УДК 517.9

О РАСЩЕПЛЕНИИ ВЫРОЖДЕННОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. В. Потороча, В. Г. Самойленко

Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко
Украина, 03680, Киев, просп. Акад. Глушкова, 2, корп. 6
e-mail: vsam@univ.kiev.ua

We study the decomposition problem for singularly perturbed systems of differential equations with a degeneration.

Вивчається питання про розщеплення сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженням.

В работах [1, 2] развита теория асимптотического интегрирования линейных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с вырождениями, которая основывается на операторном подходе. При этом при доказательстве утверждений об асимптотическом характере полученного приближенного решения используется приведение исходной системы уравнений к некоторому более простому так называемому расщепленному виду.

Построение асимптотического решения систем линейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с вырождениями значительно упрощается, если рассматриваемую систему предварительно привести к расщепленному виду, что облегчает интегрирование такого рода систем с помощью существующих подходов теории асимптотических методов.

В работах [3, 4] рассмотрен вопрос о расщеплении линейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производной вида

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

при условии, что степень характеристического уравнения $\det\left(A_0(t) - \lambda B(t)\right) = 0$ меньше или равна рангу вырожденной матрицы $B(t)$.

В работе [5] рассмотрен вопрос о построении решения задачи Коши с помощью метода, основанного на расщеплении слабонелинейной системы дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производной вида

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + \varepsilon f(t,x,\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где ранг вырожденной матрицы $\operatorname{rank} B(t) = n-1$.

В работе [6] рассмотрен вопрос о разрешимости нетеровых краевых задач для сингулярных дифференциальных уравнений.

Задача о расщеплении такого рода систем значительно усложняется, если при производной содержится матрица, представимая асимптотическим рядом по малому параметру

ε [7, 8]:

$$B(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i B_i(t),$$

где $B_0(t)$ — тождественно вырожденная матрица, т. е. $\det B_0(t) \equiv 0$, а также при наличии как кратных конечных элементарных делителей, так и кратных бесконечных элементарных делителей пучка матриц

$$L(t,\lambda) = A_0(t) - \lambda B_0(t).$$

В данной статье рассматривается вопрос о расщеплении систем дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)x(t,\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

и

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(t,\varepsilon)x(t,\varepsilon) + f(t,\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь h — натуральное число; вектор-функция $f(t,\varepsilon)$, а также $(n\times n)$-матрицы $A(t,\varepsilon)$ и $B(t,\varepsilon)$ представимы в виде асимптотических рядов

$$f(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i(t), \quad A(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i(t), \quad B(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i B_i(t). \tag{3}$$

Предположим, что выполняются следующие условия:

1^0) элементы матрицы $B(t,\varepsilon)$ являются действительными или комплексными функциями;

2^0) $A(t)$, $B_i(t)$, $i = 0,1,2,\ldots,$ — бесконечно дифференцируемые $(n\times n)$-матрицы на отрезке $[t_0,T]$;

3^0) $\det B_0(t) = 0$ для всех $t \in [t_0,T]$;

4^0) пучок матриц $L(t,\lambda) = A(t) - \lambda B_0(t)$ регулярный и на отрезке $[t_0;T]$ имеет p кратных конечных элементарных делителей и q кратных бесконечных элементарных делителей кратностей $s_1, s_2, \ldots, s_p$ и $r_1, r_2, \ldots, r_q$ соответственно;

5^0) степень характеристического уравнения $\det(L(t,\lambda)) = 0$ меньше ранга матрицы $B_0(t)$.

В силу условия 3^0 существуют такие неособые матрицы $P(t)$ и $Q(t)$, которые приводят пучок матриц $L(t,\lambda)$ к каноническому виду

$$P(t)(A(t) - \lambda B_0(t))Q(t) = S(t) - \lambda H_0, \tag{4}$$

где $S(t) = \operatorname{diag}(W(t),E)$, $H_0 = \operatorname{diag}(E,J_0)$, $J_0 = \operatorname{diag}(J_1^{(0)}, J_2^{(0)}, \ldots, J_q^{(0)})$; $J_j^{(0)}$, $j = \overline{1,q}$, — нильпотентные блоки Жордана, $W(t) = \operatorname{diag}(W_1(t), W_2(t), \ldots, W_p(t))$, $J_0 = \operatorname{diag}(J_1^{(0)},$

$J_2^{(0)}, \ldots, J_q^{(0)})$; $J_j^{(0)}, j = \overline{1,q}$, — нильпотентные блоки Жордана, $W_i(t) = \lambda_i E + J_i^{(0)}, i = \overline{1,p}$. Матрицы $W_i(t), i = \overline{1,p}$, и $J_j^{(0)}, j = \overline{1,q}$, имеют размерности s_i и r_j соответственно.

