УДК 517.9

УМОВИ ОДНОЗНАЧНОЇ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ПОЧАТКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ВІДХИЛЕННЯМИ АРГУМЕНТУ*

А. М. Ронто, Н. З. Дільна

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

We establish new conditions under which the initial-value problem for a system of second-order linear differential equations with argument deviations has a unique solution which depends monotonously on forcing terms.

Установлены новые условия, при которых начальная задача для системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с отклонениями аргумента имеет единственное решение, монотонно зависящее от аддитивных возмущений задачи.

1. Вступ. Метою даної роботи є встановлення конструктивних умов, достатніх для однозначної розв'язності задачі Коші для системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з вимірними відхиленнями аргументу загального вигляду. Подібні питання з інших позицій нещодавно розглядалися, зокрема, в [1, 2].

Доведення результатів ґрунтуються на використанні результатів робіт [3–5]. Цікавим є факт, що змістовні та ефективні достатні умови існування, єдиності та знакосталості розв'язку даної задачі вдається вивести з теорем про інтегро-диференціальні нерівності для систем першого порядку тої ж самої розмірності, що й вихідна диференціальна система [3–6]. Деякі такі результати й отримано в цій роботі.

2. Позначення. У статті використовуються наступні позначення: $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ — банахів простір неперервних функцій $[a,b] \to \mathbb{R}^n$, норму в якому задано формулою

$$C([a,b],\mathbb{R}^n) \ni u = (u_k)_{k=1}^n \longmapsto \max_{k=1,2,\ldots,n} \max_{s\in[a,b]} |u_k(s)|\,;$$

$L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$ — банахів простір інтегровних за Лебегом функцій $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ з нормою

$$L_1([a,b],\mathbb{R}^n) \ni u = (u_k)_{k=1}^n \longmapsto \max_{k=1,2,\ldots,n} \int\limits_a^b |u_k(s)|\,ds.$$

3. Постановка задачі. Далі розглядаємо систему рівнянь

$$u_k''(t) = \sum_{j=1}^n p_{kj}(t) u_j(\omega_{kj}(t)) + \varphi_k(t), \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

* Виконано за часткової підтримки грантами Президії НАН України (№ 0105U005666, AS CR № AV0Z10190503, INTAS № 04-83-3968).

із початковими умовами

$$u_k(\tau) = c_{0k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

$$u_k'(\tau) = c_{1k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

де $-\infty < a \leq \tau \leq b < +\infty$, $p_{kj} : [a, b] \to \mathbb{R}$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, та $\varphi_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ — інтегровні за Лебегом функції, $\omega_{kj} : [a, b] \to [a, b]$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, — вимірні функції, а $\{c_{0k}, c_{1k} \mid k = 1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}$ — довільні задані константи.

Поряд із неоднорідною початковою задачею (1) – (3) розглядатимемо відповідну їй однорідну задачу

$$u_k''(t) = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}(t) u_j(\omega_{kj}(t)), \quad t \in [a, b], \; k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

із початковими умовами

$$u_k(\tau) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

$$u_k'(\tau) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Під розв'язком задачі (1), (2) (відповідно (4), (5)), як прийнято у сучасній літературі з теорії функціонально-диференціальних рівнянь [7], розуміємо абсолютно неперервну вектор-функцію $u = (u_k)_{k=1}^{n} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, для компонент якої в точці τ виконано властивості (2), (3) (відповідно (5), (6)) та для майже всіх $t \in [a, b]$ справджується рівність (1) (відповідно (4)).

4. Достатні умови розв'язності задачі (1) – (3). Наступна теорема дозволяє отримати умови, за яких задача (1) – (3) завжди має єдиний розв'язок, який, крім того, у певному сенсі монотонно залежить від адитивних збурень правих частин рівняння та початкових умов.

Теорема 1. *Припустимо, що в рівнянні (1) функції* $\omega_{kj} : [a, b] \to [a, b]$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, *є вимірними, а інтегровні функції* $p_{kj} : [a, b] \to \mathbb{R}$ *при деяких сталих* $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \subset \{-1, 1\}$ *для всіх* $k, j = 1, 2, \ldots, n$ *задовольняють умову*

$$\sigma_k \sigma_j p_{kj}(t) \geq 0 \quad \text{при майже всіх } t \in [a, b]. \tag{7}$$

Крім цього, нехай існують такі абсолютно неперервна вектор-функція $y = (y_k)_{k=1}^{n} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *із властивостями*

$$y_k(\tau) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

$$y_k(t) > 0, \quad t \in [a, b] \setminus \{\tau\}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

та константа $\varrho \in (1, +\infty)$, *для яких при всіх* $k = 1, 2, \ldots, n$ *та майже всіх* t *з* $[a, b]$ *справджується диференціально-функціональна нерівність*

$$\sigma_k \left[y_k'(t) - \varrho \sum_{j=1}^{n} \int_{\tau}^{t} p_{kj}(s) y_j(\omega_{kj}(s)) ds \right] \operatorname{sign}(t - \tau) \geq 0. \tag{10}$$

