УДК 517 .9

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ГЛОБАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ З НЕЛІНІЙНИМИ ВІДХИЛЕННЯМИ АРГУМЕНТУ

Г. П. Пелюх, О. П. Олійниченко

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул.Терещенківська, 3

We obtain sufficient conditions for existence of a solution, which is continuously differentiable and bounded for $t \in \mathbb{R}$, of a system of differential-functional equations of neutral type with nonlinear deviations of the argument such that the deviations depend on an unknown function. We also study properties of this solution.

Одержано достатні умови існування неперервно диференційовного і обмеженого при $t \in R$ розв'язку системи диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу з нелінійними відхиленнями аргументу, що залежать від невідомої функції, та досліджено його властивості.

Розглянемо систему диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$x'(t) = Ax(t) + F(t, x(t), x(f(t, x(t))), x'(\varphi(t))), \tag{1}$$

де $t \in R$, $A = \text{diag}\,(A_1, A_2)$ (A_1, A_2 — дійсні, сталі матриці розміру відповідно $p \times p$ та $q \times q$, $p + q = m$), $F(t, x, y, z)$, $f(t, x)$, $\varphi(t)$ — деякі дійсні, неперервні при $t \in R$, $x, y, z \in R^m$ функції, і дослідимо властивості її неперервно диференційовного і обмеженого при $t \in \in R$ (разом із першою похідною) розв'язку. Оскільки для широких класів рівнянь вигляду (1) із лінійними відхиленнями аргументу ці питання добре вивчені [1–5], то основною нашою метою є одержання аналогічних результатів для системи рівнянь (1) у випадку, коли відхилення аргументу є нелінійними і залежать від невідомої функції.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються такі умови:*

1) $|\, e^{A_1 t} \,| \le N_1 e^{-\alpha_1 t}, \quad |\, e^{-A_2 t} \,| \le N_2 e^{-\alpha_2 t}, \quad t \in R^+$, *де* $\alpha_1, \alpha_2, N_1, N_2$ *— деякі додатні сталі;*

2) $|F(t, x', y', z') - F(t, x'', y'', z'')| \le L(|x' - x''| + |y' - y''| + |z' - z''|)$, $|f(t, x') - f(t, x'')| \le \le l\,|x' - x''|$, *де* $t \in R$, $x', y', z', x'', y'', z'' \in R^m$, *L, l — деякі додатні сталі;*

3) $|A| < 1$*;*

4) $\sup\limits_{t \in R} |F(t, 0, 0, 0)| = F^* < +\infty$.

Тоді при достатньо малих L, l існує неперервно диференційовний і обмежений при $t \in R$ (разом із першою похідною) розв'язок системи (1).

Доведення. Розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t - \tau) F(\tau, x(\tau), x(f(\tau, x(\tau))), x'(\varphi(\tau))) d\tau, \tag{2}$$

де $G(t) = \begin{cases} -\mathrm{diag}\,(0, e^{A_2 t}), & t < 0; \\ \mathrm{diag}\,(e^{A_1 t}, 0), & t > 0. \end{cases}$

Оскільки (в силу визначення) функція $G(t)$ задовольняє умови:

1) $G(+0) - G(-0) = E^m$ (E^m — одинична матриця розміру $m \times m$);

2) $\dot{G}(t) = AG(t), t \neq 0$,

то легко переконатися, що кожен розв'язок системи рівнянь (2) є розв'язком системи (1).

Використовуючи метод послідовних наближень, побудуємо розв'язок системи рівнянь (2). При цьому послідовні наближення $x_n(t)$, $n \geq 0$, визначимо за допомогою співвідношень

$$x_0(t) = 0,$$

$$x_0'(t) = 0,$$

$$x_{n+1}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau) F(\tau, x_n(\tau), x_n(f(\tau, x_n(\tau))), x_n'(\varphi(\tau))) d\tau, \tag{3}$$

$$x_{n+1}'(t) = Ax_{n+1}(t) + F(t, x_n(t), x_n(f(t, x_n(t))), x_n'(\varphi(t))), \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Покажемо, що при всіх $t \in R$ і $n \geq 0$ виконуються оцінки

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq Kq^n, \tag{4}$$

$$|x_{n+1}'(t) - x_n'(t)| \leq Kq^n, \tag{5}$$

де

$$K = \max\left\{F^*\left(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2}\right), F^*\left(|A|\left(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2}\right) + 1\right)\right\},$$

$$N = \min\left\{\left(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2}\right)^{-1}, 1 - |A|\right\},$$

$$q = \frac{1}{2N}\left(3L + N + (N - 3L)\sqrt{1 - \frac{4NLKl}{(N-3L)^2}}\right).$$

