УДК 517.928

АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ З НЕСТАБІЛЬНИМ СПЕКТРОМ

М. О. Рашевський

Криворіз. техн. ун-т
Україна, 50027, Кривий Ріг Дніпропетровської обл., вул. XXII Партз'їзду, 11

We construct an asymptotics for the Cauchy problem for a weakly nonlinear system of ordinary differential equations in the case where there is a turning point. The linear part of the system contains an almost diagonal matrix.

Побудовано асимптотику розв'язку задачі Коші для слабконелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь при наявності точки повороту. Лінійна частина системи містить майже діагональну матрицю.

Системи вигляду

$$\varepsilon^h \frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t,\varepsilon)\,\mathbf{x}(t,\varepsilon) + \varepsilon^p \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \tag{1}$$

вивчались у роботах [1–4], де побудовано асимптотичні розв'язки на проміжку $t \in [0, L]$, $L < \infty$. Тут $\mathbf{x}(t,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, $A(t,\varepsilon)$ — матриця розмірів $n \times n$, що зображується збіжним рядом за степенями дійсного малого параметра $\varepsilon > 0 : A(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t), h, p$ — додатні раціональні числа; $f(t,x)$ — многочлен степеня $N \geq 2$: $f(t,\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|=2}^{N} f_k(t)\,\mathbf{x}^k$; $\mathbf{k} = (\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2, \ldots, \mathrm{k}_n)$ з $|\mathbf{k}| = \mathrm{k}_1 + \mathrm{k}_2 + \ldots + \mathrm{k}_n$, $\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$. Для системи (1) ставиться задача Коші:

$$\mathbf{x}(0,\varepsilon) = \mathbf{x}^0. \tag{2}$$

При побудові асимптотики розв'язку задачі (1), (2) істотною є стабільність спектра матриці $A(t,0)$. Системи вигляду (1) із нестабільним спектром багатомасштабним методом досліджувались у [1]. У даній роботі для розв'язання задачі (1), (2) пропонується спосіб побудови асимптотики, що фактично є двомасштабною (при $h = 1$), проте, маючи вигляд багатофазового ряду [5], не вимагає „склеювання". При побудові формального розв'язку задачі (1), (2) у п. 1 не накладаються умови на наявність чи відсутність резонансу. Тут метод [3] модифіковано для інтегрування систем із точкою повороту. Для спрощення побудови формального ряду в п. 2 пропонується інший підхід, де наявність резонансу вже істотно впливає на дещо простіший спосіб визначення коефіцієнтів. У п. 3 з'ясовується питання про асимптотичний характер формального розв'язку, побудованого у п. 2, та наведено оцінку похибки.

Вимагається виконання таких умов:

1^0) матриці $A_k(t)$ і коефіцієнти полінома $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ є нескінченно диференційовними на проміжку $[0, L]$;

2^0) корені характеристичного рівняння $P(\lambda, t, 0) = 0$ задовольняють умови $\lambda_i(t) = t^q \mu_i(t)$, $\mu_i(t) \neq \mu_j(t)$ для $i \neq j$, $q \geq 1$ — ціле число, $i, j = \overline{1, n}$; $P(\lambda, t, \varepsilon) \equiv \det \|A(t, \varepsilon) - \lambda E\|$, E — одинична матриця;

3^0) існує невироджена матриця $T(t)$ така, що

$$T^{-1}(t) A(t, 0) T(t) = \Lambda(t) = \mathrm{diag}\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)\}.$$

Системи вигляду (1), коефіцієнти яких задовольняють умови 1^0, 3^0, називаються майже діагональними. Елементи матриці $T(t)$, згідно з [6], є нескінченно диференційовними на $[0, L]$. Внаслідок виконання умови 2^0 спектр матриці $A(t, 0)$ є принаймні точково-резонансним [2], тобто існують цілочислові вектори $\mathbf{m} = (\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2, \ldots, \mathrm{m}_n)$ з $|\mathbf{m}| \geq 2$ такі, що функції $\Phi(t, s, \mathbf{m}) \equiv (\mathbf{m}, \lambda(t)) - \lambda_s(t)$ обертаються в нуль при деяких t і $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тут $(\mathbf{m}, \lambda(t)) \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \lambda_k(t)$; у точці повороту $t = 0$ [1, 2, 5, 6] рівність $\Phi(0, s, \mathbf{m}) = 0$ виконується для будь-яких s і $\mathbf{m}$. Оскільки будується розв'язок на скінченному проміжку, то випадок $p > h$ не потребує досліджень. Випадок $h > 1$ вимагає залучення багатомасштабного методу і викликає суто технічні, хоча і значні (у зв'язку із склеюванням асимптотик) труднощі. Тому вимагатимемо виконання нерівностей

$$1 = h \geq p, \qquad p > \frac{q}{q+1}, \tag{3}$$

а також, щоб точка повороту була єдиною резонансною точкою, тобто для будь-якого $t \in [0, L]$ і $s = \overline{1, n}$

$$\Phi(t, s, \mathbf{m}) \neq 0. \tag{4}$$

Ця умова не є принциповою, і її можна зняти, що призведе лише до труднощів при розв'язуванні наведених у схемі рівнянь, але не до істотних змін способу побудови формального розв'язку. У випадку суто уявних $\lambda_i(t)$ асимптотику розв'язку задачі (1), (2) побудовано у роботі [4].