Тоді однорідна задача (4) – (6) має лише тривіальний розв'язок, а відповідна їй неоднорідна задача (1) – (3) є однозначно розв'язною при довільних функціях $\{\varphi_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\} \subset L_1([a, b], \mathbb{R})$ *та сталих* c_{0k}, c_{1k}, $k = 1, 2, \ldots, n$. *Крім цього, якщо для констант* c_{0k} *та* c_{1k} *і функцій* φ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *виконується умова*

$$\sigma_k \int_{\tau}^{t} (t - \xi)\, \varphi_k(\xi)\, d\xi \geq -\sigma_k c_{0k} - \sigma_k c_{1k}(t - \tau), \quad t \in [a, b],\ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

то компоненти $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *єдиного розв'язку задачі (1) – (3) задовольняють умову*

$$\min_{k=1,2,\ldots,n} \min_{t \in [a,b]} \sigma_k u_k(t) \geq 0. \tag{12}$$

Теорема 1 дозволяє отримати твердження, що визначає ефективні умови розв'язності задачі (1) – (3).

Теорема 2. *Нехай функції* $\omega_{kj} : [a, b] \to [a, b]$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, *є вимірними, а для інтегровних функцій* $p_{kj} : [a, b] \to \mathbb{R}$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, *при деяких* $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \subset \{-1, 1\}$ *виконано умови (7). Крім цього, припустимо існування таких сталих* $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset (0, +\infty)$ *та* $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\} \subset (0, +\infty)$, *що для кожного* $k = 1, 2, \ldots, n$ *майже скрізь на* $[a, b]$ *справджується нерівність*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in [a,b] \setminus \{\tau\}} \frac{\sigma_k}{\gamma_k |t - \tau|^{\alpha_k - 1}} \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \int_{\min\{\tau,t\}}^{\max\{\tau,t\}} p_{kj}(s) |\omega_{kj}(s) - \tau|^{\alpha_j} ds < \sigma_k \alpha_k. \tag{13}$$

Тоді однорідна задача (4) – (6) має лише тривіальний розв'язок, а неоднорідна задача (1) – (3) є однозначно розв'язною при довільних функціях $\{\varphi_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\} \subset L_1([a, b], \mathbb{R})$ *та сталих* c_{0k}, c_{1k}, $k = 1, 2, \ldots, n$. *Крім цього, якщо для констант* c_{0k} *та* c_{1k} *і функції* φ_k *при всіх* $t \in [a, b]$ *виконується умова (11), то єдиний розв'язок задачі (1) – (3) має властивість (12).*

Із теореми 2 випливає, зокрема, такий результат.

Наслідок 1. *Нехай функції* $\omega_{kj} : [a, b] \to [a, b]$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, *є вимірними, а для інтегровних функцій* $p_{kj} : [a, b] \to \mathbb{R}$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, *при деяких значеннях* $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \subset \{-1, 1\}$ *виконано умови (7). Крім цього, припустимо, що при деяких сталих* $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\} \subset (0, +\infty)$ *для кожного* $k = 1, 2, \ldots, n$ *справджується нерівність*

$$\max\left\{ \sigma_k \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \int_{a}^{\tau} |p_{kj}(\xi)| |\omega_{kj}(\xi) - \tau| d\xi,\ \sigma_k \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \int_{\tau}^{b} |p_{kj}(\xi)| |\omega_{kj}(\xi) - \tau| d\xi \right\} < \sigma_k \gamma_k. \tag{14}$$

Тоді для задач (1) – (3) та (4) – (6) має місце висновок теореми 1.

Наведемо ще таке твердження.

Теорема 3. *Припустимо, що для функцій* $\omega_{kj} : [a,b] \to [a,b]$ *та* $p_{kj} : [a,b] \to \mathbb{R}$, $k,j = 1,2,\ldots,n$, *при деяких значеннях* $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \subset \{-1,1\}$ *виконано умови (7). Крім цього, нехай існують такі* $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset [1,+\infty)$, *що при всіх* $k = 1,2,\ldots,n$ *виконується нерівність*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]\setminus\{\tau\}} \frac{\sigma_k}{|t-\tau|^{\alpha_k}} \sum_{j=1}^{n} \int_{\tau}^{t} (t-\xi)\, p_{kj}(\xi) |\omega_{kj}(\xi) - \tau|^{\alpha_j} d\xi < \sigma_k. \tag{15}$$

Тоді для задач (1) – (3) та (4) – (6) має місце висновок теореми 1.

Ці та подальші твердження доведено в п. 7. Зазначимо, що, як буде показано в п. 6, умови (13) – (15) є оптимальними в тому сенсі, що наявні в них строгі нерівності не можна замінити відповідними нестрогими нерівностями, оскільки за таких припущень твердження наведених теорем не є правильними.