Оскільки при достатньо малих L, l виконуються нерівності

$$N - 3L > 0, \quad \frac{4NLKl}{(N-3L)^2} < 1,$$

то $0 < q < 1$. Легко переконатися, що q задовольняє рівняння

$$L\left(3 + \frac{K}{1-q}l\right) = Nq. \tag{6}$$

Оскільки

$$|x_1(t) - x_0(t)| = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)F(\tau,0,0,0)d\tau\right| \leq$$

$$\leq N_1 \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\alpha_1(t-\tau)}|F(\tau,0,0,0)|d\tau + N_2 \int\limits_{t}^{+\infty} e^{-\alpha_2(\tau-t)}|F(\tau,0,0,0)|d\tau \leq$$

$$\leq F^*\left(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2}\right),$$

$$|x_1'(t) - x_0'(t)| = |Ax_1(t) + F(t,0,0,0)| \leq$$

$$\leq |A||x_1(t)| + \sup_{t\in R}|F(t,0,0,0)| \leq$$

$$\leq F^*\left(|A|\left(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2}\right) + 1\right),$$

то оцінки (4), (5) мають місце при $n = 1$. Припустимо, що вони доведені для деякого $n-1$. Тоді, використовуючи (6) та нерівність

$$|x_n'(t)| \leq \sum_{i=0}^{n-1}|x_{i+1}'(t) - x_i'(t)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} Kq^i \leq \frac{K}{1-q},$$

можна показати, що оцінки (4), (5) не зміняться при переході від $n-1$ до n. Дійсно, на підставі (3) і умов теореми одержуємо

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)(F(\tau, x_n(\tau), x_n(f(\tau, x_n(\tau))), x_n'(\varphi(\tau)))-\right.$$

$$\left. - F(\tau, x_{n-1}(\tau), x_{n-1}(f(\tau, x_{n-1}(\tau))), x_{n-1}'(\varphi(\tau))))d\tau\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)|L(|x_n(\tau) - x_{n-1}(\tau)| + |x_n(f(\tau, x_n(\tau))) - x_n(f(\tau, x_{n-1}(\tau)))|+$$

$$+\ |x_n(f(\tau,x_{n-1}(\tau)))-x_{n-1}(f(\tau,x_{n-1}(\tau)))|+$$

$$+\ |x'_n(\varphi(\tau))-x'_{n-1}(\varphi(\tau))|)d\tau\ \le$$

$$\le\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|G(t-\tau)|L\Bigg(Kq^{n-1}+\frac{K}{1-q}\,|f(\tau,x_n(\tau))-f(\tau,x_{n-1}(\tau))|+$$

$$+\ Kq^{n-1}+Kq^{n-1}\Bigg)d\tau\ \le$$

$$\le\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|G(t-\tau)|L\left(3Kq^{n-1}+\frac{K}{1-q}lKq^{n-1}\right)d\tau\ \le$$

$$\le\ Kq^{n-1}L\left(3+\frac{K}{1-q}l\right)\left(N_1\int\limits_{-\infty}^{t}e^{-\alpha_1(t-\tau)}d\tau+N_2\int\limits_{t}^{+\infty}e^{-\alpha_2(\tau-t)}d\tau\right)\ \le$$

$$\le\ Kq^{n-1}L\left(3+\frac{K}{1-q}l\right)\left(\frac{N_1}{\alpha_1}+\frac{N_2}{\alpha_2}\right)\ \le\ Kq^n,$$

$$|x'_{n+1}(t)-x'_n(t)|\ =\ |A(x_{n+1}(t)-x_n(t))+$$

$$+\ F(t,x_n(t),x_n(f(t,x_n(t))),x'_n(\varphi(t)))-$$

$$-\ F(t,x_{n-1}(t),x_{n-1}(f(t,x_{n-1}(t))),x'_{n-1}(\varphi(t)))|\ \le$$

$$\le\ |A|\,|x_{n+1}(t)-x_n(t)|+L(|x_n(t)-x_{n-1}(t)|+$$

$$+\ |x_n(f(t,x_n(t)))-x_n(f(t,x_{n-1}(t)))|+$$

$$+\ |x_n(f(t,x_{n-1}(t)))-x_{n-1}(f(t,x_{n-1}(t)))|+|x'_n(\varphi(t))-x'_{n-1}(\varphi(t))|)\ \le$$

$$\le\ |A|Kq^n+L\left(Kq^{n-1}+\frac{K}{1-q}lKq^{n-1}+Kq^{n-1}+Kq^{n-1}\right)\ \le$$

$$\le\ Kq^{n-1}\Bigg(|A|q+L\left(3+\frac{K}{1-q}l\right)\Bigg)\ \le\ Kq^n.$$

Таким чином, оцінки (4), (5) дійсно мають місце при всіх $t \in R$ і $n \geq 0$. Оскільки $0 < q < 1$, то послідовності $\{x_n(t),\, n \geq 0\}$, $\{x'_n(t),\, n \geq 0\}$ рівномірно збігаються до деякої неперервно диференційовної вектор-функції $x(t)$, яка є неперервно диференційовним і обмеженим при $t \in R$ (разом із першою похідною) розв'язком системи рівнянь (2).

