УДК 517.9

АППРОКСИМАЦИЯ ПУЧКА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Н. В. Плотникова

Одес. нац. ун-т
Украина, 65026, Одесса, ул. Дворянская, 2
e-mail: talie@ukr.net

We construct an approximation for a pencil of solutions of a linear impulsive differential inclusion in terms of a system of linear impulsive differential equations with the Hukuhara derivative.

Побудовано апроксимацію жмутка розв'язків лінійного імпульсного диференціального включення за допомогою системи лінійних імпульсних диференціальних рівнянь з похідною Хукухари.

Рассмотрим линейное дифференциальное включение

$$\dot{x} \in A(t)x + F(t), \quad x(0) \in X_0 \in \operatorname{conv}(R^n), \tag{1}$$

где $t \in [0,T]$, $x \in R^n$ — фазовый вектор, $A(t)$ — непрерывная $(n \times n)$-матрица, $F : [0,T] \to \operatorname{conv}(R^n)$ — непрерывное многозначное отображение.

Включению (1) эквивалентна, например, линейная система управления

$$\dot{x} = A(t)x + D(t)u, \quad x(0) \in X_0, \tag{2}$$

где $u(t) \in U(t)$ — вектор управления, $U : [0,T] \to \operatorname{conv}(R^p)$ — непрерывное многозначное отображение, $D(t)$ — непрерывная $(n \times p)$-матрица, при этом $F(t) = \{y \in R^n | y = D(t)u(t), u(t) \in U(t)\}$.

Исследование свойств интегральной воронки включения (1) (множества достижимости системы (2)) имеет большое значение в качественной теории и задачах управления. В связи с этим многие авторы исследовали свойства множества достижимости [1–3], а также различные приближенные методы его построения: метод эллипсоидов для линейных систем [4], асимптотические методы [5, 6], численные методы [7, 8].

Рассмотрим использование систем дифференциальных уравнений с производной Хукухары для построения аппроксимации пучка решений включения (1).

Запишем дифференциальное уравнение с производной Хукухары [9], соответствующее дифференциальному включению (1):

$$D_h X(t) = A(t)X(t) + F(t), \quad X(0) = X_0, \tag{3}$$

где решение $X : [0,T] \to \operatorname{conv}(R^n)$ — непрерывно дифференцируемое по Хукухаре многозначное отображение.

В работе [2] доказана следующая оценка:

$$R(t) \subset X(t), \tag{4}$$

где $R(t)$ — множество достижимости системы (1).

При практическом построении данной аппроксимации пучка решений включения (1) в случае $n > 2$ появляются принципиальные вычислительные трудности при нахождении решения уравнения (3).

Представим матрицу $A(t)$ в виде

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) & \dots & A_{1m}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) & \dots & A_{2m}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}(t) & A_{m2}(t) & \dots & A_{mm}(t) \end{pmatrix}, \quad A_{ij}(t) \in R^{n_i \times n_j}, \quad \sum_{i=1}^{m} n_i = n. \tag{5}$$

Уравнению (3) поставим в соответствие систему линейных уравнений с производной Хукухары

$$D_h X_i(t) = \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(t) X_j(t) + F_i(t), \quad X_i(0) = X_i^0 \in \operatorname{conv}(R^{n_i}), \quad i = \overline{1, m}, \tag{6}$$

где $F(t) \subset \overline{F}(t) = F_1(t) \dots F_m(t)$, $F_i : [0, T] \to \operatorname{conv}(R^{n_i})$ — непрерывные многозначные отображения, $X_0 \subset X_1^0 \dots X_m^0$, функции $X_i : [0, T] \to \operatorname{conv}(R^{n_i})$ непрерывно дифференцируемы по Хукухаре.

Введем в рассмотрение множество $\overline{X}(t) = X_1(t) \dots X_m(t)$.

Теорема 1. *Для уравнений (3), (6) справедливо включение $X(t) \subset \overline{X}(t)$ для любого $t \in [0, T]$.*

Доказательство. Множества $X(t)$ и $\overline{X}(t)$ являются выпуклыми компактами в R^n, поэтому достаточно показать, что $c(X(t), \psi) \le c(\overline{X}(t), \psi)$ для всех $\psi \in R^n$, где $c(X, \psi)$ — опорная функция множества X [10].

Разобьем сегмент $[0, T]$ точками $t_k = \dfrac{kT}{N}$, $k = \overline{0, N}$. Рассмотрим семейство ломаных Эйлера для (3), (6):

$$X^N(t_{k+1}) = X^N(t_k) + h[A(t_k) X^N(t_k) + F(t_k)], \quad X^N(0) = X_0, \tag{7}$$

$$X_i^N(t_{k+1}) = X_i^N(t_k) + h\left[\sum_{j=1}^{m} A_{ij}(t_k) X_j^N(t_k) + F_i(t_k)\right], \quad X_i^N(0) = X_i^0, \quad i = \overline{1, m}, \tag{8}$$

$$k = \overline{0, N-1}.$$

Пусть $\overline{X}^N(t) = X_1^N(t) \dots X_m^N(t)$. Поскольку $X^N(0) \subset \overline{X}^N(0)$, в силу свойств опорных функций $c(X^N(0), \psi) \le c(\overline{X}^N(0), \psi)$ для всех $\psi \in R^n$. Предположим, что неравенство $c(X^N(t_k), \psi) \le c(\overline{X}^N(t_k), \psi)$ выполняется для всех $\psi \in R^n$. Пусть $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix}$, $\psi_i \in R^{n_i}$, тогда