1. Для побудови розв'язку системи (1) скористаємося методом [4], що полягає у послідовних наближеннях за такою схемою:

1) будуємо розв'язок системи $\varepsilon^h \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t, \varepsilon)\mathbf{x}(t, \varepsilon)$, обмежуючись нульовим наближенням $\mathbf{x}(t, \varepsilon, 0)$; $\mathbf{x}(0, \varepsilon, 0) = \mathbf{x}^0$;

2) будуємо перше наближення системи

$$\varepsilon^h \frac{d\mathbf{x}(t, \varepsilon, 1)}{dt} = A(t, \varepsilon)\mathbf{x}(t, \varepsilon, 1) + \varepsilon^p \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t, \varepsilon, 0)), \quad \mathbf{x}(t, \varepsilon, 1) = \mathbf{x}^0;$$

3) одержавши $(k-1)$-ше наближення, будуємо k-те наближення для розв'язку системи

$$\varepsilon^h \frac{d\mathbf{x}(t, \varepsilon, k)}{dt} = A(t, \varepsilon)\mathbf{x}(t, \varepsilon, k) + \varepsilon^p \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t, \varepsilon, k-1)), \mathbf{x}(t, \varepsilon, k) = \mathbf{x}^0, \ \ k = 2, 3, \ldots.$$

У роботі [3] доведено, що у випадку стабільного спектра матриці $A(t, 0)$, $h = 1$ і при виконанні певних умов, зокрема умови

$$\mathrm{Re}\lambda_i(t) \leq 0, \ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

k-те наближення $\mathbf{x}(t,\varepsilon,k)$ є асимптотичним зображенням деякого точного розв'язку $\mathbf{x}(t,\varepsilon)$ задачі (1), (2) і справедлива оцінка $\|\mathbf{x}(t,\varepsilon)-\mathbf{x}(t,\varepsilon,k)\| \le C\varepsilon^{k-2}$; тут і далі буквою C позначено константи, що зустрічаються в оцінках норм векторів і не залежать від ε. Застосування описаної схеми для системи з точкою повороту потребує деякої модифікації, основу якої складатиме метод В. Вазова [6] для інтегрування майже діагональних лінійних систем із точкою повороту, який застосуємо до ланцюжка лінійних систем, з яких визначаються коефіцієнти формального ряду.

У відповідності з наведеною схемою розв'язуємо систему $\varepsilon\mathbf{x}'(t,\varepsilon,0) = A(t,\varepsilon)\mathbf{x}(t,\varepsilon,0)$, обмежуючись нульовим наближенням; $\mathbf{x}(0,\varepsilon,0) = \mathbf{x}^0$. Одержуємо

$$\mathbf{x}(t,\varepsilon,0) = T(t)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int\limits_0^t \Lambda(s)\,ds\right\}T^{-1}(0)\,\mathbf{x}^0,$$

де вектор $\mathbf{C}_0 = T^{-1}(0)\,\mathbf{x}^0$. Запишемо рівняння (аргументами матриці T нехтуємо)

$$\varepsilon\mathbf{x}'(t,\varepsilon,1) = \left(A(t,0)+\varepsilon T'T^{-1}\right)\mathbf{x}(t,\varepsilon,1) + P(t,\varepsilon,\mathbf{x}(t,\varepsilon,0)),\ \mathbf{x}(0,\varepsilon,1) = \mathbf{x}^0,$$

де $P(t,\varepsilon,\mathbf{x}) = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) - \varepsilon^{1-p}\left(T'T^{-1} + (A(t,\varepsilon)-A(t,0))\right)\mathbf{x}$. Тут і далі штрихом позначено похідну по t. Права частина записаного рівняння є вектором-стовпцем із r-ю координатою вигляду $f_r = f_r^{(k_{1,r},k_{2,r},\ldots,k_{n,r})}\exp\left\{\varepsilon^{-1}(\mathbf{k_r},\lambda(t))\right\}$. Записавши розв'язок останнього рівняння

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t,\varepsilon,1) = {} & \mathbf{x}(t,\varepsilon,0,\mathbf{C}_1) + \\ & + \varepsilon^{p-1}T(t)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int\limits_0^t\Lambda(s)\,ds\right\}\int\limits_{a_r}^t\exp\left\{-\varepsilon^{-1}\int\limits_0^s\Lambda(s_1)\,ds_1\right\}\times \\ & \times T^{-1}(s)\,P(s,\varepsilon,\mathbf{x}(s,\varepsilon,0))\,ds, \end{aligned} \tag{6}$$