Теорема 1. *При выполнении условий $1^0 - 5^0$ систему дифференциальных уравнений (2) можно привести к виду*

$$\varepsilon^h H(t,\varepsilon)\frac{dy}{dt} = C(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon), \tag{5}$$

где $C(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}(\widetilde{C}_1(t,\varepsilon), \widetilde{C}_2(t,\varepsilon))$, $y(t,\varepsilon) = (y_1(t,\varepsilon), y_2(t,\varepsilon))$ *такие, что*

$$\varepsilon^h \frac{dy_1}{dt} = \widetilde{C}_1(t,\varepsilon)y_1,$$

$$\varepsilon^h J(t,\varepsilon)\frac{dy_2}{dt} = \widetilde{C}_2(t,\varepsilon)y_2.$$

Матрицы $C(t,\varepsilon)$ и $H(t,\varepsilon)$ представимы в виде асимптотических рядов по малому параметру ε :

$$C(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k C_k(t), \quad C_0(t) = S(t),$$

$$H(t,\varepsilon) = H_0 + \operatorname{diag}(0, R(t,\varepsilon)), \quad J(t,\varepsilon) = J_0 + R(t,\varepsilon), \quad R(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k R_k(t),$$

где $R_k(t)$, $k \in N$, — блочные матрицы, имеющие ту же размерность, что и матрица J_0, причем каждый ij-й блок матрицы $R_k(t)$, $k \in N$, имеет вид

$$R_k^{(ij)}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_k^{(ij)}(t) & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad k \in N.$$

Доказательство. Необходимо определить матрицы $V(t,\varepsilon)$ и $U(t,\varepsilon)$ такие, что при выполнении в системе (2) замены

$$x(t,\varepsilon) = V(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon), \tag{6}$$

и последующем умножении полученного соотношения слева на матрицу $U(t,\varepsilon)$ система (2) будет приведена к виду (5).

Матрицы $U(t,\varepsilon)$ и $V(t,\varepsilon)$ представимы в виде асимптотических рядов по малому параметру ε.

Выполняя замену (6), имеем

$$\varepsilon^h U(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)V(t,\varepsilon)\frac{dy}{dt} = \left(U(t,\varepsilon)A(t)V(t,\varepsilon) - \varepsilon^h U(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)\frac{dV(t,\varepsilon)}{dt}\right)y.$$

Матрицы $V(t,\varepsilon), U(t,\varepsilon), C(t,\varepsilon)$ и $H(t,\varepsilon)$ определяются так, чтобы выполнялись равенства

$$U(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)V(t,\varepsilon) = H(t,\varepsilon), \tag{7}$$

$$U(t,\varepsilon)A(t)V(t,\varepsilon) - \varepsilon^h U(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)\frac{d}{dt}V(t,\varepsilon) = C(t,\varepsilon). \tag{8}$$

Сравнивая сначала коэффициенты в (7) при соответствующих степенях ε, при ε^0 получаем

$$U_0(t)B_0(t)V_0(t) = H_0. \tag{9}$$

Учитывая (5), из (9) находим $U_0(t) = P(t), V_0(t) = Q(t)$.

Далее, из (7) при ε^1 имеем

$$U_1(t)B_0(t)V_0(t) + U_0(t)B_0(t)V_1(t) = F_1(t) + H_1(t), \tag{10}$$

где $F_1(t) = -P(t)B_1(t)Q(t)$.

Аналогично, при ε^k

$$U_k(t)B_0(t)V_0(t) + U_0(t)B_0(t)V_k(t) = F_k(t) + H_k(t), \tag{11}$$

где

$$F_k(t) = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-i} U_i(t)B_j(t)V_{k-i-j}(t).$$

Из (2) следует $B_0(t) = P^{-1}(t)H_0Q^{-1}(t)$. Тогда равенства (10), (11) можно представить следующим образом:

$$T_k(t)H_0 - H_0L_k(t) = F_k(t) + H_k(t), \quad k \in N, \tag{12}$$

где $T_k(t) = U_k(t)P^{-1}(t)$, $L_k(t) = V_k(t)Q^{-1}(t)$, $k \in N$, $H_k(t)$ — коэффициенты при ε^k в разложении матрицы $H(t,\varepsilon)$ в асимптотический ряд по ε.

Аналогично, сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях ε в матричном уравнении (8), при ε^0 получаем

$$U_0(t)A(t)V_0(t) = C_0(t). \tag{13}$$

Учитывая (2), имеем $C_0(t) = S(t)$.