$c(X^N(t_{k+1}), \psi) = c(X^N(t_k) + hA(t_k)X^N(t_k) + hF(t_k), \psi) =$

$$= c(X^N(t_k),\psi) + hc(X^N(t_k), A^T(t_k)\psi) + hc(F(t_k),\psi) \le$$

$$\le c(\overline{X}^N(t_k),\psi) + hc(\overline{X}^N(t_k), A^T(t_k)\psi) + hc(\overline{F}(t_k),\psi) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left[c(X_i^N(t_k),\psi_i) + hc\left(X_i^N(t_k), \left(A^T(t_k)\psi\right)_i\right) + hc(F_i(t_k),\psi_i)\right] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \left(A^T(t_k)\psi\right)_i = \left(\begin{pmatrix} A_{11}^T(t_k) & A_{21}^T(t_k) & \dots & A_{m1}^T(t_k) \\ A_{12}^T(t_k) & A_{22}^T(t_k) & \dots & A_{m2}^T(t_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1m}^T(t_k) & A_{2m}^T(t_k) & \dots & A_{mm}^T(t_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix}\right)_i = \\ = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m} A_{j1}^T(t_k)\psi_j \\ \sum\limits_{j=1}^{m} A_{j2}^T(t_k)\psi_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m} A_{jm}^T(t_k)\psi_j \end{pmatrix}_i = \sum_{j=1}^{m} A_{ji}^T(t_k)\psi_j \end{array} \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left[c(X_i^N(t_k),\psi_i) + hc\left(X_i^N(t_k), \sum_{j=1}^{m} A_{ji}^T(t_k)\psi_j\right) + hc(F_i(t_k),\psi_i)\right] \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{m}\left[c(X_i^N(t_k),\psi_i) + h\sum_{j=1}^{m} c(X_i^N(t_k), A_{ji}^T(t_k)\psi_j) + hc(F_i(t_k),\psi_i)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c(X_i^N(t_k),\psi_i) + h\sum_{i=1}^{m} c(F_i(t_k),\psi_i) + h\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c(X_i^N(t_k), A_{ji}^T(t_k)\psi_j). \qquad (9)$$

Найдем опорную функцию множества $\overline{X}^N(t_{k+1})$:

$$c(\overline{X}^N(t_{k+1}),\psi) = \sum_{i=1}^{m} c(X_i^N(t_{k+1}),\psi_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c\left(X_i^N(t_k) + h\sum_{j=1}^{m} A_{ij}(t_k)X_j^N(t_k) + hF_i(t_k), \psi_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left[c(X_i^N(t_k),\psi_i) + h\sum_{j=1}^{m} c(X_j^N(t_k), A_{ij}^T(t_k)\psi_i) + hc(F_i(t_k),\psi_i)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c(X_i^N(t_k),\psi_i) + h\sum_{i=1}^{m} c(F_i(t_k),\psi_i) + h\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c(X_j^N(t_k), A_{ij}^T(t_k)\psi_i). \qquad (10)$$

С учетом (9) и (10) получим $c(X^N(t_{k+1}),\psi) \le c(\overline{X}^N(t_{k+1}),\psi)$ для всех $\psi \in R^n$. Ломаные Эйлера (7), (8) при $N \to \infty$ сходятся к решениям (3), (6) соответственно [11]. Следовательно, переходя к пределу и используя свойство непрерывности опорных функций, получаем $c(X(t),\psi) \le c(\overline{X}(t),\psi)$ для всех $\psi \in R^n$. Таким образом, $X(t) \subset \overline{X}(t)$ для всех $t \in [0,T]$.

Теорема доказана.

Изучим вопрос об изменении множества $\overline{X}(t)$ при дальнейшем разбиении матрицы. Предположим, что ν-я матричная строка и ν-й матричный столбец матрицы $A(t)$, $\nu \in \overline{1,m}$, разбиты на следующие матрицы:

$$A_{\nu\nu}(t) = \begin{pmatrix} A^{11}_{\nu\nu}(t) & A^{12}_{\nu\nu}(t) & \dots & A^{1s}_{\nu\nu}(t) \\ A^{21}_{\nu\nu}(t) & A^{22}_{\nu\nu}(t) & \dots & A^{2s}_{\nu\nu}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{s1}_{\nu\nu}(t) & A^{s2}_{\nu\nu}(t) & \dots & A^{ss}_{\nu\nu}(t) \end{pmatrix}, \qquad A^{pq}_{\nu\nu}(t) \in R^{l_p \times l_q},\ \sum_{p=1}^{s} l_p = n_\nu,$$

$$A_{i\nu}(t) = \begin{pmatrix} A^1_{i\nu}(t) & A^2_{i\nu}(t) & \dots & A^s_{i\nu}(t) \end{pmatrix}, \qquad A^p_{i\nu}(t) \in R^{n_i \times l_p},\ i = \overline{1,m},\ i \ne \nu, \tag{11}$$

$$A_{\nu i}(t) = \begin{pmatrix} A^1_{\nu i}(t) \\ A^2_{\nu i}(t) \\ \vdots \\ A^s_{\nu i}(t) \end{pmatrix}, \qquad A^p_{\nu i}(t) \in R^{l_p \times n_i},\ i = \overline{1,m},\ i \ne \nu.$$

Наряду с системой (6) рассмотрим систему

$$\begin{gathered} D_h \tilde{X}_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne\nu}}^{m} A_{ij}(t)\tilde{X}_j(t) + \sum_{p=1}^{s} A^p_{i\nu}(t) X_{\nu p}(t) + \tilde{F}_i(t), \\ \tilde{X}_i(0) = X^0_i, \quad i = \overline{1,m}, \quad i \ne \nu, \\ D_h X_{\nu q}(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne\nu}}^{m} A^q_{\nu j}(t)\tilde{X}_j(t) + \sum_{p=1}^{s} A^{qp}_{\nu\nu}(t) X_{\nu p}(t) + F_{\nu q}(t), \\ X_{\nu q}(0) = X^0_{\nu q}, \quad q = \overline{1,s}, \end{gathered} \tag{12}$$

где $F_i(t) = \tilde{F}_i(t)$, $i \ne \nu$, $F_\nu(t) \subset \tilde{F}_\nu(t) = F_{\nu 1}(t)\dots F_{\nu s}(t)$, $F_{\nu q} : [0,T] \to \mathrm{conv}(R^{l_q})$ — непрерывные многозначные отображения, $X^0_\nu \in \tilde{X}^0_\nu = X^0_{\nu 1}\dots X^0_{\nu s}$, $\tilde{X}_i : [0,T] \to \mathrm{conv}(R^{n_i})$, $i \ne \nu$, и $X_{\nu q} : [0,T] \to \mathrm{conv}(R^{l_q})$, $q = \overline{1,s}$, — непрерывно дифференцируемые по Хукухаре многозначные отображения.

Введем в рассмотрение множество

$$\tilde{X}(t) = \tilde{X}_1(t)\dots\tilde{X}_{\nu-1}(t) X_{\nu 1}(t)\dots X_{\nu s}(t)\tilde{X}_{\nu+1}(t)\dots\tilde{X}_m(t).$$

Теорема 2. *Для систем (6), (12) справедливо включение* $\overline{X}(t) \subset \tilde{X}(t)$ *для любого* $t \in [0,T]$.