5. Початкова задача для скалярного рівняння. Розглянемо одновимірне диференціальне рівняння з відхиленням аргументу

$$u''(t) = p(t)u(\omega(t)) + \varphi(t), \qquad t \in [a,b], \tag{16}$$

підпорядковане початковим умовам

$$u(\tau) = c_0, \tag{17}$$

$$u'(\tau) = c_1, \tag{18}$$

де $-\infty < a \le \tau \le b < +\infty$, $m \in \mathbb{N}$, $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ та $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ — інтегровні за Лебегом функції, функція $\omega : [a,b] \to [a,b]$ є вимірною, а c_0 і c_1 — довільні задані константи. Очевидно, окремими випадками (17), (18) є умови

$$u(a) = c_0, \tag{19}$$

$$u'(a) = c_1 \tag{20}$$

та

$$u(b) = c_0, \tag{21}$$

$$u'(b) = c_1. \tag{22}$$

Рівняння (16) у зв'язку з питанням про розв'язність для нього задачі (19), (20) розглядалося в [1, 2].

Теорема 4. *Нехай у рівнянні (16) функції* $\omega : [a,b] \to [a,b]$ *та* $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ *є такими, що при деякій константі* $\alpha \in (0,+\infty)$ *виконується нерівність*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]\setminus\{\tau\}} \frac{\operatorname{sign}\,(t-\tau)}{|t-\tau|^{\alpha-1}} \int\limits_{\tau}^{t} p(\xi)|\omega(\xi)-\tau|^{\alpha} d\xi < \alpha. \tag{23}$$

Крім цього, припустимо, що

$$\operatorname*{ess\,inf}_{t\in[a,b]} p(t) \geq 0. \tag{24}$$

Тоді неоднорідна задача (16) – (18) є однозначно розв'язною при довільних $\varphi \in L_1([a,b],\mathbb{R})$ *та* $\{c_0, c_1\} \subset \mathbb{R}$. *Більше того, якщо* c_0, c_1 *та* φ *мають властивість*

$$\int\limits_{\tau}^{t} (t-\xi)\,\varphi(\xi)d\xi \geq -c_0 - c_1(t-\tau), \qquad t \in [a,b], \tag{25}$$

то єдиний розв'язок задачі (16) – (18) є невід'ємним на проміжку $[a,b]$.

Слід зазначити, що знак строгої нерівності в умові (23) є суттєвим, і цю умову не можна замінити слабшою умовою

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]\setminus\{\tau\}} \frac{\operatorname{sign}\,(t-\tau)}{|t-\tau|^{\alpha-1}} \int\limits_{\tau}^{t} p(\xi)|\omega(\xi)-\tau|^{\alpha} d\xi \leq \alpha, \tag{26}$$

оскільки при такій заміні вказана теорема не є правильною (див. п. 6).

Наслідок 2. *Нехай у рівнянні (16) для функцій* $\omega : [a,b] \to [a,b]$ *та* $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ *виконуються умова (24) та нерівність*

$$\max\left\{\int\limits_{a}^{\tau} p(\xi)|\omega(\xi)-\tau|d\xi,\ \int\limits_{\tau}^{b} p(\xi)|\omega(\xi)-\tau|d\xi\right\} < 1.$$

Тоді для початкової задачі (16) – (18) справедливим є висновок теореми 2.

Наступна теорема встановлює для неоднорідної задачі (16) – (18) умови розв'язності іншого типу.

Теорема 5. *Припустимо, що функція* $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ *у рівнянні (16) майже скрізь на* $[a,b]$ *набуває невід'ємних значень. Окрім цього, нехай існують такі сталі* $\varrho \in (1,+\infty)$ *та* $\alpha \in (0,+\infty)$, *при яких справджується нерівність*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]\setminus\{\tau\}} |t-\tau|^{1-\alpha} \int\limits_{\min\{\tau,t\}}^{\max\{\tau,t\}} p(\xi)\Bigg[|\omega(\xi)-\tau|^{\alpha} +$$

$$+\,\varrho \int\limits_{\tau}^{\omega(\xi)} (\omega(\xi)-\eta)\,p(\eta)|\omega(\eta)-\tau|^{\alpha} d\eta\Bigg] d\xi \leq \frac{2\alpha}{\varrho}. \tag{27}$$

Тоді неоднорідна задача (16) – (18) є однозначно розв'язною при довільних $\varphi \in L_1([a, b], \mathbb{R})$ та $\{c_0, c_1\} \subset \mathbb{R}$. Більше того, якщо c_0, c_1 та φ мають властивість (25), то єдиний розв'язок задачі (16) – (18) є невід'ємним на проміжку $[a, b]$.