зауважимо, що інтеграл у правій частині рівності (6) слід розуміти як суму інтегралів, кожен із яких відповідає доданкові в сумі, що зображує P. У кожнім інтегралі вибираємо нижню межу так: $a_r = 0$, якщо $\mathrm{Re}\Phi(t,r,\mathbf{k_r}) \le 0$, і $a_r = L$ — у противному разі. Зазначена процедура можлива внаслідок виконання нерівності (4). Набір довільних сталих визначаємо так, щоб задовольнити початкову умову. Очевидно, що у випадку суто уявних $\lambda_k(t)$ одержуємо $a_r = 0$, $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_0$, і розв'язок $\mathbf{x}(t,\varepsilon,1)$ у якості другого доданка містить перший елемент фазового ланцюжка багатофазового ряду [5]. Внаслідок резонансу в точці повороту інтеграли у правій частині (6) не спрощуються. Їх обчислення потребує спеціальних методів, а оцінку можна одержати методом [7], що приводить до нерівності

$$\|\mathbf{x}(t,\varepsilon,1)-\mathbf{x}(t,\varepsilon,0,\mathbf{C}_1)\| \le C\varepsilon^{(p-1)+\frac{1}{q+1}}. \tag{7}$$

Припустивши, що побудовано $(k-1)$-ше наближення $\mathbf{x}(t,\varepsilon,k-1)$, для $\mathbf{x}(t,\varepsilon,k)$ маємо таке рівняння:

$$\varepsilon \mathbf{x}'(t,\varepsilon,k) = \left(A(t,0)+\varepsilon T'T^{-1}\right)\mathbf{x}(t,\varepsilon,k) + $$
$$+\ P(t,\varepsilon,\mathbf{x}(t,\varepsilon,k-1)), \qquad \mathbf{x}(0,\varepsilon,k) = \mathbf{x}^0,\ \ k=1,2,\ldots .$$

Розв'язок останнього рівняння запишемо у вигляді

$$\mathbf{x}(t,\varepsilon,k) = \mathbf{x}(t,\varepsilon,0,\mathbf{C}_k) + $$
$$+\ \varepsilon^{p-1}T(t)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int\limits_0^t \Lambda(s)\,ds\right\}\int\limits_{a_r}^t \exp\left\{-\varepsilon^{-1}\int\limits_0^s \Lambda(s_1)\,ds_1\right\}\times$$
$$\times\ T^{-1}(s)\,P(s,\varepsilon,\mathbf{x}(s,\varepsilon,k-1))\,ds. \tag{8}$$

Тут зручно ввести позначення $\mathbf{u}_{00}(t,\varepsilon) = \mathbf{x}(t,\varepsilon,0)$. Помітивши, що $\mathbf{x}(t,\varepsilon,1)$ є сумою двох доданків, запишемо $\mathbf{x}(t,\varepsilon,1) = \mathbf{u}_{00}(t,\varepsilon) + \varepsilon^{p-1}\mathbf{u}_{11}(t,\varepsilon)$, де вектор $\mathbf{u}_{11}(t,\varepsilon)$ містить компоненти вигляду $\int\limits_a^t f(s,t)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\varphi(s,t)\,s^{q+1}\right\}ds$. Відповідно до оцінки (7) $\|\mathbf{u}_{11}(t,\varepsilon)\| \leq$ $\leq C\varepsilon^{\frac{1}{q+1}}$. Розв'язуючи рівняння для $\mathbf{x}(t,\varepsilon,2)$, одержуємо

$$\mathbf{x}(t,\varepsilon,2) = \mathbf{u}_{00}(t,\varepsilon) + \varepsilon^{p-1}\mathbf{u}_{12}(t,\varepsilon) + \varepsilon^{2(p-1)}\mathbf{u}_{22}(t,\varepsilon) + \ldots,$$

де $\mathbf{u}_{22}(t,\varepsilon)$ — вектор з компонентами, що містять інтеграли записаного вище типу під знаками подібних інтегралів. Для $\mathbf{x}(t,\varepsilon,k)$ одержуємо

$$\mathbf{x}(t,\varepsilon,k) = \mathbf{u}_{00}(t,\varepsilon) + \varepsilon^{p-1}\mathbf{u}_{1\mathbf{k}}(t,\varepsilon) + \varepsilon^{2(p-1)}\mathbf{u}_{2\mathbf{k}}(t,\varepsilon) + \ldots + \varepsilon^{k(p-1)}\mathbf{u}_{\mathbf{kk}}(t,\varepsilon) + \ldots . \tag{9}$$

Таким чином, вираз (8) після групування доданків одного порядку можна переписати у вигляді (9), що є аналогом багатофазового ряду, а для суто уявних коренів полінома $P(\lambda,t,0)$ і багатофазовим рядом, одержаним для лінійних систем у роботі [5]. У загальному випадку запис для $\mathbf{x}(t,\varepsilon,m)$ містить Nm доданків, але перед $(m+1)$-м кроком доданками з другим індексом, що перевищує m, нехтуємо, отримуючи m-те наближення у відповідності зі схемою $1-3$. Оцінюючи інтеграли $\mathbf{u}_{mk}(t,\varepsilon)$ методом [7], одержуємо таке твердження.