Доказательство. Множества $\overline{X}(t)$ и $\tilde{X}(t)$ являются выпуклыми компактами в R^n, поэтому достаточно показать, что $c(\overline{X}(t),\psi) \le c(\tilde{X}(t),\psi)$ для всех $\psi \in R^n$.

Разобьем сегмент $[0,T]$ точками $t_k = \dfrac{kT}{N}$, $k = \overline{0,N}$. Рассмотрим семейство ломаных Эйлера для (6), (12): равенства (8) и

$$
\begin{gathered}
\tilde{X}_i^N(t_{k+1}) = \tilde{X}_i^N(t_k) + h\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\ne\nu}}^{m} A_{ij}(t_k)\tilde{X}_j^N(t_k) + \sum_{p=1}^{s} A_{i\nu}^{p}(t_k)X_{\nu p}^N(t_k) + \tilde{F}_i(t_k)\right],\\
\tilde{X}_i^N(0) = X_i^0, \quad i = \overline{1,m}, \quad i \ne \nu,\\
X_{\nu q}^N(t_{k+1}) = X_{\nu q}^N(t_k) + h\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\ne\nu}}^{m} A_{\nu j}^{q}(t_k)\tilde{X}_j^N(t) + \sum_{p=1}^{s} A_{\nu\nu}^{qp}(t_k)X_{\nu p}^N(t_k) + F_{\nu q}(t_k)\right],\\
X_{\nu q}^N(0) = X_{\nu q}^0, \quad q = \overline{1,s}, \quad k = \overline{0,N-1}.
\end{gathered} \tag{13}
$$

Пусть $\tilde{X}^N(t) = \tilde{X}_1^N(t)\ldots\tilde{X}_{\nu-1}^N(t)X_{\nu 1}^N(t)\ldots X_{\nu s}^N(t)\tilde{X}_{\nu+1}^N(t)\ldots\tilde{X}_m^N(t)$. Поскольку $\overline{X}^N(0) \subset \subset \tilde{X}^N(0)$, то $c(\overline{X}^N(0),\psi) \le c(\tilde{X}^N(0),\psi)$ для всех векторов $\psi \in R^n$. Предположим, что неравенство $c(\overline{X}^N(t_k),\psi) \le c(\tilde{X}^N(t_k),\psi)$ выполняется для всех $\psi \in R^n$. Тогда в силу (10)

$$
\begin{aligned}
c(\overline{X}^N(t_{k+1}),\psi) &= \sum_{i=1}^{m} c(X_i^N(t_k),\psi_i) + h\sum_{i=1}^{m} c(F_i(t_k),\psi_i) + h\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c(X_j^N(t_k),A_{ij}^T(t_k)\psi_i) \le\\
&\le \sum_{i=1}^{m} c(\tilde{X}_i^N(t_k),\psi_i) + h\sum_{i=1}^{m} c(\tilde{F}_i(t_k),\psi_i) + h\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c(\tilde{X}_j^N(t_k),A_{ij}^T(t_k)\psi_i) =\\
&= \sum_{\substack{i=1\\ i\ne\nu}}^{m} c(\tilde{X}_i^N(t_k),\psi_i) + c(\tilde{X}_\nu^N(t_k),\psi_\nu) + h\sum_{\substack{i=1\\ i\ne\nu}}^{m} c(F_i(t_k),\psi_i) + hc(\tilde{F}_\nu(t_k),\psi_\nu) +\\
&\quad + h\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\ne\nu}}^{m} c(\tilde{X}_j^N(t_k),A_{ij}^T(t_k)\psi_i) + c(\tilde{X}_\nu^N(t_k),A_{i\nu}^T(t_k)\psi_i)\right) =\\
&= \left\{\psi_\nu = \begin{pmatrix}\psi_{\nu 1}\\ \vdots\\ \psi_{\nu s}\end{pmatrix},\ \psi_{\nu q} \in R^{l_q}\right\} = \sum_{\substack{i=1\\ i\ne\nu}}^{m} c(\tilde{X}_i^N(t_k),\psi_i) + \sum_{p=1}^{s} c(X_{\nu p}^N(t_k),\psi_{\nu p}) +\\
&\quad + h\sum_{\substack{i=1\\ i\ne\nu}}^{m} c(F_i(t_k),\psi_i) + h\sum_{p=1}^{s} c(F_{\nu p}(t_k),\psi_{\nu p}) + h\sum_{\substack{i=1\\ i\ne\nu}}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne\nu}}^{m} c(\tilde{X}_j^N(t_k),A_{ij}^T(t_k)\psi_i) +
\end{aligned}
$$

$$+ h \sum_{i=1}^{m} c(\tilde{X}_\nu^N(t_k), A_{i\nu}^T(t_k)\psi_i) + h \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} c(\tilde{X}_j^N(t_k), A_{\nu j}^T(t_k)\psi_\nu) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m} c(\tilde{X}_i^N(t_k), \psi_i) + \sum_{p=1}^{s} c(X_{\nu p}^N(t_k), \psi_{\nu p}) + h \sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m} c(F_i(t_k), \psi_i) +$$

$$+ h \sum_{p=1}^{s} c(F_{\nu p}(t_k), \psi_{\nu p}) + h \sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} c(\tilde{X}_j^N(t_k), A_{ij}^T(t_k)\psi_i) +$$

$$+ h \sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m} \sum_{p=1}^{s} c\left(X_{\nu p}^N(t_k), \left(A_{i\nu}^T(t_k)\psi_i\right)_p\right) + h \sum_{p=1}^{s} c\left(X_{\nu p}^N(t_k), \left(A_{\nu\nu}^T(t_k)\psi_\nu\right)_p\right) +$$