Доведемо, що система (2) не має інших неперервно диференційовних і обмежених при $t \in R$ (разом із першою похідною) розв'язків. Дійсно, припустивши, що існує ще один неперервно диференційовний і обмежений при $t \in R$ (разом із першою похідною) розв'язок $z(t)$ системи рівнянь (2) ($x(t) \not\equiv z(t)$), одержимо

$$|x(t) - z(t)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\Big(F(\tau, x(\tau), x(f(\tau, x(\tau))), x'(\varphi(\tau))) - \right.$$

$$\left. - \; F(\tau, z(\tau), z(f(\tau, z(\tau))), z'(\varphi(\tau)))\Big) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)| L \left(|x(\tau) - z(\tau)| + |x(f(\tau, x(\tau))) - z(f(\tau, z(\tau)))| + \right.$$

$$\left. + \; |x'(\varphi(\tau)))) - z'(\varphi(\tau)))| \right) d\tau \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)| L \left(|x(\tau) - z(\tau)| + |x(f(\tau, x(\tau))) - z(f(\tau, x(\tau)))| + \right.$$

$$\left. + \; |z(f(\tau, x(\tau))) - z(f(\tau, z(\tau)))| + |x'(\varphi(\tau)) - z'(\varphi(\tau))| \right) d\tau \leq$$

$$\leq \; ||x(t) - z(t)|| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)| L \left(\frac{K}{1-q} l + 3 \right) d\tau \leq$$

$$\leq \; ||x(t) - z(t)|| L \left(\frac{K}{1-q} l + 3 \right) \left(\frac{N_1}{\alpha_1} + \frac{N_2}{\alpha_2} \right) \leq q ||x(t) - z(t)||,$$

$$|x'(t) - z'(t)| = \; |A(x(t) - z(t)) + (F(t, x(t), x(f(t, x(t))), x'(\varphi(t))) -$$

$$- \; F(t, z(t), z(f(t, z(t))), z'(\varphi(t)))| \leq$$

$$\le |A|\,|x(t)-z(t)| + L(|x(t)-z(t)| +$$

$$+ |x(f(t,x(t))) - x(f(t,z(t)))| +$$

$$+ |x(f(t,z(t))) - z(f(t,z(t)))| + |x'(\varphi(t)) - z'(\varphi(t))|) \le$$

$$\le ||x(t)-z(t)|| \left(|A| + L\left(\frac{K}{1-q} l + 3 \right) \right) \le q||x(t)-z(t)||,$$

де $||x(t)-z(t)|| = \max\left\{ \sup\limits_{t\in R} |x(t)-z(t)|, \sup\limits_{t\in R} |x'(t)-z'(t)| \right\}$. Звідси випливає $||x(t)-z(t)|| \le \le q||x(t)-z(t)||$, а оскільки $q<1$, то маємо $x(t)\equiv z(t)$. Отримана суперечність завершує доведення твердження, що вектор-функція $\gamma(t) = x_0(t) + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(x_{n+1}(t) - x_n(t))$ є єдиним неперервно диференційовним і обмеженим при $t\in R$ (разом із першою похідною) розв'язком системи рівнянь (2). Тим самим (оскільки $\gamma(t)$ є розв'язком системи (1)) теорему 1 доведено.

Виконуючи в (1) заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \gamma(t), \tag{7}$$

де $\gamma(t)$ — неперервно диференційовний і обмежений при $t\in R$ (разом із першою похідною) розв'язок цієї системи, одержуємо систему диференціально-функціональних рівнянь

$$y'(t) = Ay(t) + \tilde{F}(t, y(t), y(f(t,y(t))), y'(\varphi(t))), \tag{8}$$

де

$$\tilde{F}(t, y(t), y(f(t,y(t))), y'(\varphi(t))) =$$

$$= F(t, y(t)+\gamma(t), y(f(t,y(t)+\gamma(t))) + \gamma(f(t,y(t)+\gamma(t))), y'(\varphi(t)) + \gamma'(\varphi(t))) -$$

$$- F(t, \gamma(t), \gamma(f(t,\gamma(t))), \gamma'(\varphi(t))).$$

Розглянемо систему (8) при $t\ge 0$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 і умова*
5) $f(t,y)\ge t,\quad \varphi(t)\ge t,\quad t\in R^+ = [0,+\infty),\quad y\in R^m$.