Лема. *Якщо виконуються умови 1^0–3^0, (4) і перша з нерівностей (3), то для доданків у правій частині формули (9) справедливі оцінки*

$$\|\mathbf{u}_{\mathbf{mk}}(t,\varepsilon)\| \leq C\varepsilon^{\gamma(k)},\ \gamma(k) = \frac{k}{q+1},\ m,k \geq 1.$$

Повторюючи міркування [3], з урахуванням оцінок леми одержуємо таке твердження.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови $1^0 - 3^0$, (3) – (5) і на $[0, L]$ існує розв'язок задачі (1), (2), то він має асимптотичне зображення (9) і справедлива оцінка*

$$\|\mathbf{x}(t,\varepsilon) - \mathbf{x}(t,\varepsilon,k)\| \leq C\varepsilon^{m(p,q,k)}, \text{ де } m(p,q,k) = (k+1)p - \frac{kq}{q+1}.$$

Приклад. Проілюструємо запропонований спосіб для скалярного рівняння

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = tax + \mu b\sqrt{x},\ x(0,\varepsilon) = x^0.$$

Тут $a < 0, b$ — константи, μ — малий параметр. Нульове наближення рівняння $\varepsilon\frac{dx}{dt} = tax$ має вигляд $x(t,\varepsilon,0) = x^0 \exp\left\{\frac{at^2}{2\varepsilon}\right\}$. Будуючи перше наближення рівняння $\varepsilon\frac{dx}{dt} = tax + \mu b\sqrt{x^0}\exp\left\{\frac{at^2}{4\varepsilon}\right\}$, одержуємо $x(t,\varepsilon,1) = x^0\exp\left\{\frac{at^2}{2\varepsilon}\right\} + \sqrt{x^0}\frac{\mu b}{\varepsilon}\int\limits_0^t \exp\left\{\frac{as^2}{2\varepsilon}\right\}ds$; точний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$x(t,\varepsilon) = x^0\exp\left\{\frac{at^2}{2\varepsilon}\right\} + \sqrt{x^0}\frac{\mu b}{\varepsilon}\int\limits_0^t \exp\left\{\frac{as^2}{2\varepsilon}\right\}ds + \frac{\mu^2 b^2}{4\varepsilon^2}\left(\int\limits_0^t \exp\left\{\frac{as^2}{2\varepsilon}\right\}ds\right)^2.$$

Зауважимо, що хоча права частина рівняння і не є поліномом, проте одержано наближення точного розв'язку:

$$\|\mathbf{x}(t,\varepsilon) - \mathbf{x}(t,\varepsilon,1)\| = \frac{\mu^2 b^2}{4\varepsilon^2}\left(\int\limits_0^t \exp\left\{\frac{as^2}{2\varepsilon}\right\}ds\right)^2 \leq C\mu^2\varepsilon^{-1}.$$

Нерівності (3) у даному випадку забезпечать умову $\mu^2\varepsilon^{-1} \to 0$. Виникає питання про можливість побудови формального розв'язку задачі (1), (2) у вигляді (9), що є більш звичним у теорії асимптотичного інтегрування. Для стабільного спектра при відсутності резонансу така побудова є досить простою, у той час як послідовні наближення за наведеною схемою є громіздкою процедурою. Дослідженню цього питання присвячено наступний пункт роботи.

2. Формальний розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді

$$\mathbf{x}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{kp}\mathbf{x}_k(t,\varepsilon). \tag{10}$$

Підставляючи (10) у (1), одержуємо тотожність, яку запишемо так:

$$\varepsilon\mathbf{x}'(t,\varepsilon) = \big(A(t,0) + \varepsilon T'T^{-1} - \varepsilon T'T^{-1} + (A(t,\varepsilon) - A(t,0))\big)\mathbf{x}(t,\varepsilon) + \varepsilon^p\mathbf{f}(t,\mathbf{x}(t,\varepsilon)), \tag{11}$$

і відповідно до методу Вазова, прирівнюючи коефіцієнти при степенях ε^p, вільними членами вважаємо $\varepsilon\mathbf{x}_0'(t,\varepsilon)$ та $A(t,0)+\varepsilon T'T^{-1}$. Отримуємо рівняння (аргументами деяких матриць нехтуємо):

$$\begin{aligned}
&\left(\varepsilon^0\right): && \left(A(t,0)+\varepsilon T'T^{-1}\right)\mathbf{x}_0(t,\varepsilon)=\varepsilon\mathbf{x}_0'(t,\varepsilon), \quad \mathbf{x}_0(0,\varepsilon)=\mathbf{x}^0,\\
&\left(\varepsilon^p\right): && \left(A(t,0)+\varepsilon T'T^{-1}\right)\mathbf{x}_1(t,\varepsilon)+P_1(t,\varepsilon,\mathbf{x}_0)=\varepsilon\mathbf{x}_1'(t,\varepsilon), \quad \mathbf{x}_1(0,\varepsilon)=0,\\
&\left(\varepsilon^{2p}\right): && \left(A(t,0)+\varepsilon T'T^{-1}\right)\mathbf{x}_2(t,\varepsilon)+P_2(t,\varepsilon,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1)=\varepsilon\mathbf{x}_2'(0,\varepsilon), \quad \mathbf{x}_2(0,\varepsilon)=0,\\
& && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\left(\varepsilon^{kp}\right): && \left(A(t,0)+\varepsilon T'T^{-1}\right)\mathbf{x}_k(t,\varepsilon)+P_k(t,\varepsilon,\mathbf{x}_0,\ldots,\mathbf{x}_{k-1})=\varepsilon\mathbf{x}_k'(t,\varepsilon), \quad \mathbf{x}_k(0,\varepsilon)=0,
\end{aligned} \tag{12}$$