$$+ h \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} c\left(\tilde{X}_j^N(t_k), \sum_{p=1}^{s} (A_{\nu j}^p(t_k))^T \psi_{\nu p}\right) =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} &\left(A_{i\nu}^T(t_k)\psi_i\right)_p = \left(\begin{pmatrix} \left(A_{i\nu}^1(t_k)\right)^T \\ \left(A_{i\nu}^2(t_k)\right)^T \\ \vdots \\ \left(A_{i\nu}^s(t_k)\right)^T \end{pmatrix} \psi_i\right)_p = \\ &= \left(\begin{pmatrix} \left(A_{i\nu}^1(t_k)\right)^T \psi_i \\ \left(A_{i\nu}^2(t_k)\right)^T \psi_i \\ \vdots \\ \left(A_{i\nu}^s(t_k)\right)^T \psi_i \end{pmatrix}\right)_p = \left(A_{i\nu}^p(t_k)\right)^T \psi_i, \\ &\left(A_{\nu\nu}^T(t_k)\psi_\nu\right)_p = \left(\begin{pmatrix} \left(A_{\nu\nu}^{11}(t_k)\right)^T & \dots & \left(A_{\nu\nu}^{s1}(t_k)\right)^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(A_{\nu\nu}^{1s}(t_k)\right)^T & \dots & \left(A_{\nu\nu}^{ss}(t_k)\right)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{\nu 1} \\ \vdots \\ \psi_{\nu s} \end{pmatrix}\right)_p = \\ &= \begin{pmatrix} \sum\limits_{q=1}^{s} \left(A_{\nu\nu}^{q1}(t_k)\right)^T \psi_{\nu q} \\ \vdots \\ \sum\limits_{q=1}^{s} \left(A_{\nu\nu}^{qs}(t_k)\right)^T \psi_{\nu q} \end{pmatrix}_p = \sum_{q=1}^{s} \left(A_{\nu\nu}^{qp}(t_k)\right)^T \psi_{\nu q} \end{aligned} \right\} =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m} c(\tilde{X}_i^N(t_k), \psi_i) + \sum_{p=1}^{s} c(X_{\nu p}^N(t_k), \psi_{\nu p}) + h \sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m} c(F_i(t_k), \psi_i) +$$

$$+\, h\sum_{p=1}^{s} c(F_{\nu p}(t_k),\psi_{\nu p}) + h\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} c(\tilde X_j^N(t_k), A_{ij}^T(t_k)\psi_i) +$$

$$+\, h\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m}\sum_{p=1}^{s} c\left(X_{\nu p}^N(t_k), (A_{i\nu}^p(t_k))^T\,\psi_i\right) + h\sum_{p=1}^{s} c\left(X_{\nu p}^N(t_k), \sum_{q=1}^{s}(A_{\nu\nu}^{qp}(t_k))^T\psi_{\nu q}\right) +$$

$$+\, h\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} c\left(\tilde X_j^N(t_k), \sum_{p=1}^{s}(A_{\nu j}^p(t_k))^T\psi_{\nu p}\right) \le \sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m} c(\tilde X_i^N(t_k),\psi_i) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{s} c(X_{\nu p}^N(t_k),\psi_{\nu p}) + h\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m} c(F_i(t_k),\psi_i) + h\sum_{p=1}^{s} c(F_{\nu p}(t_k),\psi_{\nu p}) +$$

$$+\, h\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} c(\tilde X_j^N(t_k), A_{ij}^T(t_k)\psi_i) + h\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m}\sum_{p=1}^{s} c\left(X_{\nu p}^N(t_k), (A_{i\nu}^p(t_k))^T\,\psi_i\right) +$$

$$+\, h\sum_{p=1}^{s}\sum_{q=1}^{s} c\left(X_{\nu p}^N(t_k), (A_{\nu\nu}^{qp}(t_k))^T\psi_{\nu q}\right) + h\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m}\sum_{p=1}^{s} c\left(\tilde X_j^N(t_k), (A_{\nu j}^p(t_k))^T\psi_{\nu p}\right). \tag{14}$$

Найдем опорную функцию множества $\tilde X^N(t_{k+1})$:

$$c(\tilde X^N(t_{k+1}),\psi) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m} c(\tilde X_i^N(t_{k+1}),\psi_i) + \sum_{q=1}^{s} c(X_{\nu q}^N(t_{k+1}),\psi_{\nu q}) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m}\Bigg[c(\tilde X_i^N(t_k),\psi_i) + h\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} c(\tilde X_j^N(t_k), A_{ij}^T(t_k)\psi_i) +$$

$$+\, h\sum_{p=1}^{s} c\left(X_{\nu p}^N(t_k), (A_{i\nu}^p(t_k))^T\psi_i\right) + hc(F_i(t_k),\psi_i)\Bigg] +$$

$$+ \sum_{q=1}^{s}\Bigg[c(X_{\nu q}^N(t_k),\psi_{\nu q}) + h\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} c\left(\tilde X_j^N(t), (A_{\nu j}^q(t_k))^T\psi_{\nu q}\right) +$$

$$+\, h\sum_{p=1}^{s} c(X_{\nu p}^N(t_k), (A_{\nu\nu}^{qp}(t_k))^T\psi_{\nu q}) + hc(F_{\nu q}(t_k),\psi_{\nu q})\Bigg] = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m} c(\tilde X_i^N(t_k),\psi_i) +$$

$$+ h\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} c(\tilde{X}_j^N(t_k), A_{ij}^T(t_k)\psi_i) + h\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m}\sum_{p=1}^{s} c\left(X_{\nu p}^N(t_k), (A_{i\nu}^p(t_k))^T\,\psi_i\right) +$$

$$+ h\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m} c(F_i(t_k), \psi_i) + \sum_{p=1}^{s} c(X_{\nu p}^N(t_k), \psi_{\nu p}) +$$

$$+ h\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m}\sum_{p=1}^{s} c\left(\tilde{X}_j^N(t_k), (A_{\nu j}^p(t_k))^T\psi_{\nu p}\right) +$$

$$+ h\sum_{p=1}^{s}\sum_{q=1}^{s} c\left(X_{\nu p}^N(t_k), (A_{\nu\nu}^{qp}(t_k))^T\psi_{\nu q}\right) + h\sum_{p=1}^{s} c(F_{\nu p}(t_k), \psi_{\nu p}). \tag{15}$$

С учетом (14) и (15) имеем $c(\overline{X}^N(t_{k+1}), \psi) \le c(\tilde{X}^N(t_{k+1}), \psi)$ для всех $\psi \in R^n$. Ломаные Эйлера (8), (13) при $N \to \infty$ сходятся к решениям (6), (12) соответственно [11]. Следовательно, переходя к пределу и используя свойство непрерывности опорных функций, получаем $c(\overline{X}(t), \psi) \le c(\tilde{X}(t), \psi)$ для всех $\psi \in R^n$. Таким образом, для всех $t \in [0, T]$ справедливо включение $\overline{X}(t) \subset \tilde{X}(t)$.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть Δ_1 и Δ_2 — разбиения матрицы $A(t)$ для уравнения (3), причем Δ_2 может быть получено из Δ_1 путем дальнейшего разбиения. Пусть $\overline{X}_{\Delta_1}(t)$ и $\overline{X}_{\Delta_2}(t)$ — решения систем вида (6), соответствующие данным разбиениям. Тогда $\overline{X}_{\Delta_1}(t) \subset \subset \overline{X}_{\Delta_2}(t)$ для всех $t \in [0, T]$.*