Зауваження 1. Умова (27) є непокращуваною в тому сенсі, що її при жодному $\varepsilon \in (0, +\infty)$ не можна замінити умовою

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]\setminus\{\tau\}} |t-\tau|^{1-\alpha} \int\limits_{\min\{\tau,t\}}^{\max\{\tau,t\}} p(\xi)\Bigg[|\omega(\xi)-\tau|^{\alpha} +$$

$$+\,\varrho \int\limits_{\tau}^{t} (\omega(\xi)-\eta)\, p(\eta)|\omega(\eta)-\tau|^{\alpha} d\eta\Bigg] d\xi \leq \frac{2\alpha+\varepsilon}{\varrho}, \tag{28}$$

оскільки, як буде показано в п. 6, після такої заміни висновок згаданої теореми вже не матиме місця.

З теореми 5 випливає такий наслідок.

Наслідок 3. *Припустимо, що функція $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ у рівнянні (16) майже скрізь на $[a, b]$ набуває невід'ємних значень. Нехай, окрім цього, можна вказати таке значення $\varrho > 1$, при якому справджується нерівність*

$$\max\Bigg\{ \int\limits_{a}^{\tau} p(\xi)\Bigg[|\omega(\xi)-\tau| + \varrho \int\limits_{\tau}^{\omega(\xi)} (\omega(\xi)-\eta)\, p(\eta)|\omega(\eta)-\tau| d\eta\Bigg] d\xi,$$

$$\int\limits_{\tau}^{b} p(\xi)\Bigg[|\omega(\xi)-\tau| + \varrho \int\limits_{\tau}^{\omega(\xi)} (\omega(\xi)-\eta)\, p(\eta)|\omega(\eta)-\tau| d\eta\Bigg] d\xi\Bigg\} \leq \frac{2}{\varrho}. \tag{29}$$

Тоді для задачі (16) – (18) має місце висновок теореми 5.

Справедливою є наступна теорема.

Теорема 6. *Нехай функція $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ у рівнянні (24) майже скрізь на $[a, b]$ набуває невід'ємних значень і, крім цього, існує таке $\alpha \in (0, +\infty)$, при якому виконується нерівність*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]\setminus\{\tau\}} \frac{1}{|t-\tau|^{\alpha}} \int\limits_{\tau}^{t} (t-\xi)\, p(\xi)|\omega(\xi)-\tau|^{\alpha} d\xi < 1. \tag{30}$$

Тоді має місце висновок теореми 5.

Зауваження 2. Умова (27) є оптимальною в тому сенсі, що її не можна замінити умовою типу

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]\setminus\{\tau\}} \frac{1}{|t-\tau|^{\alpha}} \int\limits_{\tau}^{t} (t-\xi)\, p(\xi)|\omega(\xi)-\tau|^{\alpha} d\xi \leq 1. \tag{31}$$

Наведемо твердження, що випливає безпосередньо з наслідків 2 та 3.

Наслідок 4. *Нехай функція $p \in L_1([a,b]),\mathbb{R})$ має властивість (24). Тоді для однозначної розв'язності кожної із задач (16), (19), (20) та (16), (21), (22) при довільних $\varphi \in L_1([a,b]),\mathbb{R})$ та $\{c_0, c_1\} \subset \mathbb{R}$ достатньо, щоб виконувалось принаймні одне з наступних двох припущень:*

1) справджується нерівність

$$\int_a^b p(\xi)|\omega(\xi)-\tau|d\xi < 1; \tag{32}$$

2) існує таке значення $\varrho \in (1,+\infty)$, при якому

$$\int_a^b p(\xi)\left[|\omega(\xi)-\tau| + \varrho\int_\tau^{\omega(\xi)} (\omega(\xi)-\eta)\,p(\eta)|\omega(\eta)-\tau|d\eta\right]d\xi \le \frac{2}{\varrho}. \tag{33}$$

Крім цього, виконання для функції $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ та констант c_0, c_1 умови

$$\min_{t\in[a,b]}\int_a^t (t-\xi)\varphi(\xi)d\xi \ge \frac{b-a}{2}(|c_1|-c_1)-c_0 \tag{34}$$

за вказаних припущень є достатнім для невід'ємності єдиного розв'язку задачі (16), (19), (20), а за умови

$$\min_{t\in[a,b]}\int_b^t (t-\xi)\varphi(\xi)d\xi \ge \frac{b-a}{2}(|c_1|+c_1)-c_0 \tag{35}$$

невід'ємним є розв'язок задачі (16), (21), (22).

6. Оптимальність умов. Вище зазначалося, що умови отриманих теорем є у певному сенсі оптимальними. Для того щоб у цьому переконатися, достатньо розглянути простий приклад.

Приклад. Розглянемо задачу

$$u(a)=0, \qquad u'(a)=0 \tag{36}$$

для однорідного рівняння

$$u''(t) = \frac{2}{(b-a)^2}u(b), \qquad t\in[a,b]. \tag{37}$$

Обчислення показують, що при $\alpha = 2$ умови (23), (27), (30) не мають місця, але їх послаблені версії (26), (28), (31) у цьому випадку справджуються. Покажемо це на прикладі умови (28). Дійсно, рівняння (37) має вигляд (16) при $\omega(t) := b$ та $p(t) := 2\,(b-a)^{-2}$,

$t \in [a, b]$. При цьому, як можна перевірити, припущення (28) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$(1+\varrho)\,\varrho \le 2+\varepsilon. \tag{38}$$

Легко бачити, що нерівність (38) справджується, коли $\varepsilon > 0$ та

$$\varrho \in \left(1,\ -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}+\varepsilon}\right).$$

Очевидно також, що при $\varepsilon = 0$ нерівність (38) не має місця для жодного $\varrho \in (1, +\infty)$.