$k=3,4,\ldots$, $P_1(t,\varepsilon,\mathbf{x}_0)=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_0)-\varepsilon^{1-p}\left(T'T^{-1}+(A(t,\varepsilon)-A(t,0))\right)\mathbf{x}_0$, $P_2(t,\varepsilon,\mathbf{x}_0)=$ $=\mathbf{f}_x(t,\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_1-\varepsilon^{1-p}\left(T'T^{-1}+(A(t,\varepsilon)-A(t,0))\right)\mathbf{x}_1$, $P_k(t,\varepsilon,\mathbf{x}_0,\ldots,\mathbf{x}_{k-1})$ — поліном, лінійний відносно $\mathbf{x}_{k-1}$; $\mathbf{f}_x$ — похідна по x. З рівняння $\left(\varepsilon^0\right)$ знаходимо

$$\mathbf{x}_0(t,\varepsilon,\mathbf{C}_0)=T(t)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_0^t\Lambda(s)\,ds\right\}T^{-1}(0)\,\mathbf{x}^0,$$

де вектор $\mathbf{C}_0=T^{-1}(0)\,\mathbf{x}^0$. Підставляючи вираз для $\mathbf{x}_0(t,\varepsilon)$ у рівняння (ε^p), одержуємо систему

$$\varepsilon\mathbf{x}_1'(t,\varepsilon)=\left(A(t,0)+\varepsilon T'T^{-1}\right)\mathbf{x}_1(t,\varepsilon)+\mathbf{f}_1(t,\mathbf{x}_0).$$

Права частина системи є вектором із r-ю координатою вигляду

$$f_r=f_r^{(k_{1,r},k_{2,r},\ldots,k_{n,r})}\exp\left\{\varepsilon^{-1}(\mathbf{k_r},\lambda(t))\right\}.$$

Записавши розв'язок $\mathbf{x}_1(t,\varepsilon)$ у вигляді

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t,\varepsilon)=\ &\mathbf{x}_0(t,\varepsilon,\mathbf{C}_1)+\\
&+\ \varepsilon^{-1}T(t)\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_0^t\Lambda(s)\,ds\right\}\int_{a_r}^t\exp\left\{-\varepsilon^{-1}\int_0^s\Lambda(s_1)\,ds_1\right\}\times\\
&\times\ T^{-1}(s)\,P_1(s,\varepsilon,\mathbf{x}_0)\,ds,
\end{aligned}$$

зазначимо, що, як і в попередньому пункті, інтеграл у правій частині останньої рівності є сумою інтегралів, кожен з яких відповідає доданкові в зображенні $P_1(s,\varepsilon,\mathbf{x}_0)$. У кожному інтегралі вибираємо нижню межу таким чином: $a_r=0$, якщо $\mathrm{Re}\Phi(t,r,\mathbf{k_r})\le 0$, і $a_r=L$ — у противному разі. Набір довільних сталих визначаємо так, щоб задовольнити початкову умову. Як і вище, у випадку суто уявних $\lambda_k(t)$ маємо $a_r=0$, $\mathbf{C}_1=0$ — нуль-вектор і $\mathbf{x}_1(t,\varepsilon)$ містить перший елемент фазового ланцюжка багатофазового ряду [5]. Оцінюючи інтеграли у правій частині методом [7], отримуємо такі нерівності:

$$w(t)\,\varepsilon^{\gamma(1)}\le\|\varepsilon\mathbf{x}_1(t,\varepsilon)\|\le C\varepsilon^{\gamma(1)},$$

де $\gamma(1) = \dfrac{1}{q+1}$ у випадку точки повороту або точкового резонансу кратності q, $\gamma(1) = 0$ у випадку тотожного резонансу, $w(t) \geq 0$ — обмежена функція, така, що $w(0) = 0$. Отже, $\mathbf{x}_1(t,\varepsilon)$ є обмеженим лише у випадку $q = 0$ (немає точки повороту і точкового резонансу). У такому разі для знаходження $\mathbf{x}_2(t,\varepsilon)$ у праву частину рівняння $\left(\varepsilon^{2p}\right)$ підставимо $\mathbf{x}_1(t,\varepsilon)$, що є обмеженим при $\varepsilon \to 0$, і, застосувавши метод [3], побудуємо $\mathbf{x}_2(t,\varepsilon)$ та інші наближення. Вираз для $\mathbf{x}_k(t,\varepsilon)$ запишемо так:

$$\mathbf{x}_k(t,\varepsilon) = \mathbf{x}_0(t,\varepsilon,\mathbf{C}_k) +$$

$$+ \varepsilon^{-1} T(t) \exp\left\{\varepsilon^{-1}\int\limits_0^t \Lambda(s)\,ds\right\} \int\limits_{a_r}^t \exp\left\{-\varepsilon^{-1}\int\limits_0^s \Lambda(s_1)\,ds_1\right\} \times$$

$$\times T^{-1}(s) P_1(s,\varepsilon,\mathbf{x}_0,\ldots,\mathbf{x}_{k-1})\,ds.$$