Следствие 2. *Пусть $Y_m(t)$ — пересечение всех множеств $\overline{X}(t)$ — решений систем вида (6) при всевозможных разбиениях матрицы $A(t)$ на матрицы $A_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, m}$. Тогда в силу теорем 1 и 2*

$$X(t) = Y_1(t) \subset Y_2(t) \subset \ldots \subset Y_n(t) \quad \textit{для всех} \quad t \in [0, T].$$

Замечание 1. В случае $m = n$ систему (6) можно упростить. Пусть

$$X_i(t) = x_i(t) + y_i(t)[-1, 1], \quad F_i(t) = f_i(t) + g_i(t)[-1, 1],$$

тогда система (6) представима в виде

$$D_h\{x_i(t) + y_i(t)[-1, 1]\} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\{x_j(t) + y_j(t)[-1, 1]\} + f_i(t) + g_i(t)[-1, 1],$$

$$x_i(0) + y_i(0)[-1, 1] = x_i^0 + y_i^0[-1, 1], \quad i = \overline{1, n}.$$

По определению производная Хукухары

$$D_h\{x_i(t)+y_i(t)[-1,1]\} =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\{[x_i(t+\Delta)-y_i(t+\Delta), x_i(t+\Delta)+y_i(t+\Delta)]-[x_i(t)-y_i(t), x_i(t)+y_i(t)]\} =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[x_i(t+\Delta)-y_i(t+\Delta)-(x_i(t)-y_i(t)), x_i(t+\Delta)+y_i(t+\Delta)-(x_i(t)+y_i(t))] =$$

$$= \left[\lim_{\Delta\to 0}\frac{x_i(t+\Delta)-x_i(t)-(y_i(t+\Delta)-y_i(t))}{\Delta}, \lim_{\Delta\to 0}\frac{x_i(t+\Delta)-x_i(t)+(y_i(t+\Delta)-y_i(t))}{\Delta}\right] =$$

$$= [(x_i(t)-y_i(t))', (x_i(t)+y_i(t))'] = \dot{x}_i(t)+\dot{y}_i(t)[-1,1].$$

Таким образом, система (6) распадается на две линейные неоднородные системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t)+f_i(t), \\ x_i(0) = x_i^0,\ i=\overline{1,n}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y}_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)|y_j(t)+g_i(t), \\ y_i(0) = y_i^0,\ i=\overline{1,n}, \end{cases}$$

решения которых записываются в явном виде.

Естественным является вопрос построения аппроксимации пучка решений для линейных импульсных дифференциальных включений [6, 12].

Предположим, что система, описываемая включением (1), подвергается импульсным воздействиям в фиксированные моменты времени, т. е. рассмотрим на сегменте $[0,T]$ линейное импульсное дифференциальное включение

$$\begin{aligned} &\dot{x} \in A(t)x+F(t), \quad t\neq\tau_k, \\ &x(\tau_k+0)\in B_k x(\tau_k)+P_k, \\ &x(0)\in X_0, \quad k=\overline{1,K}, \end{aligned} \tag{16}$$

где B_k — $(n\times n)$-матрицы, $P_k \in \mathrm{conv}(R^n)$, моменты импульсов $0\le\tau_1<\ldots<\tau_K<T$.

Запишем уравнение с производной Хукухары, соответствующее импульсному дифференциальному включению (16):

$$\begin{aligned} &D_h X(t) = A(t)X(t)+F(t), \quad t\neq\tau_k, \\ &X(\tau_k+0) = B_k X(\tau_k)+P_k, \\ &X(0) = X_0, \quad k=\overline{1,K}, \end{aligned} \tag{17}$$

где решение $X:[0,T]\to\mathrm{conv}(R^n)$ — кусочно непрерывно дифференцируемое по Хукухаре многозначное отображение.

Пусть матрица $A(t)$ представима в виде (5), матрицы B_k, $k = \overline{1, K}$, имеют вид

$$B_k = \begin{pmatrix} B_{11}^k & B_{12}^k & \dots & B_{1m}^k \\ B_{21}^k & B_{22}^k & \dots & B_{2m}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1}^k & B_{m2}^k & \dots & B_{mm}^k \end{pmatrix}, \qquad B_{ij}^k \in R^{n_i \times n_j}.$$

Уравнению (17) поставим в соответствие систему линейных импульсных дифференциальных уравнений с производной Хукухары

$$D_h X_i(t) = \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(t) X_j(t) + F_i(t), \quad t \neq \tau_k,$$

$$X_i(\tau_k + 0) = \sum_{j=1}^{m} B_{ij}^k X_j(\tau_k) + P_i^k, \tag{18}$$

$$X_i(0) = X_i^0 \in \operatorname{conv}(R^{n_i}), \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, K},$$

где $P_k \subset \overline{P}_k = P_1^k \dots P_m^k$, $P_i^k \in \operatorname{conv}(R^{n_i})$, функции $X_i : [0, T] \to \operatorname{conv}(R^{n_i})$ кусочно непрерывно дифференцируемы по Хукухаре.

Введем в рассмотрение множество $\overline{X}(t) = X_1(t) \dots X_m(t)$.

Теорема 3. *Для уравнений (16) – (18) при любом $t \in [0, T]$ справедливо включение $R(t) \subset X(t) \subset \overline{X}(t)$, где $R(t)$ — множество достижимости (16).*

Доказательство. Обозначим $\tau_0 = 0$, $\tau_{K+1} = T$. Пусть для некоторого $k \in \overline{1, K+1}$ справедливо включение $R(\tau_{k-1} + 0) \subset X(\tau_{k-1} + 0) \subset \overline{X}(\tau_{k-1} + 0)$. В силу теоремы 1 и включения (4) $R(t) \subset X(t) \subset \overline{X}(t)$ для всех $\tau_{k-1} < t \leq \tau_k$.