Из (5) при ε^1 находим

$$U_1(t)A(t)V_0(t) + U_0(t)A(t)V_1(t) = C_1(t), \tag{14}$$

а при ε^k, $1 < k < h$, получаем

$$U_k(t)A(t)V_0(t) + U_0(t)A(t)V_k(t) = C_k(t) - G_k(t), \tag{15}$$

где

$$G_k(t) = \sum_{i=1}^{k-1} U_i(t)A(t)V_{k-i}(t)$$

— коэффициенты при ε^k в разложении матрицы $C(t,\varepsilon)$ в асимптотический ряд по ε.

Аналогично, из (8) при $\varepsilon^k, k \geq h$, находим

$$U_k(t)A(t)V_0(t) + U_0(t)A(t)V_k(t) = C_k(t) - G_k(t), \tag{16}$$

где

$$G_k(t) = \sum_{i=1}^{k-1} U_i(t)A(t)V_{k-i}(t) - \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-i} U_i(t)B_j(t)\frac{d}{dt}V_{k-i-j}(t).$$

Поскольку $A(t) = P^{-1}(t)S(t)Q^{-1}(t)$, системы (15), (16) можно представить следующим образом:

$$T_k(t)S(t) + S(t)L_k(t) = C_k(t) - G_k(t), \tag{17}$$

где $T_k(t) = U_k(t)P^{-1}(t)$, $L_k(t) = V_k(t)Q^{-1}(t)$, $k \in N$.

При каждом $k \in N$ матрицы $T_k(t)$, $L_k(t)$, $F_k(t)$ и $C_k(t)$, $k \in N$, в (12), (17) представим [9, 10] в соответствии с блочной структурой матриц $S(t)$ и H_0, т. е.

$$T_k(t) = \begin{pmatrix} T_{k,11} & T_{k,12} \\ T_{k,21} & T_{k,22} \end{pmatrix}, \qquad L_k(t) = \begin{pmatrix} L_{k,11} & L_{k,12} \\ L_{k,21} & L_{k,22} \end{pmatrix},$$

$$F_k(t) = \begin{pmatrix} F_{k,11} & F_{k,12} \\ F_{k,21} & F_{k,22} \end{pmatrix}, \qquad C_k(t) = \begin{pmatrix} C_{k,11} & 0 \\ 0 & C_{k,22} \end{pmatrix}, \quad k \in N.$$

Рассмотрим системы матричных уравнений (12) и (17) при $k = 1$. Имеем

$$T_1(t)H_0 - H_0L_1(t) = F_1(t) + H_1(t), \tag{18}$$

$$T_1(t)S(t) + S(t)L_1(t) = C_1(t). \tag{19}$$

Систему матричных уравнений (18), (19) можно записать в блочном виде

$$\begin{pmatrix} T_{1,11} & T_{1,12}J_0 \\ T_{1,21} & T_{1,22}J_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_{1,11} & L_{1,12} \\ J_0L_{1,21} & J_0L_{1,22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1,12} & F_{1,12} \\ F_{1,21} & F_{1,22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{1,22} \end{pmatrix}, \qquad (20)$$

$$\begin{pmatrix} T_{1,11}W & T_{1,12} \\ T_{1,21}W & T_{1,22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} WL_{1,11} & WL_{1,12} \\ L_{1,21} & L_{1,22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1,11} & 0 \\ 0 & C_{1,22} \end{pmatrix}, \qquad (21)$$

или же в виде

$$T_{1,11} + L_{1,11} = F_{1,11}, \qquad (22)$$

$$T_{1,11}W + WL_{1,11} = C_{1,11}, \qquad (23)$$

$$T_{1,12}J_0 + L_{1,12} = F_{1,12}, \qquad (24)$$

$$T_{1,12} + WL_{1,12} = 0, \qquad (25)$$

$$T_{1,21} + J_0L_{1,21} = F_{1,21}, \qquad (26)$$

$$T_{1,21} + L_{1,21} = 0, \qquad (27)$$

$$T_{1,22}J_0 + J_0L_{1,22} = F_{1,22} + R_{1,22}, \qquad (28)$$

$$T_{1,22} + L_{1,22} = C_{1,22}. \qquad (29)$$

Поскольку матрицы $W(t)$ и J_0 квазидиагональные, разобьем блочные матрицы $T_{l,uv}$, $L_{l,uv}, F_{l,uv}, C_{l,uv}, R_l, l \in N, u, v = \overline{1,2}$, на блоки в соответствии со структурой матриц $W(t)$ и J_0 и в дальнейшем будем рассматривать произвольный ij-й блок соответствующей системы матричных уравнений.

Рассмотрим произвольный ii-й блок, расположенный на главной диагонали системы матричных уравнений (22), (23), который соответствует кратному конечному элементарному делителю кратности s_i, $i = \overline{1,p}$.