Тоді при достатньо малих L, l *існує p-параметрична сім'я неперервно диференційовних при* $t\in R^+$ *розв'язків системи (8), для яких виконується умова*

$$\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = 0. \tag{9}$$

Доведення. Розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$y(t) = Y(t) + \int\limits_0^{+\infty} G(t-\tau)\tilde{F}(\tau, y(\tau), y(f(\tau, y(\tau)))y'(\varphi(\tau)))d\tau, \tag{10}$$

де $Y(t) = \operatorname{diag}(e^{A_1 t}c, 0)$, $c \in R^p$ (для простоти далі будемо припускати, що $|c| \leq 1$), кожен розв'язок якої є розв'язком (8). За допомогою співвідношень

$$\begin{gathered} y_0(t) = 0, \\ y_0'(t) = 0, \\ y_{n+1}(t) = Y(t) + \int\limits_0^{+\infty} G(t-\tau)\tilde{F}(\tau, y_n(\tau), y_n(f(\tau, y_n(\tau))), y_n'(\varphi(\tau)))d\tau, \\ y_{n+1}'(t) = Ay_{n+1}(t) + \tilde{F}(t, y_n(t), y_n(f(t, y_n(t))), y_n'(\varphi(t))), \quad n = 0, 1, \ldots, \end{gathered} \tag{11}$$

побудуємо послідовність функцій $y_n(t)$, $n \geq 0$, і покажемо, що при всіх $t \in R^+$ і $n = 0, 1, \ldots$ виконуються оцінки

$$|y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq N_1 e^{-\alpha_* t}\theta^n. \tag{12}$$

$$|y_{n+1}'(t) - y_n'(t)| \leq N_1 e^{-\alpha_* t}\theta^n, \tag{13}$$

де α_* — деяка достатньо мала додатна стала $(0 < \alpha_* < \alpha_1)$,

$$N' = \min\left\{\left(\frac{N_1}{\alpha_1 - \alpha_*} + \frac{N_2}{\alpha_2}\right)^{-1}, 1 - |A|\right\},$$

$$\theta = \frac{1}{2N'}\left(3L + N' + (N' - 3L)\sqrt{1 - \frac{4N'LN_1 l}{(N' - 3L)^2}}\right).$$

При достатньо малих L, l маємо

$$N' - 3L > 0, \qquad \frac{4N'LN_1 l}{(N' - 3L)^2} < 1, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Крім цього, θ задовольняє, очевидно, рівняння

$$L\left(\frac{N_1}{1-\theta}l + 3\right) = N'\theta. \tag{14}$$

Оскільки при $t \in R^+$

$$|y_1(t) - y_0(t)| = |Y(t)| \leq N_1 \mid c \mid e^{-\alpha_1 t} \leq N_1 e^{-\alpha_* t},$$

$$|y_1'(t) - y_0'(t)| = |Ay_1(t)| \leq |A| N_1 \mid c \mid e^{-\alpha_* t} \leq N_1 e^{-\alpha_* t},$$

то у випадку $n = 0$ оцінки (12), (13) виконуються. Нехай вони виконуються для деякого $n-1$. Тоді маємо

$$|y_n'(t)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |y_{i+1}'(t) - y_i'(t)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} N_1 e^{-\alpha_* t} \theta^i \leq \frac{N_1}{1-\theta}.$$

Далі, використовуючи (11) і умови теореми, одержуємо

$$|y_{n+1}(t) - y_n(t)| = \left| \int_0^{+\infty} G(t-\tau)(\tilde{F}(\tau, y_n(\tau), y_n(f(\tau, y_n(\tau))), y_n'(\varphi(\tau))) - \right.$$

$$\left. - \ \tilde{F}(\tau, y_{n-1}(\tau), y_{n-1}(f(\tau, y_{n-1}(\tau))), y_{n-1}'(\varphi(\tau))))d\tau \right| \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} |G(t-\tau)| L(|y_n(\tau) - y_{n-1}(\tau)| + |y_n(f(\tau, y_n(\tau)) - y_n(f(\tau, y_{n-1}(\tau)))| +$$

$$+ \ |y_n(f(\tau, y_{n-1}(\tau))) - y_{n-1}(f(\tau, y_{n-1}(\tau)))| + |y_n'(\varphi(\tau)) - y_{n-1}'(\varphi(\tau))|)d\tau \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} |G(t-\tau)| L\Big(N_1 e^{-\alpha_* \tau} \theta^{n-1} + \frac{N_1}{1-\theta} |f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x_{n-1}(\tau))| +$$