Для інтегрування ж систем (11) із резонансними членами така побудова призведе до зростання особливості по ε у кожному наступному коефіцієнті $\mathbf{x}_k(t,\varepsilon)$ і зрештою до виконання нерівностей $\left\|\varepsilon^{kp}\mathbf{x}_k(t,\varepsilon)\right\| \ll \left\|\varepsilon^{(k-1)p}\mathbf{x}_{k-1}(t,\varepsilon)\right\|$ при $\varepsilon \to 0$ і фіксованому $t > 0$, $k = 2, 3, \ldots$, а останнє — до необмеженості залишкового члена — типова ситуація для задач із точкою повороту. У зв'язку з цим застосуємо у відповідності з методом Вазова перегрупування доданків у тотожності (11), а саме: прирівнюючи коефіцієнти при степенях ε^p, вільними членами вважаємо $\varepsilon\mathbf{x}_0'(t,\varepsilon)$, $A(t,0)+\varepsilon T'T^{-1}$ та $\varepsilon^p R_0(t,\mathbf{x}_0)$, $\varepsilon^p R_1(t,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1), \ldots$, де $R_0(t,\mathbf{x}_0)$, $R_1(t,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1), \ldots$, — вектори, що містять лише точково або тотожно резонансні мономи, тобто доданки вигляду $\mathbf{f}_k(t,\mathbf{x}_k)$, для яких функція $\Phi(t,s,\mathbf{k})$ дорівнює нулю тотожно або в окремих точках проміжку $[0,L]$. У даному випадку внаслідок умов 2^0 та (4) кожен моном є резонансним лише у точці повороту. Таке групування призведе до того, що всі резонансні мономи із k-го рівняння системи (12) перейдуть у $(k-1)$-ше із множником ε^p і згадана система набере вигляду

$$\left(\varepsilon^0\right): \quad \left(A(t,0) + \varepsilon T'T^{-1}\right)\mathbf{x}_0(t,\varepsilon) + \varepsilon^p R_0(t,\mathbf{x}_0) = \varepsilon\mathbf{x}_0'(t,\varepsilon), \quad \mathbf{x}_0(0,\varepsilon) = \mathbf{x}^0,$$

$$\left(\varepsilon^p\right): \quad \left(A(t,0) + \varepsilon T'T^{-1}\right)\mathbf{x}_1(t,\varepsilon) + P_{10}(t,\varepsilon,\mathbf{x}_0) + \varepsilon^p R_1(t,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1) = \varepsilon\mathbf{x}_1'(t,\varepsilon), \quad \mathbf{x}_1(0,\varepsilon) = 0,$$

$$\left(\varepsilon^{2p}\right): \quad \left(A(t,0) + \varepsilon T'T^{-1}\right)\mathbf{x}_2(t,\varepsilon) + P_{21}(t,\varepsilon,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1) + \varepsilon^p R_1(t,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \varepsilon\mathbf{x}_2'(0,\varepsilon), \quad \mathbf{x}_2(0,\varepsilon) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\varepsilon^{kp}\right): \quad \begin{gathered}\left(A(t,0) + \varepsilon T'T^{-1}\right)\mathbf{x}_k(t,\varepsilon) + P_{k,k-1}(t,\varepsilon,\mathbf{x}_0,\ldots,\mathbf{x}_{k-1}) + \\ +\varepsilon^p R_k(t,\mathbf{x}_0,\ldots,\mathbf{x}_{k-1},\mathbf{x}_k) = \varepsilon\mathbf{x}_k'(t,\varepsilon), \qquad \mathbf{x}_k(0,\varepsilon) = 0,\end{gathered} \tag{13}$$

де $P_{k,k-1}(t,\varepsilon,\mathbf{x}_0,\ldots,\mathbf{x}_{k-1})$ — поліном $P_k(t,\varepsilon,\mathbf{x}_0,\ldots,\mathbf{x}_{k-1})$ системи (12) без резонансних мономів, які відійшли до попереднього $(k-1)$-го рівняння, $k = 1, 2, \ldots$. Виписати явно розв'язки системи (13) у загальному випадку неможливо, тому, застосувавши результати п. 1, переконаємося в обмеженості $\mathbf{x}_k(t,\varepsilon)$. Так, застосувавши до рівняння $\left(\varepsilon^0\right)$ схему 1 – 3, отримаємо згідно з теоремою 1 m-те наближення $\mathbf{x}_0(t,\varepsilon,m)$, причому внаслідок (5) і оцінок леми матимемо $\|\mathbf{x}_0(t,\varepsilon,m)\| \le C$. Розв'язавши наступні рівняння системи (13), отримаємо оцінки $\|\mathbf{x}_k(t,\varepsilon,m-k)\| \le C\varepsilon^{\gamma(k)}$, $\gamma(k) = \dfrac{k}{q+1}$, які доводять обмеженість коефіцієнтів формального ряду (10). Асимптотичний характер формального розв'язку з'ясуємо у п. 3. Наведемо приклади, які показують, що розв'язування системи (12) дає перші наближення для розв'язку системи (13). Приклади запозичено із [2], де розв'язувались іншим методом.