Отже, в даному випадку умова (27) не виконується, але натомість при як завгодно малих значеннях константи ε справджується умова (28). Однак легко перевірити, що функція $u(t) = (t-a)^2$, $t \in [a, b]$, є нетривіальним розв'язком однорідної задачі (37), (36).

7. Доведення теорем. ***7.1. Доведення теореми 1.*** Встановимо спочатку деякі допоміжні твердження.

Лема 1. *Абсолютно неперервна вектор-функція $u = (u_k)_{k=1}^n : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ є розв'язком задачі (1), (3) тоді і тільки тоді, коли вона є розв'язком системи рівнянь*

$$u_k'(t) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\tau}^{t} p_{kj}(s) u_j(\omega_{kj}(s))ds + \int_{\tau}^{t} \varphi_k(s)ds + c_{1k}, \quad t \in [a, b],\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{39}$$

Доведення. Припустимо, що функція $u = (u_k)_{k=1}^n$ — розв'язок задачі (1), (3). Зінтегруємо обидві частини (1) в межах від τ до t. Враховуючи (3), одержуємо співвідношення (39). Навпаки, з (39) очевидним чином отримуємо рівності (1), (3).

Лема 2. *Нехай $\{p_{kj} \mid k, j = 1, 2, \ldots, n\} \subset L_1([a, b], \mathbb{R})$, а $\omega_{kj} : [a, b] \to [a, b]$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, — довільні вимірні функції. Нехай при деяких сталих $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \subset \{-1, 1\}$ для всіх $k, j = 1, 2, \ldots, n$ виконано умову (7). Тоді для довільної неперервної вектор-функції $u = (u_k)_{k=1}^n : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ з властивістю (12) при всіх t із $[a, b]$ та всіх $k = 1, 2, \ldots, n$ має місце нерівність*

$$\sigma_k \sum_{j=1}^{n} \int_{\min\{\tau,t\}}^{\max\{\tau,t\}} p_{kj}(s) u_j(\omega_{kj}(s))ds \ge 0. \tag{40}$$

Доведення. Нехай вектор-функція $u = (u_k)_{k=1}^n \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ має властивість (12). Тоді для всіх t з $[a, b]$ та $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\sigma_k \sum_{j=1}^{n} \int_{\min\{\tau,t\}}^{\max\{\tau,t\}} p_{kj}(s) u_j(\omega_{kj}(s))ds = \sum_{j=1}^{n} \int_{\min\{\tau,t\}}^{\max\{\tau,t\}} \sigma_k\sigma_j p_{kj}(s)\sigma_j u_j(\omega_{kj}(s))ds =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{\tau}^{t} \sigma_k\sigma_j p_{kj}(s)\sigma_j u_j(\omega_{kj}(s))ds \,\mathrm{sign}\,(t-\tau), \tag{41}$$

і, отже, з огляду на (7) та (12) справджується співвідношення (40).

Доведення теореми 1 ґрунтується на теоремі 2 роботи [3], яку ми для повноти викладу наведемо тут. Згадана теорема стосується задачі Коші

$$u_k(\tau) = c_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{42}$$

для системи рівнянь вигляду

$$u_k'(t) = (l_k u)(t) + q_k(t), \qquad t \in [a, b],\ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{43}$$

де $-\infty < a \le \tau \le b < +\infty$, $\{c_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}$, $\{q_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\} \subset \subset L_1([a, b], \mathbb{R})$, а $l_k : C([a, b], \mathbb{R}^n) \to L_1([a, b], \mathbb{R})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — обмежені лінійні відображення, які утворюють $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-позитивний оператор $l = (l_k)_{k=1}^n : C([a, b], \mathbb{R}^n) \to L_1([a, b], \mathbb{R}^n)$. Тут $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \subset \{-1, 1\}$ — фіксовані числа, а під $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-позитивністю оператора $l = (l_k)_{k=1}^n$ розуміємо ту властивість, що

$$\min_{k=1,2,\ldots,n} \operatorname*{ess\,inf}_{t \in [a,b]} \sigma_k (l_k u)(t) \operatorname{sign}(t - \tau) \ge 0$$

для кожної вектор-функції $u = (u_k)_{k=1}^n \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$, яка задовольняє умову (12).