Для матриц, расположенных на главной диагонали в системе (22), (23), имеем следующие уравнения:

$$T_{1,11}^{(ii)} + L_{1,11}^{(ii)} = F_{1,11}^{(ii)},$$

$$T_{1,11}^{(ii)}W_i + W_iL_{1,11}^{(ii)} = C_{1,11}^{(ii)},$$

или

$$W_i L_{1,11}^{(ii)} - L_{1,11}^{(ii)} W_i = C_{1,11}^{(ii)} - F_{1,11}^{(ii)} W_i, \tag{30}$$

$$T_{1,11}^{(ii)} = F_{1,11}^{(ii)} - L_{1,11}^{(ii)}. \tag{31}$$

Обозначим через $c_{lj}(t)$, $l, j = \overline{1, s_i}$, элементы матрицы $C_{1,11}(t)$. Тогда для элементов матричных уравнений системы (30), которые расположены не выше главной диагонали, должны выполняться соотношения

$$\sum_{j=0}^{s_i-k} c_{k+j,1+j} = \sum_{j=0}^{s_i-k-1} f_{k-1+j,j+1} + \lambda_i \sum_{j=0}^{s_i-k} f_{k+j,j+1}, \tag{32}$$

а для элементов, находящихся выше главной диагонали, — соотношения вида

$$\sum_{j=0}^{s_i-k-1} c_{1+j,k+j-1} = \sum_{j=0}^{s_i-k} f_{k+j,j+1} + \lambda_i \sum_{j=0}^{s_i-k-1} f_{1+j,k+j-1}, \quad k = \overline{2, s_i - 1}. \tag{33}$$

Поскольку из соотношений (32), (33) нельзя однозначно определить значения $c_{lj}(t)$, все элементы $c_{lj}(t)$, за исключением элементов $c_{s_i-2j+1,1}$, $j = \overline{1, \left[\frac{s_i}{2}\right]}$, и c_{j+1,s_i-j}, $j = \overline{1, s_i - 1}$, полагаем равными нулю. Таким образом, матрица $C_{1,11}^{(ii)}$ определена.

Для произвольного ij-го, $i \neq j$, блока системы матричных уравнений (22), (23) имеем следующую систему уравнений:

$$W_i L_{1,11}^{(ij)} - L_{1,11}^{(ij)} W_j = C_{1,11}^{(ij)} - F_{1,11}^{(ij)} W_j, \tag{34}$$

$$T_{1,11}^{(ij)} = F_{1,11}^{(ij)} - L_{1,11}^{(ij)}. \tag{35}$$

Обозначим через $l_{uv}(t)$, $u = \overline{1, s_i}$, $v = \overline{1, s_j}$, элементы матрицы $L_{1,11}^{(ij)}(t)$, $i \neq j$. Положив $C_{1,11}^{(ij)} = 0$, $i \neq j$, систему (34) в координатной форме представим следующим образом:

$$(\lambda_i - \lambda_j) \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{1,2} & \dots & l_{1,s_j} \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \dots & l_{2,s_j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{s_i-1,1} & l_{s_i-1,2} & \dots & l_{s_i-1,s_j} \\ l_{s_i,1} & l_{s_i,2} & \dots & l_{s_i,s_j} \end{pmatrix} +$$

$$
+\begin{pmatrix} l_{2,1} & l_{2,2}-l_{1,1} & \ldots & l_{2,s_j}-l_{1,s_j-1} \\ l_{3,1} & l_{3,2}-l_{2,1} & \ldots & l_{3,s_j}-l_{2,s_j-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_{s_i,1} & l_{s_i,2}-l_{s_i-1,1} & \ldots & l_{s_i,s_j}-l_{s_i-1,s_j-1} \\ 0 & -l_{s_i,1} & \ldots & -l_{s_i,s_j-1} \end{pmatrix} =
$$

$$
= -\begin{pmatrix} f_{1,1}\lambda_j & f_{1,1}+f_{1,2}\lambda_j & \ldots & f_{1,s_j-1}+f_{1,s_j}\lambda_j \\ f_{2,1}\lambda_j & f_{2,1}+f_{2,2}\lambda_j & \ldots & f_{2,s_j-1}+f_{2,s_j}\lambda_j \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{s_i-1,1}\lambda_j & f_{s_i-1,1}+f_{s_i-1,2}\lambda_j & \ldots & f_{s_i-1,s_j-1}+f_{s_i-1,s_j}\lambda_j \\ f_{s_i,1}\lambda_j & f_{s_i,1}+f_{s_i,2}\lambda_j & \ldots & f_{s_i,s_j-1}+f_{s_i,s_j}\lambda_j \end{pmatrix}. \tag{36}
$$

