t) - \varepsilon\frac{dX_n(t,\varepsilon)}{dt}$$

и выполняются условия [2]:

А)$\|G(t,0,\varepsilon)\| \leq c_1\varepsilon^{n+1}$;

Б)$\forall\eta > 0, \exists\delta = \delta(\eta)$ и $\varepsilon = \varepsilon_0(\eta)$ такие, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \|u'\| \leq \delta, \|u''\| \leq \delta$ и выполнено $\|G(t,u',\varepsilon) - G(t,u'',\varepsilon)\| \leq \eta\|u' - u''\|$.

На основании леммы 2 система (59) имеет решение вида (56)

$$u_i(t,\varepsilon) = W(t,\tau_{i-1},\varepsilon)\left[P_{R_0}\right]_{n_i}\overline{\eta} + W(t,\tau_{i-1},\varepsilon)\left[R_0^+\overline{h}(\varepsilon)\right]_{n_i} +$$

$$+\int\limits_{\tau_{i-1}}^{t} W(t,s,\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}G(s,u_i,\varepsilon)ds. \tag{60}$$

Для интегральных уравнений (60) применяем метод последовательных приближений. При предположении $\|u_i(t,\varepsilon)\| \leq \delta$ и на основании условий А) и Б) функции $G(t,u,\varepsilon)$, оценок (51), (52) можно показать существование положительных постоянных K_i таких, что

$$\|u_i(t,\varepsilon)\| \leq K_i\varepsilon^{n+1} \Longrightarrow \|u(t,\varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{n+1}, \quad c > 0.$$

Это означает, что ряд асимптотический. Остается найти условия, при которых $\|u_i(\tau_{i-1},\varepsilon)\| \leq \delta$.

Пусть

$$\|l_i(\psi)\| \leq c_{li}\|\psi\|, \quad \sum_{i=1}^{p+1} c_{l_i} = c_2, \quad \|A_1(t)\| \leq c_3, \quad c_1\varepsilon_0^{n+1} \leq \delta,$$

$$\|P_{R_0}\| \leq c_4, \quad \|R_0^+\| \leq c_5, \quad \|\overline{\eta}\| \leq c_6,$$

$$\varepsilon_0 < \frac{1}{2c_2c_3c_5M} - \frac{1}{c_3}, \quad c_6 < \frac{\delta}{2c_4}, \quad c_2c_5 - M > \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\|\overline{h}(\varepsilon)\| \leq \sum_{i=1}^{p+1} c_{l_i}\int\limits_{\tau_{i-1}}^{(\cdot)}\left\|\frac{1}{\varepsilon}W(\cdot,s,\varepsilon)\right\|\|G(s,u,\varepsilon)\|ds \leq$$

$$\leq c_2\int\limits_{\tau_{i-1}}^{(\cdot)}\left\|\frac{1}{\varepsilon}W(\cdot,s,\varepsilon)\right\|\|\left[\varepsilon\|A_1(t)\|\|u(s,\varepsilon)\| + G(s,0,\varepsilon)\|\right]ds \leq$$

$$\leq c_2\int\limits_{\tau_{i-1}}^{(\cdot)}\left\|\frac{1}{\varepsilon}W(\cdot,s,\varepsilon)\right\|\left(\varepsilon c_3\delta + c_1\varepsilon^{n+1}\right)ds \leq c_2M(\varepsilon_0c_3 + 1)\delta.$$

Имеем

$$\|u_i(\tau_{i-1},\varepsilon)\| \le \|P_{R_0}\|\|\overline{\eta}\| + \|R_0^+\|\|\overline{h}(\varepsilon)\| \le c_4c_6 + c_5c_2M(\varepsilon_0c_3+1)\delta \le$$
$$\le \frac{1}{2c_4}c_4\delta + c_2c_5M\left[c_3\left(\frac{1}{2c_2c_3c_5M} - \frac{1}{c_3}\right) - 1\right]\delta = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta.$$

Ясно, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} x(t,\varepsilon) = x_0(t)$ при $t \in (a,b] \setminus \{\tau_1,\ldots,\tau_p\}$.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Выща шк., 1987. — 287 с.
2. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973. — 272 с.
3. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. — 106 с.
4. *Bainov D. D., Hristova S. G.* Asimptotics of the solution of initial value problem for a singularly perturbed linear system with impulses. II. Justification of the algorithm // Sci. Proc. Plovdiv Univ. Math. — 1986. — **24**.
5. *Bainov D. D., Covachev V.* Impulsive differential equations with small parameter. — Singapore: World Sci. Publ., 1994. — 238 p.
6. *Karandjulov L. I.* Singularly perturbed linear boundary-value problems with impulse effects and regular reduced problem // Ukr. Math. J. — 1995. — **47**, № 4. — P. 463 – 468.
7. *Karandjulov L. I.* Singularly perturbed linear boundary-value problems for ordinary differential equations with impulse effects// Nonlinear boundary-value problems. — Donetsk: Inst. Appl. Math. and Mech. NAS Ukraine, 1977. — **7**. — P. 104 – 112.
8. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 320 с.
9. *Generalize* inverse and aplications / Ed. M. Z. Nashed. — New York etc.: Acad. Press, 1967. — 1054 p.
10. *Penrose R.* A generalize inverse for matrices // Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1955. — **51** — P. 406 – 413.
11. *Penrose R.* On best approximate solution of linear matrix equations // Ibid. — 1956. — **52**. — P. 17 – 19.
12. *Karandjulov L. I.* Asymptotic solution of definite class of singularly perturbed linear boundary-value problems for ordinary differential equations // Aun. l'Univ. Sofia "St. Kl. Ohridski", Faq. math. et inform. — Livre 1. — Math. et Mec. — 1997. — **91**. — P. 79 – 95.

Получено 20. 12. 99