Теорема 7 ([3], теорема 2). *Нехай $l_k : C([a, b], \mathbb{R}^n) \to L_1([a, b], \mathbb{R})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, утворюють $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-позитивний оператор $l = (l_k)_{k=1}^n : C([a, b], \mathbb{R}^n) \to L_1([a, b], \mathbb{R}^n)$ та існує функція $y = (y_k)_{k=1}^n : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, компоненти якої абсолютно неперервні, задовольняють умови (8), (9), і, крім того, є такими, що при деякому $\varrho \in (1, +\infty)$ має місце нерівність*

$$\min_{k=1,2,\ldots,n} \operatorname*{ess\,inf}_{t \in [a,b]} \sigma_k \left[y_k'(t) - \varrho\, (l_k y)(t) \right] \operatorname{sign}(t - \tau) \ge 0. \tag{44}$$

Тоді задача (43), (42) є однозначно розв'язною при довільних функціях $\{q_k \mid k = = 1, 2, \ldots, n\} \subset L_1([a, b], \mathbb{R})$ та сталих c_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Крім цього, якщо для констант c_k і функцій q_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, справджується умова

$$\sigma_k \int_\tau^t q_k(\xi) d\xi \ge -\sigma_k c_k, \quad t \in [a, b],\ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{45}$$

то компоненти $u_1, u_2, \ldots, u_n$ єдиного розв'язку задачі (42), (43) задовольняють умову (12).

Перейдемо безпосередньо до доведення теореми 1. Для цього скористаємось теоремою 7. Означимо оператори $l_k : C([a, b], \mathbb{R}^n) \to L_1([a, b], \mathbb{R})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, формулою

$$(l_k u)(t) := \sum_{j=1}^n \int_\tau^t p_{kj}(s) u_j(\omega_{kj}(s)) ds, \qquad t \in [a, b],\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{46}$$

З огляду на лему 2 відображення l_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, утворюють $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-позитивний оператор $l = (l_k)_{k=1}^n : C([a, b], \mathbb{R}^n) \to L_1([a, b], \mathbb{R}^n)$. Беручи до уваги позначення (46), знаходимо, що припущення (10) ґарантує виконання для функції $y = (y_k)_{k=1}^n$ умови (44). Крім цього, легко бачити, що при функціях $\{\varphi_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\} \subset L_1([a,b], \mathbb{R})$ та сталих $c_{0k}, c_{1k}, k = 1, 2, \ldots, n$, які мають властивість (11), відповідні функції

$$q_k(t) := \int\limits_{\tau}^{t} \varphi_k(s)ds + c_{1k}, \qquad t \in [a,b],\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

та сталі $c_k := c_{0k}, k = 1, 2, \ldots, n$, задовольняють умову

$$\sigma_k \int\limits_{\tau}^{t} \int\limits_{\tau}^{\xi} \varphi_k(s)ds\, d\xi = \int\limits_{\tau}^{t} (t-\xi)\, \varphi_k(s)ds\, d\xi \geq -\sigma_k c_{0k} - \sigma_k c_{1k}(t-\tau),$$

тобто для всіх $t \in [a,b]$ та $k = 1, 2, \ldots, n$ виконуються співвідношення (45). Отже, застосуванням теореми 7 переконуємося, що задача (39), (2) для довільних $\{\varphi_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\} \subset \subset L_1([a,b], \mathbb{R})$ та $c_{0k}, c_{1k}, k = 1, 2, \ldots, n$, має єдиний розв'язок $u = (u_k)_{k=1}^n$, причому у випадках, коли справджуються співвідношення (11), цей розв'язок задовольняє умову (41). На підставі леми 1 це означає, що для задач (4) – (6) та (1) – (3) має висновок теореми 1.

7.2. Доведення теореми 2. Означимо лінійні оператори $l_k : C([a,b], \mathbb{R}^n) \to L_1([a,b], \mathbb{R})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, формулами (46). За лемою 2 припущенням (11) забезпечується $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \ldots, \sigma_n; \tau)$-позитивність відображення $l = (l_k)_{k=1}^n : C([a,b], \mathbb{R}^n) \to L_1([a,b], \mathbb{R}^n)$.

З припущення (13) випливає існування такої константи $\varrho \in (1, +\infty)$, що для майже всіх t з $[a,b]$ та кожного $k = 1, 2, \ldots, n$ справджується нерівність

$$\frac{\sigma_k \varrho}{\gamma_k |t-\tau|^{\alpha_k - 1}} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\min\{\tau,t\}}^{\max\{\tau,t\}} p_{kj}(s) \gamma_j |\omega_{kj}(s) - \tau|^{\alpha_j} ds \leq \sigma_k \alpha_k, \tag{47}$$

або, що те саме,

$$\sigma_k \left[\alpha_k \gamma_k |t-\tau|^{\alpha_k - 1} \operatorname{sign}(t-\tau) - \varrho \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\tau}^{t} p_{kj}(s) \gamma_j |\omega_{kj}(s) - \tau|^{\alpha_j} ds \right] \operatorname{sign}(t-\tau) \geq 0, \tag{48}$$

де $\gamma_j, \alpha_j, j = 1, 2, \ldots, n,$ — задані в умові теореми 2 константи. Покладемо

$$y_j(t) := \gamma_j |t-\tau|^{\alpha_j}, \quad t \in [a,b],\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{49}$$

Очевидно, що функції (49) мають властивості (8) та (9). Оскільки, як легко переконатись, з (47) випливає виконання для функцій (49) співвідношення (10), застосовуючи теорему 1, приходимо до потрібного висновку.