Для элементов последней строки имеем

$$
l_{s_i,1} = \frac{f_{s_i,1}\lambda_j}{(\lambda_i-\lambda_j)}, \quad l_{s_i,k} = \sum_{n=1}^{k} \frac{f_{s_i,k-n+1}\lambda_j + f_{s_i,k-n}}{(\lambda_j-\lambda_i)^n}, \quad k = \overline{2, s_j}.
$$

Тогда элементы первого столбца вычисляются с помощью рекуррентной формулы

$$
l_{n,1} = \frac{f_{n,1}\lambda_j + l_{n+1,1}}{(\lambda_j-\lambda_i)}, \quad n = \overline{1, s_i}.
$$

Остальные элементы матрицы $L_{1,11}^{(ij)}$ однозначно определяются рекуррентным образом по формуле

$$
l_{k,r} = \frac{1}{\lambda_j-\lambda_i}(f_{k,r}\lambda_j + f_{k,r-1} - l_{k+1,r} + l_{k,r-1}), \quad k = \overline{2, s_i}, \quad r = \overline{2, s_j}.
$$

Таким образом, определив элементы матриц $L_{1,11}(t)$, из равенства (22) находим элементы матрицы $T_{1,11}(t)$.

Систему (24), (25) запишем следующим образом:

$$
W^{-1}L_{1,12} - L_{1,12}J_0 = W^{-1}F_{1,12}, \tag{37}
$$

$$
T_{1,12} = -WL_{1,12}. \tag{38}
$$

Решение уравнения (37) для произвольного ir-го блока можно записать в следующем виде:

$$
L_{1,12}^{(j1)} = F_{1,12}^{(j1)}, \quad j = \overline{1, p},
$$

$$L_{1,12}^{(jr)} = \sum_{k=0}^{r-1} W_r^k F_{1,12}^{(j,r-k)}, \quad r = \overline{2,q}, \quad j = \overline{1,p}.$$

Систему матричных уравнений (26), (27) представим в виде

$$J_0 T_{1,21} - T_{1,21} W^{-1} = -F_{1,21} W^{-1}, \tag{39}$$

$$L_{1,21} = -T_{1,21} W. \tag{40}$$

Аналогично системе уравнений (37), (38), система (39), (40) для произвольного (jr)-блока имеет единственное решение вида

$$T_{1,21}^{(q,j)} = F_{1,21}^{(q,j)}, \quad j = \overline{1,p},$$

$$T_{1,21}^{(jr)} = \sum_{k=0}^{q-j} F_{1,21}^{(j+k,r)} W_r^k, \quad j = \overline{1,q-1}, \quad r = \overline{1,p}.$$

Из систем (28), (29) получим q^2 матричных уравнений вида

$$J_i L_{1,22}^{(ij)} - L_{1,22}^{(ij)} J_j = F_{1,22}^{(ij)} + R_1^{(ij)} + C_{1,22}^{(ij)} J_j, \quad i,j = \overline{1,q},$$

которые в координатной форме запишутся следующим образом:

$$\begin{pmatrix} l_{2,1} & \dots & l_{2,r_j} \\ \dots & \dots & \dots \\ l_{r_i,1} & \dots & l_{r_i,r_j} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & l_{1,1} & \dots & l_{1,r_j-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & l_{r_i-1,1} & \dots & l_{r_i-1,r_j-1} \\ 0 & l_{r_i,1} & \dots & l_{r_i,r_j-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} - c_{1,1} & \dots & f_{1,r_j} - c_{1,r_j-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{r_i-1,1} & f_{r_i-1,2} - c_{r_i-1,1} & \dots & f_{r_i-1,r_j} - c_{r_i-1,r_j-1} \\ f_{r_i,1} & f_{r_i,2} - c_{r_i,1} & \dots & f_{r_i,r_j} - c_{r_i,r_j-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ r_{r_i,1} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим:

1) $r_{r_i,1} = -f_{r_i,1}$;

2) $l_{j,1} = f_{j-1,1}, j = \overline{2,r_i}$;

3) для элементов $c_{i,j}(t)$ матрицы $C_{1,22}(t)$, которые расположены не выше главной диагонали, должно выполняться соотношение

$$\sum_{l=0}^{r_i-k} c_{k+l,1+l} = \sum_{l=0}^{r_i-k+1} f_{k-1+l,\,l+1}, \quad k = \overline{2,r_i-1}; \tag{41}$$

4) для элементов $c_{i,j}(t)$ матрицы $C_{1,22}(t)$, которые расположены выше главной диагонали, необходимо выполнение равенства

$$\sum_{l=0}^{r_i-k+1} c_{1+l,\,k+l-1} = \sum_{l=0}^{r_i-k} f_{l+1,\,k+l}, \quad k = \overline{1, r_i - 1}. \tag{42}$$

Все элементы матрицы $C_{1,22}(t)$, за исключением элементов $c_{r_i-2l+1,1}(t)$, $l = \overline{1, \left[\frac{r_i}{2}\right]}$, и $c_{l+1,r_j-l}(t)$, $l = \overline{1, r_j - 1}$, полагаем равными нулю.