$$+ \ N_1 e^{-\alpha_* f(\tau, y_{n-1}(\tau))} \theta^{n-1} + N_1 e^{-\alpha_* \varphi(\tau)} \theta^{n-1}\Big) d\tau \leq$$

$$\leq N_1 \theta^{n-1} \Bigg(N_1 \int_0^t e^{-\alpha_1 (t-\tau)} L *$$

$$* \ \left(e^{-\alpha_* \tau} + \frac{N_1}{1-\theta} l e^{-\alpha_* \tau} + e^{-\alpha_* f(\tau, y_{n-1}(\tau))} + e^{-\alpha_* \varphi(\tau)} \right) d\tau +$$

$$+\ N_2 \int\limits_t^{+\infty} e^{-\alpha_2(\tau-t)} L*$$

$$*\ \left(e^{-\alpha_* \tau} + \frac{N_1}{1-\theta} l e^{-\alpha_* \tau} + e^{-\alpha_* f(\tau, y_{n-1}(\tau))} + e^{-\alpha_* \varphi(\tau)} \right) d\tau \Bigg) \leq$$

$$\leq\ N_1 e^{-\alpha_* t} \theta^{n-1} L \left(3 + \frac{N_1}{1-\theta} l \right) *$$

$$*\ \left(N_1 e^{-(\alpha_1-\alpha_*)t} \int\limits_0^t e^{(\alpha_1-\alpha_*)\tau} d\tau + N_2 \int\limits_t^{+\infty} e^{-\alpha_2(\tau-t)} d\tau \right) \leq$$

$$\leq\ N_1 e^{-\alpha_* t} \theta^{n-1} L \left(3 + \frac{N_1}{1-\theta} l \right) \left(\frac{N_1}{\alpha_1 - \alpha_*} + \frac{N_2}{\alpha_2} \right) \leq N_1 e^{-\alpha_* t} \theta^n,$$

$$|y'_{n+1}(t) - y'_n(t)| =\ |A(y_{n+1}(t) - y_n(t)) +$$

$$+\ \tilde{F}(t, y_n(t), y_n(f(t, y_n(t))), y'_n(\varphi(t))) -$$

$$-\ \tilde{F}(t, y_{n-1}(t), y_{n-1}(f(t, y_{n-1}(t))), y'_{n-1}(\varphi(t)))| \leq$$

$$\leq\ |A|\,|y_{n+1}(t) - y_n(t)| + L(|y_n(t) - y_{n-1}(t)| +$$

$$+\ |y_n(f(t, y_n(t))) - y_n(f(t, y_{n-1}(t)))| +$$

$$+\ |y_n(f(t, y_{n-1}(t))) - y_{n-1}(f(t, y_{n-1}(t)))| + |y'_n(\varphi(t)) - y'_{n-1}(\varphi(t))|) \leq$$

$$\leq\ |A| N_1 e^{-\alpha_* t} \theta^n + L \Bigg(N_1 e^{-\alpha_* t} \theta^{n-1} + \frac{N_1}{1-\theta} l N_1 e^{-\alpha_* t} \theta^{n-1} +$$

$$+\ N_1 e^{-\alpha_* f(t, y_{n-1}(t))} \theta^{n-1} + N_1 e^{-\alpha_* \varphi(t)} \theta^{n-1} \Bigg) \leq$$

$$\leq\ N_1 e^{-\alpha_* t} \theta^{n-1} \left(|A|\theta + L \left(\frac{N_1}{1-\theta} l + 3 \right) \right) \leq N_1 e^{-\alpha_* t} \theta^n.$$

Отже, оцінки (12), (13) виконуються при $t \in R^+$ і всіх $n \geq 0$. Тоді послідовності $\{y_n(t),\ n \geq$