Покажем, что $R(\tau_k + 0) \subset X(\tau_k + 0) \subset \overline{X}(\tau_k + 0)$, $k \in \overline{1, K}$. Первая часть включения следует непосредственно из (16) и (17). Докажем второе включение. В силу выпуклости множеств $X(\tau_k + 0)$ и $\overline{X}(\tau_k + 0)$ достаточно показать, что $c(X(\tau_k + 0), \psi) \leq c(\overline{X}(\tau_k + 0), \psi)$ для всех $\psi \in R^n$. Из уравнений (17), (18) получаем

$$c(X(\tau_k + 0), \psi) = c(B_k X(\tau_k) + P_k, \psi) = c(X(\tau_k), B_k^T \psi) + c(P_k, \psi) \leq$$

$$\leq c(\overline{X}(\tau_k), B_k^T \psi) + c(\overline{P}_k, \psi) = \sum_{i=1}^{m} c(X_i(\tau_k), \left(B_k^T \psi\right)_i) + \sum_{i=1}^{m} c(P_i^k, \psi_i) =$$

$$= \left\{ \left(B_k^T \psi\right)_i = \left(\begin{pmatrix} (B_{11}^k)^T & (B_{21}^k)^T & \dots & (B_{m1}^k)^T \\ (B_{12}^k)^T & (B_{22}^k)^T & \dots & (B_{m2}^k)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (B_{1m}^k)^T & (B_{2m}^k)^T & \dots & (B_{mm}^k)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix} \right)_i = \right.$$

$$= \left. \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m} (B_{j1}^{k})^T \psi_j \\ \sum\limits_{j=1}^{m} (B_{j2}^{k})^T \psi_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m} (B_{jm}^{k})^T \psi_j \end{pmatrix}_i = \sum_{j=1}^{m} (B_{ji}^{k})^T \psi_j \right\} = \sum_{i=1}^{m} c\left(X_i(\tau_k), \sum_{j=1}^{m} (B_{ji}^{k})^T \psi_j \right) + \sum_{i=1}^{m} c(P_i^k, \psi_i) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c\left(X_i(\tau_k), (B_{ji}^{k})^T \psi_j \right) + \sum_{i=1}^{m} c(P_i^k, \psi_i), \tag{19}$$

$$c(\overline{X}(\tau_k+0), \psi) = \sum_{i=1}^{m} c(X_i(\tau_k+0), \psi_i) = \sum_{i=1}^{m} c\left(\sum_{j=1}^{m} B_{ij}^{k} X_j(\tau_k) + P_i^k, \psi_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c\left(X_j(\tau_k), (B_{ij}^{k})^T \psi_i \right) + \sum_{i=1}^{n} c(P_i^k, \psi_i). \tag{20}$$

С учетом (19) и (20) имеем $c(X(\tau_k+0), \psi) \le c(\overline{X}(\tau_k+0), \psi)$ для всех $\psi \in R^n$, а значит, $X(\tau_k+0) \subset \overline{X}(\tau_k+0)$. Следовательно, теорема доказана.

Изучим вопрос об изменении множества $\overline{X}(t)$ при дальнейшем разбиении матрицы. Предположим, что ν-я матричная строка и ν-й матричный столбец матрицы $A(t)$, $\nu \in$ $\in \overline{1,m}$, разбиты, как в (11), ν-е матричные строки и ν-е матричные столбцы матриц B_k разбиты на следующие матрицы:

$$B_{\nu\nu}^{k} = \begin{pmatrix} B_{\nu\nu}^{k_{11}} & B_{\nu\nu}^{k_{12}} & \dots & B_{\nu\nu}^{k_{1s}} \\ B_{\nu\nu}^{k_{21}} & B_{\nu\nu}^{k_{22}} & \dots & B_{\nu\nu}^{k_{2s}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{\nu\nu}^{k_{s1}} & B_{\nu\nu}^{k_{s2}} & \dots & B_{\nu\nu}^{k_{ss}} \end{pmatrix}, \quad B_{\nu\nu}^{k_{pq}} \in R^{l_p \times l_q}, \ \sum_{p=1}^{s} l_p = n_\nu,$$

$$B_{i\nu}^{k} = \begin{pmatrix} B_{i\nu}^{k1} & B_{i\nu}^{k2} & \dots & B_{i\nu}^{ks} \end{pmatrix}, \quad B_{i\nu}^{kp} \in R^{n_i \times l_p}, \ i = \overline{1,m}, \ i \ne \nu, \tag{21}$$

$$B_{\nu i}^{k} = \begin{pmatrix} B_{\nu i}^{k1} \\ B_{\nu i}^{k2} \\ \vdots \\ B_{\nu i}^{ks} \end{pmatrix}, \quad B_{\nu i}^{kp} \in R^{l_p \times n_i}, \ i = \overline{1,m}, \ i \ne \nu.$$

Наряду с системой (6) рассмотрим систему

$$D_h \tilde{X}_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne \nu}}^{m} A_{ij}(t) \tilde{X}_j(t) + \sum_{p=1}^{s} A_{i\nu}^{p}(t) X_{\nu p}(t) + \tilde{F}_i(t), \quad t \ne \tau_k,$$

$$\tilde{X}_i(\tau_k+0) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} B_{ij}^k \tilde{X}_j(\tau_k) + \sum_{p=1}^{s} B_{i\nu}^{kp} X_{\nu p}(\tau_k) + \tilde{P}_i^k,$$

$$\tilde{X}_i(0) = X_i^0, \quad i = \overline{1,m}, \quad i \neq \nu,$$

$$D_h X_{\nu q}(t) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} A_{\nu j}^q(t)\tilde{X}_j(t) + \sum_{p=1}^{s} A_{\nu\nu}^{qp}(t) X_{\nu p}(t) + F_{\nu q}(t), \tag{22}$$

$$X_{\nu q}(\tau_k+0) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} B_{\nu j}^{kq}\tilde{X}_j(\tau_k) + \sum_{p=1}^{s} B_{\nu\nu}^{k_{qp}} X_{\nu p}(\tau_k) + P_{\nu q}^k,$$

$$X_{\nu q}(0) = X_{\nu q}^0, \quad q = \overline{1,s}, \quad k = \overline{1,K},$$

где $P_i^k = \tilde{P}_i^k$, $i \neq \nu$, $P_\nu^k \subset \tilde{P}_\nu^k = P_{\nu 1}^k \ldots P_{\nu s}^k$, $P_{\nu q}^k \in \mathrm{conv}(R^{l_q})$, $X_\nu^0 \in \tilde{X}_\nu^0 = X_{\nu 1}^0 \ldots X_{\nu s}^0$, $\tilde{X}_i : [0,T] \to \mathrm{conv}(R^{n_i})$, $i \neq \nu$, и $X_{\nu q} : [0,T] \to \mathrm{conv}(R^{l_q})$, $q = \overline{1,s}$, — кусочно непрерывно дифференцируемые по Хукухаре многозначные отображения.