7.3. Доведення наслідку 1. Для отримання потрібного твердження достатньо скористатися теоремою 2 при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 1$.

7.4. Доведення теореми 3. Для доведення теореми 3 скористаємось таким результатом роботи [5], який стосується однозначної розв'язності задачі (43), (42).

Теорема 8 ([5], наслідок 6). *Припустимо, що в (43)* $l_k : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R})$, $k = 1,2,\ldots,n$, *утворюють* $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n;\tau)$*-позитивний оператор* $l = (l_k)_{k=1}^n : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$. *Нехай для деякої абсолютно неперервної функції* $y = (y_k)_{k=1}^n : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, *що має властивості (8), (9) та задовольняє умови*

$$\min_{k=1,2,\ldots,n} \operatorname*{ess\,inf}_{t\in[a,b]} \sigma_k y_k'(t) \operatorname{sign}(t-\tau) \geq 0, \tag{50}$$

виконуються нерівності

$$\sigma_k \int_\tau^t (l_k y)(\xi) d\xi \leq \gamma \sigma_k y_k(t), \quad t \in [a,b], \ k = 1,2,\ldots,n, \tag{51}$$

де $\gamma \in [0,1)$ *— деяка константа.*

Тоді для задачі (43), (42) має місце висновок теореми 7.

Повернемось до доведення теореми 3. Означимо вектор-функцію $y = (y_k)_{k=1}^n : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ формулою (49). Очевидно, що це — абсолютно неперервна функція з властивостями (8), (9), (50).

З припущення (15) випливає, що при певному $\gamma \in [0,1)$ для майже всіх t з $[a,b]$ та всіх $k = 1,2,\ldots,n$ справджується нерівність

$$\sigma_k \sum_{j=1}^n \int_\tau^t (t-\xi)\, p_{kj}(\xi) |\omega_{kj}(\xi) - \tau|^{\alpha_j} d\xi \leq \gamma \sigma_k |t-\tau|^{\alpha_k},$$

і, отже,

$$\sigma_k \sum_{j=1}^n \int_\tau^t \int_\tau^s p_{kj}(\xi) |\omega_{kj}(\xi) - \tau|^{\alpha_j} d\xi\, ds \leq \gamma \sigma_k |t-\tau|^{\alpha_k}. \tag{52}$$

Означимо тепер лінійні оператори $l_k : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R})$, $k = 1,2,\ldots,n$, формулами (46). Тоді (52) означає, що для функції $y = (y_k)_{k=1}^n$ має місце властивість (51).

Нарешті, за лемою 2 з припущення (11) випливає $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n;\tau)$-позитивність оператора $l = (l_k)_{k=1}^n : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$. Отже, в даному випадку виконано всі умови теореми 8, застосуванням якої завершуємо доведення теореми 3.

7.5. Доведення теореми 4. Теорема 4 є наслідком теореми 2 у випадку, коли $n = 1$, $p_{11} = p$, $\omega_{11} = \omega$, $\sigma_1 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\alpha_1 = \alpha$.

7.6. Доведення наслідку 2. Наслідок 2 випливає з наслідку 1 при $n = 1$, $p_{11} = p$, $\omega_{11} = \omega$, $\sigma_1 = 1$, $\gamma_1 = 1$.

7.7. Доведення теореми 5. Для отримання потрібного твердження скористаємось наступним результатом, встановленим у роботі [4] щодо розв'язності задачі

$$u'(t) = \int_a^b h(t,s) u(\omega(t,s)) ds + q(t), \qquad t \in [a,b], \tag{53}$$

$$u(\tau) = c, \tag{54}$$

де $-\infty < a \le \tau \le b < +\infty$, $c \in \mathbb{R}$, $h \in L_1([a,b]^2,\mathbb{R})$, $q \in L_1([a,b],\mathbb{R})$, а функція $\omega : [a,b]^2 \to [a,b]$ є вимірною за обома аргументами.