Приклад 1. Розглянемо систему

$$\varepsilon\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} \varepsilon z^3 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

з початковими умовами

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^0 \\ z^0 \end{pmatrix}.$$

Побудувавши нульове наближення як розв'язок системи

$$\varepsilon\begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

отримаємо

$$y_0 = y^0 \exp\left\{\frac{\lambda_1 t}{\varepsilon}\right\}, \qquad z_0 = z^0 \exp\left\{\frac{\lambda_2 t}{\varepsilon}\right\}.$$

Для обчислення першого наближення маємо систему

$$\varepsilon\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_0^2 e^{\frac{2\lambda_1 t}{\varepsilon}} \end{pmatrix}.$$

Якщо $2\lambda_1 = \lambda_2$, то розв'язком останньої системи є вектор із координатами $y_1 = 0$, $z_1 = C\exp\left\{\dfrac{\lambda_2 t}{\varepsilon}\right\} + \varepsilon^{-1}\left(y^0\right)^2 t\exp\left\{\dfrac{\lambda_2 t}{\varepsilon}\right\}$. Другий доданок у z_1 є необмеженим при $y^0 \ne 0$, $\varepsilon \to 0$ і фіксованому $t > 0$, і йому „варто було б знаходитися” у виразі для z_0. Дійсно, знаходячи y_0, z_0 із системи, яка утворена перенесенням резонансного монома y_0^2 із першого рівняння системи (12) у нульове:

$$\varepsilon\begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} 0 \\ y_0^2 \end{pmatrix},$$

маємо нульове наближення: $y_0 = y^0\exp\left\{\dfrac{\lambda_1 t}{\varepsilon}\right\}$, $z_0 = z^0\exp\left\{\dfrac{\lambda_2 t}{\varepsilon}\right\} + \left(y^0\right)^2 t\exp\left\{\dfrac{\lambda_2 t}{\varepsilon}\right\}$, і перше наближення, визначене системою (13), буде обмеженим при $\varepsilon \to 0$.

Приклад 2. Побудуємо розв'язок задачі

$$\varepsilon\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} y^2 z \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^0 \\ z^0 \end{pmatrix}.$$

Нульове наближення запишеться так:

$$y_0 = y^0 \exp\left\{-\frac{it}{\varepsilon}\right\}, \qquad z_0 = z^0 \exp\left\{\frac{it}{\varepsilon}\right\}.$$

Для обчислення першого наближення маємо систему

$$\varepsilon\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(y^0\right)^2 z^0 \exp\left\{-\frac{it}{\varepsilon}\right\} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок записаної системи $y_1 = y^0 \exp\left\{-\dfrac{it}{\varepsilon}\right\} + \varepsilon^{-1} t \left(y^0\right)^2 z^0 \exp\left\{-\dfrac{it}{\varepsilon}\right\}, z_0 = z^0 \exp\left\{\dfrac{it}{\varepsilon}\right\}$ є необмеженим при $\varepsilon \to 0$ і фіксованому $t > 0$. Записавши отримане наближення як $y_0 + \varepsilon y_1 = \left(y^0 + t\left(y^0\right)^2 z^0\right) \exp\left\{-\dfrac{it}{\varepsilon}\right\}$, можна переконатися, що саме таким повинно бути нульове наближення — розв'язок системи, отриманої перенесенням з множником ε резонансного монома $y_0^2 z_0$ із рівняння $\left(\varepsilon^1\right)$ у рівняння $\left(\varepsilon^0\right)$. Точний розв'язок розглядуваної системи має вигляд

$$z(t,\varepsilon) = z^0 \exp\left\{\frac{it}{\varepsilon}\right\}, \qquad y(t,\varepsilon) = \frac{y^0 \exp\left\{-\frac{it}{\varepsilon}\right\}}{1 - y^0 z^0 t},$$

і в околі точки повороту, що не залежить від ε, виконується нерівність $|y_0(t,\varepsilon) - y(t,\varepsilon)| \leq$ $\leq C\varepsilon$.

Зауважимо, що рівняння $\left(\varepsilon^0\right)$ є нормальною формою [8] системи (1). Отже, даний підхід дозволяє інтегрувати системи як з тотожним, так і з точковим резонансом. Точковому резонансу для сильно нелінійних систем присвячено дослідження [9], причому запропонований там метод не дозволяє інтегрувати системи з точкою повороту.