$\geq 0\}$, $\{y'_n(t),\ n \geq 0\}$ рівномірно збігаються до деякої вектор-функції $y(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n(t)$, яка є неперервно диференційовним розв'язком системи рівнянь (10) (в цьому можна переконатися, якщо перейти до границі при $n \to +\infty$ в (11)) і задовольняє співвідношення

$$|y(t)| \leq \frac{N_1}{1-\theta} e^{-\alpha_* t},$$

звідки випливає (11). Теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови теореми 1 і умови:*
6) $f(t,y) \geq \lambda t, \quad \varphi(t) \geq \lambda t, \quad 0 < \lambda < 1, \quad t \in R^+$;
7) $\alpha_1 > \lambda$,
то при достатньо малих L, l *система рівнянь (8) має* p*-параметричну сім'ю неперервно диференційовних при* $t \in R^+$ *розв'язків, які задовольняють умову*

$$\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = 0. \tag{15}$$

Для доведення теореми 3 достатньо, очевидно, довести, що система інтегральних рівнянь (10) має p-параметричну сім'ю неперервно диференційовних при $t \in R^+$ розв'язків, що задовольняють (15). Для цього, в свою чергу, достатньо довести, що послідовності вектор-функцій $\{y_n(t)\}$, $\{y'_n(t)\}$, визначених співвідношеннями (11), рівномірно збігаються при $t \in R^+$ до деякої вектор-функції $y(t)$, яка є неперервно диференційовною при $t \in R^+$, задовольняє (10) і умову (15).

Використовуючи умови теореми і співвідношення (11), можна аналогічно (12), (13) показати, що при $t \in R^+$ і всіх $n \geq 0$ виконуються нерівності

$$|y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq N_1 e^{-\lambda^n t} \theta^n, \tag{16}$$

$$|y'_{n+1}(t) - y'_n(t)| \leq N_1 e^{-\lambda^n t} \theta^n, \tag{17}$$

де

$$\theta = \frac{1}{2N'} \left(3L + N' + (N' - 3L) \sqrt{1 - \frac{4N'LN_1 l}{(N'-3L)^2}} \right),$$

$$N' = \min\left\{ \left(\frac{N_1}{\alpha_1 - \lambda} + \frac{N_2}{\alpha_2} \right)^{-1}, 1 - |A| \right\}.$$

Зауважимо, що при достатньо малих L, l виконуються нерівності

$$N' - 3L > 0, \quad \frac{4N'LN_1 l}{(N'-3L)^2} < 1, \quad 0 < \theta < 1,$$

і θ задовольняє рівняння

$$L\left(\frac{N_1}{1-\theta}l+3\right) = N'\theta. \tag{18}$$

Із (16), (17) безпосередньо випливає, що послідовності $\{y_n(t)\}$, $\{y'_n(t)\}$ рівномірно збігаються при $t \in R^+$, функція $y(t)$ є неперервно диференційовною при $t \in R^+$, задовольняє систему рівнянь (10) (в цьому можна переконатися, якщо перейти до границі при $n \to +\infty$ в (11)) і така, що виконується нерівність

$$|y(t)| \le N_1 \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda^n t}\theta^n,$$

звідки одержуємо (15). Теорему 3 доведено.

Розглянемо тепер випадок, коли крім умов теореми 1 виконується умова

8) $f(t,y) \ge t-\Delta, \quad \varphi(t) \ge t-\Delta, \quad \Delta > 0, \quad t \in R^+,$

і дослідимо питання про існування неперервно диференційовних при $t \in R^+$ розв'язків системи рівнянь (8). Оскільки в силу умови 8 такі розв'язки мають бути визначені також при $t \in [-\Delta, 0)$, то далі будемо припускати, що виконується умова

$$y(t) = 0, \quad t \in [-\Delta, 0). \tag{19}$$

Має місце така теорема.

Теорема 4. *Якщо виконуються умови 1–3 і 8, то при достатньо малих l, L існує p-параметрична сім'я неперервно диференційовних при $t \in R^+$ розв'язків задачі (8), (19), що задовольняють умову*

$$\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = 0. \tag{20}$$

Доведення. Розглянемо задачу

$$\begin{gathered} y(t) = 0, \quad t \in [-\Delta, 0), \\ y(t) = Y(t) + \int_0^{+\infty} G(t-\tau)\tilde{F}(\tau, y(\tau), y(f(\tau, y(\tau))), y'(\varphi(t)))d\tau, \quad t \ge 0, \end{gathered} \tag{21}$$

де $Y(t) = \operatorname{diag}(e^{A_1 t}c, 0)$, $c \in R^p$ ($|c| \le 1$), кожен розв'язок якої є розв'язком задачі (8), (19). Покажемо, що задача (21) має неперервно диференційовний при $t \in R^+$ розв'язок, який задовольняє умову (20). За допомогою співвідношень

$$y_0(t) = 0, \quad t \in [-\Delta, +\infty),$$

$$y_{n+1}(t) = \begin{cases} 0, \quad t \in [-\Delta, 0); \\ Y(t) + \int\limits_0^{+\infty} G(t-\tau)\tilde{F}(\tau, y_n(\tau), y_n(f(\tau, y_n(\tau))), y_n'(\varphi(\tau)))d\tau, \quad t \in [0, +\infty), \end{cases} \tag{22}$$