Итак, зная элементы матрицы $C_{1,22}(t)$, находим элементы матрицы $L_{1,22}$, а из уравнения (29) — матрицу $T_{1,22}$.

Таким образом, система матричных уравнений (12), (17) при $k = 1$ решена.

Перейдем теперь к решению системы матричных уравнений (12), (17), при $k > 1$. Имеем

$$T_k(t)H_0 - H_0L_k(t) = F_k(t) + H_k(t), \tag{43}$$

$$T_k(t)S(t) + S(t)L_k(t) = C_k(t) - G_k(t). \tag{44}$$

Запишем систему (43), (44) в блочном виде

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} T_{k,11} & T_{k,12}J_0 \\ T_{k,21} & T_{k,22}J_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_{k,11} & L_{k,12} \\ J_0L_{k,21} & J_0L_{k,22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k,11} & F_{k,12} \\ F_{k,21} & F_{k,22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_k \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} T_{k,11}W & T_{k,12} \\ T_{k,21}W & T_{k,22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} WL_{k,11} & WL_{k,12} \\ L_{k,21} & L_{k,22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{k,11} & 0 \\ 0 & C_{k,22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_{k,11} & G_{k,12} \\ G_{k,21} & G_{k,22} \end{pmatrix},\end{gathered} \tag{45}$$

или

$$T_{k,11} + L_{k,11} = F_{k,11}, \tag{46}$$

$$T_{k,11}W + WL_{k,11} = C_{k,11} - G_{k,11}, \tag{47}$$

$$T_{k,12}J_0 + L_{k,12} = F_{k,12}, \tag{48}$$

$$T_{k,12} + WL_{k,12} = -G_{k,12}, \tag{49}$$

$$T_{k,21} + J_0L_{k,21} = F_{k,21}, \tag{50}$$

$$T_{k,21} + L_{k,21} = -G_{k,21}, \tag{51}$$

$$T_{k,22}J_0 + J_0L_{k,22} = F_{k,22} + R_{k,22}, \tag{52}$$

$$T_{k,22} + L_{k,22} = C_{k,22} - G_{k,22}. \tag{53}$$

Система матричных уравнений (46), (47) идентична рассмотренной ранее и отличается от системы (30), (31) наличием в правой части уравнения (47) дополнительного слагаемого — матрицы $G_{k,1}$, которая уже определена на предыдущем шаге. Имеем

$$WL_{k,11} - L_{k,11}W = C_{k,11} - F_{k,11}W - G_{k,11}, \tag{54}$$

$$T_{k,11} = F_{k,11} - L_{k,11}. \tag{55}$$

Следовательно, для элементов матриц, расположенных на главной диагонали (при $i = j$), из уравнения (54) имеем соотношения вида

$$\sum_{j=0}^{s_i-k} c_{k+j,1+j} = \sum_{j=0}^{s_i-k-1} f_{k-1+j,j+1} + \lambda_i \sum_{j=0}^{s_i-k} f_{k+j,j+1} - \sum_{j=0}^{s_i-k} g_{k+j,1+j},$$

$$\sum_{j=0}^{s_i-k} c_{1+j,k+j-1} = \sum_{j=0}^{s_i-k+1} f_{k+j,j+1} + \lambda_i \sum_{j=0}^{s_i-k} f_{1+j,k+j-1} - \sum_{j=0}^{s_i-k} g_{1+j,k+j-1},$$

где $k = \overline{2, s_i - 1}$.

Все элементы $c_{lj}(t)$, за исключением элементов $c_{s_i-2j+1,1}$ и c_{j+1,s_i-j}, $j = \overline{1, s_i - 1}$, полагаем равными нулю.

Для произвольного ij-го, $i \neq j$, блока имеем решения вида

$$l_{s_i,1} = \frac{f_{s_i,1}\lambda_j}{(\lambda_i - \lambda_j)}, \quad l_{s_i,k} = \sum_{n=1}^{k} \frac{f_{s_i,k-n+1}\lambda_j + f_{s_i,k-n} + g_{s_i,k-n+1}}{(\lambda_j - \lambda_i)^n}, \quad k = \overline{2, s_j}.$$

Элементы первого столбца вычисляются с помощью рекуррентной формулы

$$l_{n,1} = \frac{f_{n,1}\lambda_j + l_{n+1,1} + g_{n,1}}{(\lambda_j - \lambda_i)}, \quad n = \overline{1, s_i}.$$