3. Для з'ясування асимптотичного характеру формального розв'язку, заданого формулою (10), скористаємося теоремою 33 із [2, с. 244]. Введемо до розгляду оператор

$$P_\varepsilon(\mathbf{u}) = \varepsilon\frac{d\mathbf{u}}{dt} - A(t,\varepsilon)\left(\mathbf{u} - \mathbf{x}^0\right) - \varepsilon^p \mathbf{f}\left(t, \mathbf{u} + \mathbf{x}^0\right),$$

що діє з банахового простору $B = \left\{\mathbf{u}(t) \,|\, \mathbf{u}(t) \in C^1[0,L],\ \mathbf{u}(0) = 0\right\}$ у банаховий простір $C[0,L]$ n-вимірних неперервних вектор-функцій; у просторах введено норми:

$$\|\mathbf{g}(t,\varepsilon)\|_{C[0,L]} = \max_{1\leq k\leq n} |g_k(t,\varepsilon)|, \qquad \|\mathbf{g}(t,\varepsilon)\|_B = \|\mathbf{g}(t,\varepsilon)\|_{C[0,L]} + \left\|\mathbf{g}'(t,\varepsilon)\right\|_{C[0,L]}.$$

За нульове наближення візьмемо $\mathbf{u}_0 = \mathbf{X}_m(t,\varepsilon) - \mathbf{x}^0$, де $\mathbf{X}_m(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^{kp} \mathbf{x}_{k(m)}(t,\varepsilon)$ — m-те наближення, утворене з (10), а $\mathbf{x}_{k(m)}(t,\varepsilon)$ — $(m-k)$-те наближення рівняння $\left(\varepsilon^{kp}\right)$

системи (13). Тоді згідно з теоремою 1 $P_\varepsilon(\mathbf{u}_0) = \varepsilon^{(m+1)p} R(t,\varepsilon)$, а застосувавши лему, отримаємо оцінку норми залишкового члена: $\|R(t,\varepsilon)\|_{C[0,L]} \le C\varepsilon^{-\frac{mq}{q+1}}$. Оскільки $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ — многочлен по $\mathbf{x}$ із нескінченно диференційовними коефіцієнтами, то оператор $P_\varepsilon(\mathbf{u})$ є нескінченно диференційовним у будь-якому шарі $\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_0\| \le r$ простору B. Тому друга похідна в цьому шарі задовольняє нерівність $\|P''_\varepsilon(\mathbf{u})\| \le C$. Таким чином, виконано всі умови теореми 33 [2], відповідно до якої можна стверджувати, що операторне рівняння $P_\varepsilon(\mathbf{u}) = 0$ має розв'язок $\mathbf{u}^*(t,\varepsilon) \in B$, причому $\left\|\mathbf{u}^*(t,\varepsilon) - \mathbf{X}_m(t,\varepsilon) + \mathbf{x}^0\right\| \le C\varepsilon^{m(p,q)}$, де $m(p,q) = (m+1)p - \dfrac{mq}{q+1}$. Це означає, що система (1) має розв'язок $\mathbf{x}(t,\varepsilon) = \mathbf{u}^*(t,\varepsilon) + \mathbf{x}^0$, який задовольняє нерівність

$$\|\mathbf{x}(t,\varepsilon) - \mathbf{X}_m(t,\varepsilon)\| \le C\varepsilon^{m(p,q)}. \qquad (14)$$

Таким чином, справедлива наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови теореми 1, то розв'язок задачі (1), (2) має асимптотичне зображення (10) і на проміжку* $[0,L]$ *виконується нерівність (14).*

Зауваження. Обмеження, що задане другою з нерівностей (3), викликане не лише особливостями запропонованого способу побудови розв'язку: при $p = \dfrac{q}{q+1}$ нелінійність стає настільки сильною, що означення точки повороту, використане у роботі, стає непридатним (див., наприклад, [1]).

1. *Богаевский В.Н., Повзнер А.Я.* Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. — М.: Наука, 1987. — 356 с.
2. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — 400 с.
3. *Старун І.І., Шкіль М.І.* Побудова розв'язків лінійних та квазілінійних сингулярно збурених систем звичайних диференціальних рівнянь // Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях: Зб. наук. праць. — Київ: Вища шк., 1993. — С. 141–157.
4. *Grimm L.J., Harris W.A.* Solutions of a singularly perturbed differential system with turning points // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec I. — 1989. — **36**, № 3. — P. 753–763.
5. *Кучеренко В.В., Осипов Ю.В.* Точные и асимптотические решения систем с точками поворота // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1986. — **50**, № 5. — С. 1000–1014.
6. *Wasow W.* Linear turning point theory. — New York: Acad. Press, 1985. — 246 p.
7. *Федорюк М.В.* Асимптотика: интегралы и ряды. — М.: Наука, 1987. — 544 с.
8. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 304 с.
9. *Сафонов В.Ф.* Многоточечный резонанс в сильно нелинейных сингулярно возмущенных системах дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1987. — **23**, № 3. — С. 529–530.

Одержано 19.09.2002