$$y_{n+1}'(t) = \begin{cases} 0, \quad t \in [-\Delta, 0); \\ Ay_{n+1}(t) + \tilde{F}(t, y_n(t), y_n(f(t, y_n(t))), y_n'(\varphi(t))), \quad t \in [0, +\infty), \end{cases}$$

$$n = 0, 1, \ldots,$$

побудуємо послідовності вектор-функцій $\{y_n(t)\}$, $\{y_n'(t)\}$ і доведемо, що вони рівномірно збігаються при $t \in R^+$, функція $y(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n(t)$ є неперервно диференційовною при $t \in R^+$ і задовольняє (20), (21). Для цього достатньо показати, що при $t \geq 0$ і при всіх $n \geq 0$ виконуються нерівності

$$|y_{n+1}(t) - y_n(t)| \leq N_1 e^{-\tilde{\alpha}t}\tilde{\theta}^n, \tag{23}$$

$$|y_{n+1}'(t) - y_n'(t)| \leq N_1 e^{-\tilde{\alpha}t}\tilde{\theta}^n, \tag{24}$$

де $\tilde{\alpha}$ — деяка достатньо мала додатна стала ($0 < \tilde{\alpha} < \alpha_1$),

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{2N'}\left(L(1+2e^{\tilde{\alpha}\Delta}) + N' + (N' - L(1+2e^{\tilde{\alpha}\Delta}))\sqrt{1 - \frac{4N'LN_1 l}{(N' - L(1+2e^{\tilde{\alpha}\Delta}))^2}}\right),$$

$$N' = \min\left\{\left(\frac{N_1}{\alpha_1 - \tilde{\alpha}} + \frac{N_2}{\alpha_2}\right)^{-1}, 1 - |A|\right\}.$$

При достатньо малих L, l маємо

$$N' - L(1+2e^{\tilde{\alpha}\Delta}) > 0, \qquad \frac{4N'LN_1 l}{(N' - L(1+2e^{\tilde{\alpha}\Delta}))^2} < 1, \qquad 0 < \tilde{\theta} < 1.$$

Крім цього, $\tilde{\theta}$ задовольняє, очевидно, рівняння

$$L\left(1 + \frac{N_1}{1-\tilde{\theta}}l + 2e^{\tilde{\alpha}\Delta}\right) = N'\tilde{\theta}. \tag{25}$$

Оскільки при $t \geq -\Delta$

$$|y_1(t) - y_0(t)| = |Y(t)| \leq N_1 \mid c \mid e^{-\alpha_1 t} \leq N_1 e^{-\tilde{\alpha} t},$$

$$|y_1'(t) - y_0'(t)| = |Ay_1(t)| \leq N_1 \mid c \mid |A| e^{-\tilde{\alpha} t} \leq N_1 e^{-\tilde{\alpha} t},$$

то у випадку $n = 0$ оцінки (23), (24) виконуються. Припустимо, що вони виконуються для деякого $n - 1$. Тоді

$$|y_n'(t)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |y_{i+1}'(t) - y_i'(t)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} N_1 e^{-\tilde{\alpha} t} \tilde{\theta}^i \leq \frac{N_1}{1 - \tilde{\theta}},$$

і в силу (22) одержимо

$$|y_{n+1}(t) - y_n(t)| = \left| \int\limits_0^{+\infty} G(t-\tau)(F(\tau, y_n(\tau), y_n(f(\tau, y_n(\tau))), y_n'(\varphi(\tau))) - \right.$$

$$\left. - \; F(\tau, y_{n-1}(\tau), y_{n-1}(f(\tau, y_{n-1}(\tau))), y_{n-1}'(\varphi(\tau))))d\tau \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{+\infty} |G(t-\tau)| L(|y_n(\tau) - y_{n-1}(\tau)| +$$

$$+ \; |y_n(f(\tau, y_n(\tau)) - y_n(f(\tau, y_{n-1}(\tau)))| +$$

$$+ \; |y_n(f(\tau, y_{n-1}(\tau))) - y_{n-1}(f(\tau, y_{n-1}(\tau)))| +$$

$$+ \; |y_n'(\varphi(\tau)) - y_{n-1}'(\varphi(\tau))|)d\tau \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{+\infty} |G(t-\tau)| L \left(N_1 e^{-\tilde{\alpha}\tau} \tilde{\theta}^{n-1} + \frac{N_1}{1 - \tilde{\theta}} |f(\tau, x_n(\tau)) - f(\tau, x_{n-1}(\tau))| + \right.$$