Введем в рассмотрение множество

$$\tilde{X}(t) = \tilde{X}_1(t)\ldots\tilde{X}_{\nu-1}(t)X_{\nu 1}(t)\ldots X_{\nu s}(t)\tilde{X}_{\nu+1}(t)\ldots\tilde{X}_m(t).$$

Теорема 4. *Для систем (18), (23) справедливо включение* $\overline{X}(t) \subset \tilde{X}(t)$ *для любого* $t \in [0,T]$.

Доказательство. Обозначим $\tau_0 = 0$, $\tau_{K+1} = T$. Пусть для некоторого $k \in \overline{1,K+1}$ справедливо включение $\overline{X}(\tau_{k-1}+0) \subset \tilde{X}(\tau_{k-1}+0)$. В силу теоремы 2 для всех $\tau_{k-1} < t \leq$ $\leq \tau_k$ имеем $\overline{X}(t) \subset \tilde{X}(t)$. Покажем, что $\overline{X}(\tau_k+0) \subset \tilde{X}(\tau_k+0)$, $k \in \overline{1,K}$. В силу выпуклости множеств $\overline{X}(\tau_k+0)$ и $\tilde{X}(\tau_k+0)$ достаточно показать, что для всех $\psi \in R^n$ выполняется неравенство $c(\overline{X}(\tau_k+0),\psi) \leq c(\tilde{X}(\tau_k+0),\psi)$. Из уравнений (18), (23) с учетом (20) получаем

$$c(\overline{X}(\tau_k+0),\psi) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c\left(X_j(\tau_k),(B_{ij}^k)^T\psi_i\right) + \sum_{i=1}^{m} c(P_i^k,\psi_i) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c\left(\tilde{X}_j(\tau_k),(B_{ij}^k)^T\psi_i\right) + \sum_{i=1}^{m} c(\tilde{P}_i^k,\psi_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} c\left(\tilde{X}_j(\tau_k),(B_{ij}^k)^T\psi_i\right) + c\left(\tilde{X}_\nu(\tau_k),(B_{i\nu}^k)^T\psi_i\right)\right] + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m} c(P_i^k,\psi_i) +$$

$$+ c(\tilde{P}_\nu^k,\psi_\nu) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} c\left(\tilde{X}_j(\tau_k),(B_{ij}^k)^T\psi_i\right) + \sum_{i=1}^{m} c\left(\tilde{X}_\nu(\tau_k),(B_{i\nu}^k)^T\psi_i\right) +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} c\left(\tilde{X}_j(\tau_k),(B^k_{\nu j})^T\psi_\nu\right)+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m} c(P^k_i,\psi_i)+\sum_{p=1}^{s} c(P^k_{\nu p},\psi_{\nu p})=$$

$$=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} c(\tilde{X}_j(\tau_k),(B^k_{ij})^T\psi_i)+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m}\sum_{p=1}^{s} c\left(X_{\nu p}(\tau_k),\left((B^k_{i\nu})^T\psi_i\right)_p\right)+$$

$$+\sum_{p=1}^{s} c\left(X_{\nu p}(\tau_k),\left((B^k_{\nu\nu})^T\psi_\nu\right)_p\right)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} c\left(\tilde{X}_j(\tau_k),(B^k_{\nu j})^T\psi_\nu\right)+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m} c(P^k_i,\psi_i)+$$

$$+\sum_{p=1}^{s} c(P^k_{\nu p},\psi_{\nu p})=\left\{\begin{array}{l}\left((B^k_{i\nu})^T\psi_i\right)_p=\left(\begin{pmatrix}(B^{k1}_{i\nu})^T\\ \vdots\\ (B^{ks}_{i\nu})^T\end{pmatrix}\psi_i\right)_p=(B^{kp}_{i\nu})^T\psi_i;\end{array}\right.$$

$$(B^k_{\nu j})^T\psi_\nu=\sum_{p=1}^{s}(B^{kp}_{\nu j})^T\psi_{\nu p};\quad \left((B^k_{\nu\nu})^T\psi_\nu\right)_p=\left(\begin{pmatrix}(B^{k_{11}}_{\nu\nu})^T & \dots & (B^{k_{s1}}_{\nu\nu})^T\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (B^{k_{1s}}_{\nu\nu})^T & \dots & (B^{k_{ss}}_{\nu\nu})^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_{\nu 1}\\ \vdots\\ \psi_{\nu s}\end{pmatrix}\right)_p=$$

$$\left.=\begin{pmatrix}\sum\limits_{q=1}^{s}(B^{k_{q1}}_{\nu\nu})^T\psi_{\nu q}\\ \vdots\\ \sum\limits_{q=1}^{s}(B^{k_{qs}}_{\nu\nu})^T\psi_{\nu q}\end{pmatrix}_p=\sum_{q=1}^{s}(B^{k_{qp}}_{\nu\nu})^T\psi_{\nu q}\right\}=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} c(\tilde{X}_j(\tau_k),(B^k_{ij})^T\psi_i)+$$

$$+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m}\sum_{p=1}^{s} c\left(X_{\nu p}(\tau_k),(B^{kp}_{i\nu})^T\psi_i\right)+\sum_{p=1}^{s} c\left(X_{\nu p}(\tau_k),\sum_{q=1}^{s}(B^{k_{qp}}_{\nu\nu})^T\psi_{\nu q}\right)+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} c\left(\tilde{X}_j(\tau_k),\sum_{p=1}^{s}(B^{kp}_{\nu j})^T\psi_{\nu p}\right)+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m} c(P^k_i,\psi_i)+\sum_{p=1}^{s} c(P^k_{\nu p},\psi_{\nu p})\le$$

$$\le\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} c(\tilde{X}_j(\tau_k),(B^k_{ij})^T\psi_i)+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m}\sum_{p=1}^{s} c\left(X_{\nu p}(\tau_k),(B^{kp}_{i\nu})^T\psi_i\right)+$$

$$+\sum_{p=1}^{s}\sum_{q=1}^{s} c\left(X_{\nu p}(\tau_k),(B^{k_{qp}}_{\nu\nu})^T\psi_{\nu q}\right)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m}\sum_{p=1}^{s} c\left(\tilde{X}_j(\tau_k),(B^{kp}_{\nu j})^T\psi_{\nu p}\right)+$$

$$+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m} c(P^k_i,\psi_i)+\sum_{p=1}^{s} c(P^k_{\nu p},\psi_{\nu p}).\qquad(23)$$