Остальные элементы матрицы $L_{k,11}^{(ij)}$, $i \neq j$, однозначно определяются рекуррентным образом из следующей формулы:

$$l_{k,r} = \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i}(f_{k,r}\lambda_j + f_{k,r-1} + g_{k,r} - l_{k+1,r} + l_{k,r-1}), \quad k = \overline{2, s_i}, \quad r = \overline{2, s_j}.$$

Системы уравнений

$$W^{-1}T_{k,12} - T_{k,12}J_0 = -F_{k,12} - W^{-1}G_{k,12},$$

$$L_{k,12} = F_{k,12} - T_{k,12}J_0$$

и

$$J_0 L_{k,21} - L_{k,21}W^{-1} = F_{k,21} + W^{-1}G_{k,21},$$

$$T_{k,21} = F_{k,21} - J_0 L_{k,21}$$

решаются аналогично системам (24) – (27).

Рассмотрим систему уравнений

$$T_{k,22}J_0 + J_0 L_{k,22} = F_{k,22} + R_{k,22},$$

$$T_{k,22} + L_{k,22} = C_{k,22} - G_{k,22},$$

или

$$J_i L_{k,22}^{(ij)} - L_{k,22}^{(ij)} J_j = F_{k,22}^{(ij)} + R_k^{(ij)} + C_{k,22}^{(ij)} J_j, \quad i,j = \overline{1,q}.$$

Ее решения можно представить в виде, аналогичном виду решения систем (28), (29), т. е.:

1) $r_{r_i,1} = -f_{r_i,1}$;

2) $l_{j,1} = f_{j-1,1}$, $j = \overline{2,r_i}$;

3) для элементов $c_{ij}(t)$ матрицы $C_{k,22}(t)$, которые расположены не выше главной диагонали, должно выполняться соотношение

$$\sum_{j=0}^{r_i-k} c_{k+j,1+j} = \sum_{j=0}^{r_i-k+1} f_{k-1+j,j+1} - \sum_{j=0}^{r_i-k} g_{k+j,1+j}, \quad k = \overline{2,r_i-1}; \tag{56}$$

4) для элементов $c_{i,j}(t)$ матрицы $C_{k,22}(t)$, которые расположены выше главной диагонали, необходимо выполнение равенства

$$\sum_{j=0}^{r_i-k+1} c_{1+j,k+j-1} = \sum_{j=0}^{r_i-k} f_{j+1,k+j} - \sum_{j=0}^{r_i-k+1} g_{1+j,k+j-1}, \quad k = \overline{2,r_i-1}. \tag{57}$$

Элементы $c_{i,j}(t)$ полагаем равными нулю, за исключением элементов $c_{r_i-2l+1,1}(t)$, $l = \overline{1,\left[\frac{r_j}{2}\right]}$, и c_{l+1,r_i-l}(t), $l = \overline{1,r_j-1}$, которые удовлетворяют равенствам (56), (57). Определяя элементы матрицы $C_{k,22}(t)$, находим элементы матриц $L_{k,22}$ и $T_{k,22}$.

Таким образом, определяя матрицы $L_k(t)$ и $T_k(t)$, $k \in N$, из равенств $U_k(t) = P(t)T_k(t)$ и $V_k(t) = Q(t)L_k(t)$, $k \in N$, находим неизвестные матрицы $U_k(t)$ и $V_k(t)$. Тем самым доказано существование замены (6), приводящей систему (2) к виду (5).

Таким образом, построены матрицы $\widetilde{C}_2(t,\varepsilon)$ и $\widetilde{C}_1(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}(C_1^{(11)}(t,\varepsilon), C_1^{(22)}(t,\varepsilon), \ldots$ $\ldots, C_1^{(pp)}(t,\varepsilon))$, где блоки $C_1^{(ii)}(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,p}$, как следует из доказательства, имеют вид

$$C_1^{(ii)}(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & \ldots & 0 & c_{1,s_i} \\ 0 & 0 & \ldots & c_{2,s_i-1} & 0 \\ c_{3,1} & \ldots & c_{3,s_i-2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{s_i-1,1} & c_{s_i-1,2} & \ldots & \ldots & 0 \\ c_{s_i,1} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,p},$$

а блоки матрицы $\widetilde{C}_2(t,\varepsilon)$ —

$$C_2^{(ij)}(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & \ldots & 0 & c_{1,r_j} \\ 0 & 0 & \ldots & c_{2,r_j-1} & 0 \\ c_{3,1} & \ldots & c_{3,r_j-2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{r_i-1,1} & c_{r_i-1,2} & \ldots & \ldots & 0 \\ c_{r_i,1} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,p}, \quad i = \overline{1,q}.$$

Теорема 1 доказана.

В случае неоднородной системы дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(t,\varepsilon)x(t,\varepsilon) + f(t,\varepsilon) \tag{58}$$

также существует замена вида (6), приводящая рассматриваемую систему (58) к расщепленному виду.