$$\left. + \; N_1 e^{-\tilde{\alpha} f(\tau, y_{n-1}(\tau))} \tilde{\theta}^{n-1} + N_1 e^{-\tilde{\alpha}\varphi(\tau)} \tilde{\theta}^{n-1} \right) d\tau \leq$$

$$\leq N_1\tilde{\theta}^{n-1}\int_0^{+\infty}|G(t-\tau)|L\left(e^{-\tilde{\alpha}\tau}+\frac{N_1}{1-\tilde{\theta}}le^{-\tilde{\alpha}\tau}+e^{-\tilde{\alpha}(\tau-\Delta)}+e^{-\tilde{\alpha}(\tau-\Delta)}\right)d\tau \leq$$

$$\leq N_1\tilde{\theta}^{n-1}\int_0^{+\infty}|G(t-\tau)|Le^{-\tilde{\alpha}\tau}\left(1+\frac{N_1}{1-\tilde{\theta}}l+2e^{\tilde{\alpha}\Delta}\right)d\tau \leq$$

$$\leq N_1\tilde{\theta}^{n-1}e^{-\tilde{\alpha}t}L\left(1+\frac{N_1}{1-\tilde{\theta}}l+2e^{\tilde{\alpha}\Delta}\right)\left(\frac{N_1}{\alpha_1-\tilde{\alpha}}+\frac{N_2}{\alpha_2}\right) \leq N_1e^{-\tilde{\alpha}t}\tilde{\theta}^n,$$

$$\begin{aligned}
|y'_{n+1}(t)-y'_n(t)| = {} & |A(y_{n+1}(t)-y_n(t))+ \\
& + F(\tau,y_n(\tau),y_n(f(\tau,y_n(\tau))),y'_n(\varphi(\tau)))- \\
& - F(\tau,y_{n-1}(\tau),y_{n-1}(f(\tau,y_{n-1}(\tau))),y'_{n-1}(\varphi(\tau)))| \leq \\
\leq {} & |A|\,|y_{n+1}(t)-y_n(t)|+L(|y_n(t)-y_{n-1}(t)|+ \\
& + |y_n(f(t,y_n(t)))-y_n(f(t,y_{n-1}(t)))|+ \\
& + |y_n(f(t,y_{n-1}(t)))-y_{n-1}(f(t,y_{n-1}(t)))|+|y'_n(\varphi(t))-y'_{n-1}(\varphi(t))|) \leq \\
\leq {} & |A|N_1e^{-\tilde{\alpha}t}\tilde{\theta}^n+L\Bigg(N_1e^{-\tilde{\alpha}t}\tilde{\theta}^{n-1}+\frac{N_1}{1-\tilde{\theta}}lN_1e^{-\tilde{\alpha}t}\tilde{\theta}^{n-1}+ \\
& + N_1e^{-\tilde{\alpha}f(\tau,y_{n-1}(\tau))}\tilde{\theta}^{n-1}+N_1e^{-\tilde{\alpha}\varphi(t)}\tilde{\theta}^{n-1}\Bigg) \leq \\
\leq {} & N_1e^{-\tilde{\alpha}t}\tilde{\theta}^{n-1}\left(|A|\tilde{\theta}+L\left(1+\frac{N_1}{1-\tilde{\theta}}l+2e^{\tilde{\alpha}\Delta}\right)\right) \leq N_1e^{-\tilde{\alpha}t}\tilde{\theta}^n.
\end{aligned}$$

Таким чином, оцінки (23), (24) дійсно мають місце при всіх $t \geq -\Delta$, $n = 0,1,\ldots$ і послідовність вектор-функцій $\{y_n(t),\ n \geq 0\}$ рівномірно збігається до деякої неперервно диференційовної вектор-функції $y(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n(t)$, яка є розв'язком задачі (21). В силу (24) маємо нерівність

$$|y(t)| \leq \frac{N_1|c|}{1-\tilde{\theta}}e^{-\alpha_* t},$$

звідки випливає (20).

Теорему доведено.

1. *Хейл Дж.* Теория дифференциально-функциональных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 548 с.
2. *Самойленко А.М., Пелюх Г.П.* Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных диференциально-функциональных уравнений и их свойства // Укр. мат. журн. — 1994. — **46**, № 6. — С. 737–747.
3. *Блащак Н.І., Пелюх Г.П.* Про періодичні розв'язки систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійно перетвореним аргументом та їх властивості. — Київ, 1996. — 18 с. — (Препринт/НАН України. Ін-т математики; 96.19).
4. *Олійниченко О.П.* Асимптотичні властивості розв'язків лінійних диференціально-функціональних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2000. — **3**, № 4. — С. 489–496.
5. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1970. — 720 с.

Одержано 01.07.2002