Найдем опорную функцию множества $\tilde{X}(\tau_k+0)$:

$$
\begin{aligned}
c(\tilde{X}(\tau_k+0),\psi) &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m} c(\tilde{X}_i(\tau_k+0),\psi_i) + \sum_{q=1}^{s} c(X_{\nu q}(\tau_k+0),\psi_{\nu q}) = \\
&= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m} c\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} B_{ij}^{k}\tilde{X}_j(\tau_k) + \sum_{p=1}^{s} B_{i\nu}^{kp}X_{\nu p}(\tau_k) + \tilde{P}_i^k, \psi_i\right) + \\
&\quad + \sum_{q=1}^{s} c\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} B_{\nu j}^{kq}\tilde{X}_j(\tau_k) + \sum_{p=1}^{s} B_{\nu\nu}^{k_{qp}}X_{\nu p}(\tau_k) + P_{\nu q}^k, \psi_{\nu q}\right) = \\
&= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} c\left(\tilde{X}_j(\tau_k),(B_{ij}^k)^T\psi_i\right) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m}\sum_{p=1}^{s} c\left(X_{\nu p}(\tau_k),(B_{i\nu}^{kp})^T\psi_i\right) + \\
&\quad + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq\nu}}^{m} c(P_i^k,\psi_i) + + \sum_{q=1}^{s}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\nu}}^{m} c\left(\tilde{X}_j(\tau_k),(B_{\nu j}^{kq})^T\psi_{\nu q}\right) + \\
&\quad + \sum_{q=1}^{s}\sum_{p=1}^{s} c\left(X_{\nu p}(\tau_k),\left(B_{\nu\nu}^{k_{qp}}\right)^T\psi_{\nu q}\right) + \sum_{q=1}^{s} c(P_{\nu q}^k,\psi_{\nu q}). \qquad (24)
\end{aligned}
$$

С учетом (23) и (24) получаем $c(\overline{X}(\tau_k+0),\psi) \le c(\tilde{X}(\tau_k+0),\psi)$ для всех $\psi \in R^n$, а значит, $\overline{X}(\tau_k+0) \subset \tilde{X}(\tau_k+0)$. Следовательно, теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть Δ_1 и Δ_2 — разбиения матриц $A(t)$ и B_k для уравнения (17), причем Δ_2 может быть получено из Δ_1 путем дальнейшего разбиения, кроме того, $\overline{X}_{\Delta_1}(t)$ и $\overline{X}_{\Delta_2}(t)$ — решения систем вида (18), соответствующие данным разбиениям. Тогда $\overline{X}_{\Delta_1}(t) \subset \overline{X}_{\Delta_2}(t)$ для всех $t \in [0,T]$.*

Следствие 4. *Пусть $Y_m(t)$ — пересечение всех множеств $\overline{X}(t)$ — решений систем вида (18) при всевозможных разбиениях матриц $A(t)$ и B_k на матрицы $A_{ij}(t)$ и B_{ij}^k $i,j=\overline{1,m}$. Тогда в силу теорем 3 и 4*

$$X(t) = Y_1(t) \subset Y_2(t) \subset \ldots \subset Y_n(t) \quad \textit{для всех} \quad t \in [0,T].$$

Замечание 2. В случае $m = n$ система (18) распадается на две системы линейных импульсных дифференциальных уравнений. Пусть

$$X_i(t) = x_i(t) + y_i(t)[-1,1], \quad F_i(t) = f_i(t) + g_i(t)[-1,1], \quad P_i^k = p_i^k + q_i^k[-1,1].$$

Тогда по аналогии с замечанием 1 получаем

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) + f_i(t),\ t \neq \tau_k,\ k = \overline{1,N},\\
&x_i(\tau_k + 0) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^k x_j(\tau_k) + p_i^k,\\
&x_i(0) = x_i^0;
\end{aligned}
\tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
&\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)|y_j(t) + g_i(t),\ t \neq \tau_k,\ k = \overline{1,N},\\
&y_i(\tau_k + 0) = \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}^k|y_j(\tau_k) + q_i^k,\\
&y_i(0) = y_i^0.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Замечание 3. Как отмечено выше, нахождение решения уравнения Хукухары в случае пространства размерности $n > 2$ вызывает принципиальные вычислительные трудности. Поэтому целесообразно разбивать матрицы $A(t)$ и B_i на блоки таким образом, чтобы $n_i \leq 2$, $i = \overline{1,m}$.

Замечание 4. В системах (1) и (16) матрицу $A(t)$ и многозначное отображение $F(t)$ можно считать измеримыми.

1. *Панасюк А. И., Панасюк В. И.* Асимптотическая оптимизация нелинейных систем управления. — Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1977. — 208 с.
2. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. — Новосибирск: Наука, 1986. — 296 с.
3. *Aubin J.-P.* Mutational equations in metric spaces // Set-Valued Analysis. — 1993. — **1**, № 1. — P. 3–46.
4. *Черноусько Ф. Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. — М.: Наука, 1988. — 320 с.
5. *Дончев А.* Системы оптимального управления: возмущения, приближения и анализ чувствительности / Пер. с англ. А. В. Фролова. — М.: Мир, 1987. — 156 с.
6. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. — Одесса: Астропринт, 1999. — 356 с.
7. *Никольский М. С.* Об одном методе аппроксимации множества достижимости для дифференциального включения // Журн. вычислит. математематики и мат. физики. — 1988. — **28**, № 8. — С. 1252–1254.
8. *Veliov V.* Second order discrete approximations to linear differencial inclusions // SIAM J. Numer. Anal. — 1992. — **29**. — P. 439–451.
9. *De Blasi F. S., Iervolino F.* Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso // Boll. Unione mat. ital. — 1969. — **2**, № 4–5. — P. 491–501.
10. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы: Сб. обзорных статей. К 50-летию института (Тр. Мат. ин-та АН СССР, Т. 169). — М.: Наука, 1985. — С. 194–252.
11. *De Blasi F. S., Iervolino F.* Euler method for differential equations with set-valued solutions // Boll. Unione mat. ital. — 1971. — **4**, № 4. – P. 941–949.
12. *Плотникова Н. В.* Аппроксимация пучка решений линейных импульсных дифференциальных включений // Вісн. Харків. нац. ун-ту. Математика, прикл. математика і механіка. — 2004. — Вип. 54. — С. 67–78.

Получено 14.04.2006