Пусть выполняются следующие условия:

1^0) вектор-функция $f(t,\varepsilon)$, а также матрицы $B(t,\varepsilon)$, $A(t,\varepsilon)$ представимы асимптотическими рядами по малому параметру ε, а их элементами являются действительные или комплексные функции;

2^0) вектор-функция $f_i(t)$ и $(n \times n)$-матрицы $A_i(t)$, $B_i(t)$, $i = 0,1,2,\ldots$, бесконечно дифференцируемы на отрезке $[t_0,T]$;

3^0) $\det B_0(t) = 0$ для всех $t \in [t_0,T]$;

4^0) пучок матриц $L(t,\lambda) = A_0(t) - \lambda B_0(t)$ регулярный и имеет на отрезке $[t_0;T]$ p кратных конечных элементарных делителей и q кратных бесконечных элементарных делителей;

5^0) степень характеристического уравнения $\det(L(t,\lambda)) = 0$ меньше ранга матрицы $B_0(t)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *При выполнении условий 1^0-5^0 систему дифференциальных уравнений (58) можно привести к виду*

$$\varepsilon^h H(t,\varepsilon)\frac{dy}{dt} = C(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) + F(t,\varepsilon),$$

где $C(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}\,(\widetilde{C}_1(t,\varepsilon), \widetilde{C}_2(t,\varepsilon)), y(t,\varepsilon) = (y_1(t,\varepsilon), y_2(t,\varepsilon)), F(t,\varepsilon) = \mathrm{colon}\,(F_1(t,\varepsilon), F_2(t,\varepsilon))$ *такие, что*

$$\varepsilon^h \frac{dy_1}{dt} = \widetilde{C}_1(t,\varepsilon)y_1 + F_1(t,\varepsilon),$$

$$\varepsilon^h J(t,\varepsilon)\frac{dy_2}{dt} = \widetilde{C}_2(t,\varepsilon)y_2 + F_2(t,\varepsilon).$$

Вектор $F(t,\varepsilon)$, *а также матрицы* $C(t,\varepsilon)$ *и* $H(t,\varepsilon)$ *представимы в виде асимптотических рядов по малому параметру* ε:

$$F(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k F_k(t), \quad C(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k C_k(t), \quad C_0(t) = S(t),$$

$$H(t,\varepsilon) = H_0 + \mathrm{diag}\,(0, R(t,\varepsilon)), \quad J(t,\varepsilon) = J_0 + R(t,\varepsilon), \quad R(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k R_k(t),$$

где $R_k(t)$, $k \in N$, — *блочные матрицы, имеющие ту же размерность, что и матрица* J_0, *причем каждый* ij-*й блок матрицы* $R_k(t,)$ $k \in N$, *имеет вид*

$$R_k^{(ij)}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_k^{(ij)}(t) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad k \in N.$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Выводы. В данной работе доказаны утверждения о расщеплении сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с вырождениями.

1. *Самойленко А. М., Шкиль М. И., Яковец В. П.* Линейные системы дифференциальных уравнений с вырождением. – Киев: Вища шк., 2000. — 294 с.
2. *Шкиль М. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — Киев: Вища шк., 1991. — 207 с.
3. *Старун И. И.* Система с вырожденной матрицей при производной // Укр. мат. журн. — 1990. — **42**, № 11. — С. 1535 – 1537.

4. *Старун И. И., Шкиль Н. И.* Расщепление сингулярно возмущенных систем // Там же. — 1995. — **47**, № 11. — С. 1542 – 1548.

5. *Самусенко П. Ф.* Построение решения задачи Коши систем дифференциальных уравнений // Вестн. Киев. нац. ун-та. Математика. Механика. — 2005. — Вып. 13. — С. 19 – 25.

6. *Самойленко А. М., Бойчук А. А., Каранджулов Л. И.* Нетеровы краевые задачи с сингулярным возмущением // Дифференц. уравнения. — 2001. — **37**. № 9. — С. 1243 – 1251.

7. *Потороча В.В.* Асимптотична оцінка для наближеного розв'язку задачі Коші для сингулярно збурених лінійних систем диференціальних рівнянь з виродженням та імпульсною дією // Вестн. Киев. нац. ун-та. Математика. Механика. — 2005. — Вып. 14. — С. 73 – 75.

8. *Потороча В.В., Самойленко В.Г.* Асимптотична оцінка для наближеного розв'язку задачі Коші для сингулярно збурених лінійних систем диференціальних рівнянь з виродженням та імпульсною дією у випадку кратних коренів // Допов. НАН України. — 2005. — № 12. — С. 45 – 50.

9. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1985. — 375 с.

10. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

Получено 29.12.2005