Теорема 9 ([4], теорема 4). *Припустимо, що в рівнянні (53) функція $h : [a,b] \times \times [a,b] \to \mathbb{R}$ задовольняє умову*

$$h(t,s)\operatorname{sign}(t-\tau) \ge 0 \quad \text{для майже всіх } t \text{ та } s \text{ з } [a,b], \tag{55}$$

і, крім цього, можна вказати такі числа $\varrho \in (1,+\infty)$ та $\alpha \in (0,+\infty)$, для яких при майже всіх t з $[a,b]$ має місце співвідношення

$$\int\limits_a^b |h(t,\xi)| \left[|\omega(t,\xi)-\tau|^{\alpha} + \varrho \int\limits_{\tau}^{\omega(t,\xi)} \int\limits_a^b h(s,\eta)\, |\omega(s,\eta)-\tau|^{\alpha}\, d\eta\, ds \right] d\xi \le \frac{2\alpha}{\varrho}\, |t-\tau|^{\alpha-1}. \tag{56}$$

Тоді задача (53), (54) є однозначно розв'язною для довільних $q \in L_1([a,b],\mathbb{R})$ та $c \in \in \mathbb{R}$, а її розв'язок подається рівномірно збіжним функціональним рядом

$$u(t) = c + \int\limits_{\tau}^{t} q(s_0)ds_0 + \int\limits_a^b h(t,s_1) \left(c + \int\limits_{\tau}^{\omega(t,s_1)} q(s_0)ds_0 \right) ds_1 + \ldots, \qquad t \in [a,b]. \tag{57}$$

Крім того, за умови

$$\operatorname*{ess\,inf}_{t\in[a,b]} \int\limits_{\tau}^{t} q(s)ds \ge -c \tag{58}$$

єдиний розв'язок задачі (53), (54) є невід'ємним.

Для того щоб скористатися теоремою 9 в даному випадку, при майже всіх t з проміжку $[a,b]$ покладемо

$$h(t,s) := \begin{cases} p(s)\operatorname{sign}(t-\tau), & \text{якщо } s \in [\min\{\tau,t\}, \max\{\tau,t\}], \\ 0, & \text{якщо } s \notin [\min\{\tau,t\}, \max\{\tau,t\}]. \end{cases}$$

Виконуючи обчислення, з (27) отримуємо

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]\setminus\{\tau\}} |t-\tau|^{1-\alpha} \int\limits_{\min\{\tau,t\}}^{\max\{\tau,t\}} p(\xi) \Bigg[|\omega(\xi)-\tau|^{\alpha} +$$

$$+ \varrho \int\limits_{\min\{\tau,\omega(\xi)\}}^{\max\{\tau,\omega(\xi)\}} \int\limits_{\min\{\tau,s\}}^{\max\{\tau,s\}} p(\eta)|\omega(\eta)-\tau|^{\alpha} d\eta ds \Bigg] d\xi \le \frac{2\alpha}{\varrho},$$

і, отже, для майже всіх t з $[a, b]$

$$\int_{\tau}^{t} p(\xi)\mathrm{sign}\,(t-\tau)\Bigg[|\omega(\xi)-\tau|^{\alpha}+$$

$$+\,\varrho\int_{\tau}^{\omega(\xi)}\int_{\tau}^{t} p(\eta)\mathrm{sign}\,(s-\tau)|\omega(\eta)-\tau|^{\alpha}d\eta ds\Bigg]d\xi \leq \frac{2\alpha}{\varrho}|t-\tau|^{\alpha-1}.$$

Тому в даному випадку справджується умова (56). Застосування теореми 9 завершує доведення.

7.8. Доведення наслідку 3. Потрібне твердження випливає з теореми 5 при $\alpha = 1$.

7.9. Доведення теореми 6. Теорема 6 випливає з теореми 3 у випадку, коли $n = 1$, $p_{11} = p, \omega_{11} = \omega, \sigma_1 = 1, \alpha_1 = \alpha$.

7.10. Доведення наслідку 4. Достатньо зазначити, що при $\tau \in \{a, b\}$ припущення (32) (відповідно (33)) забезпечує виконання умов наслідку 2 (відповідно наслідку 3). Крім того, при $\tau = a$ (відповідно $\tau = b$) умова (34) (відповідно (35)), як можна перевірити, рівносильна умові (25).

1. *Lomtatidze A., Štěpánková H.* On sign constant and monotone solutions of second order linear functional differential equations // Mem. Different. Equat. and Math. Phys. — 2005. — **35**. — P. 65 – 90.

2. *Štěpánková H.* On nonnegative solutions of initial value problems for second order linear functional differential equations // Georgian Math. J. — 2005. — **12**, № 3. — P. 525 – 533.

3. *Ronto A. N.* Exact solvability conditions for the Cauchy problem for systems of first-order linear functional-differential equations determined by $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-positive operators // Ukr. Math. J. — 2003. — **55**, № 11. — P. 1541 – 1568.

4. *Самойленко А. М., Дільна Н.З., Ронто А. М.* Розв'язність задачі Коші для лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з перетвореним аргументом // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 3. — С. 387 – 402.

5. *Дильная Н. З. , Ронто А. Н.* Некоторые новые условия разрешимости задачи Коши для систем линейных функционально-дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 2004. —**56**, № 7. — С. 867 – 884.

6. *Дильная Н. З. , Ронто А. Н.* О разрешимости задачи Коши для систем линейных функционально-дифференциальных уравнений с $(\vec{\sigma}, \tau)$-положительными правыми частями // Допов. НАН України. — 2004. — № 2. — С. 29 – 35.

7. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 280с.

Одержано 05.06.2006,
після доопрацювання — 20.10.2006