УДК 517 . 949

# ПРО $C^\rho$-ГЛАДКІСТЬ ІНВАРІАНТНОГО ТОРА ЗЧИСЛЕННОЇ СИСТЕМИ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ, ВИЗНАЧЕНОЇ НА $m$-ВИМІРНОМУ ТОРІ

**Ю. В. Теплінський, Н. А. Марчук**

*Кам'янець-Поділ. пед. ун-т*
*Україна, 32300, Кам'янець-Подільський*
*Хмельницької обл., вул. Огієнка, 61*

*By using the method of truncating, we find sufficient conditions for the invariant torus of a countable system of difference equations, which contain a devation of the discrete argument with respect to the angular variable, to be $\rho$-times differentiable, $\rho \geq 2$.*

*Методом укорочення знайдено достатні умови диференційовності порядку $\rho \geq 2$ інваріантного тора зчисленної системи різницевих рівнянь, що містить відхилення дискретного аргументу, відносно кутової зміннної.*

У цій статті метод функції Гріна – Самойленка [1, 2] застосовано до побудови інваріантного тора зчисленної системи різницевих рівнянь, визначеної на $m$-вимірному торі. Наведено достатні умови диференційовності інваріантного тора (тобто функції, породжуючої його) по кутовій змінній до порядку $\rho \geq 2$. Ці умови одержано за допомогою методу укорочення вихідної системи, розвинутого для випадку диференціальних рівнянь у роботі [3]. У випадку $\rho = 1$ відповідна задача розв'язана в [4].

Розглянемо систему рівнянь

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n), \quad x_{n+1} = P(\varphi_{n+p})x_n + c(\varphi_{n+g+1}), \tag{1}$$

у якій $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m) \in R^m,\ x = (x^1, x^2, x^3, \ldots) \in \mathfrak{M}$, де $\mathfrak{M}$ — простір обмежених числових послідовностей з нормою $\|x\| = \sup_i\{|x^i|\}$; функції $a(\varphi) = \{a_1(\varphi), a_2(\varphi), \ldots \ldots, a_m(\varphi)\},\ c(\varphi) = \{c_1(\varphi), c_2(\varphi), \ldots\}$ і нескінченна матриця $P(\varphi) = [p_{ij}(\varphi)]_{i,j=1}^{\infty}$ дійсні та періодичні по $\varphi^i, i = \overline{1,m}$, з періодом $2\pi; n \in Z, Z$ — множина цілих чисел; $p$ і $g$ — цілочислові параметри, які обумовлюють відхилення дискретного аргументу. Інтерпретуючи $\varphi^i, i = \overline{1,m}$, як кутові координати на торі, вважаємо, що систему рівнянь (1) визначено на $m$-вимірному торі $\mathcal{T}_m$.

Через $\varphi_n(\varphi)$ позначимо розв'язок першого рівняння (1) такий, що $\varphi_0(\varphi) = \varphi \in \mathcal{T}_m$. Надалі вважатимемо, що відображення $\Phi(\varphi) = \varphi + a(\varphi) : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ оборотне і $\|a(\varphi)\| \leq A^0, \|c(\varphi)\| \leq C^0, \quad \|P(\varphi)\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |p_{ij}(\varphi)| \leq P^0\ \forall\varphi \in \mathcal{T}_m$, де $A^0, P^0$, $C^0$ — додатні сталі, що не залежать від $\varphi$.

**Означення.** *Інваріантним тором $\mathcal{T}(p, g, \varphi)$ системи рівнянь (1) назвемо множину точок $x \in \mathfrak{M}$:*

$$x = u(p, g, \varphi) = (u_1(p, g, \varphi), u_2(p, g, \varphi), \ldots), \quad \varphi \in \mathcal{T}_m,$$

*якщо при будь-яких* $\{p, g\} \subset Z, \varphi \in \mathcal{T}_m$ *функція* $u(p, g, \varphi) - 2\pi$*-періодична відносно* $\varphi^i$, $i = \overline{1, m}$, *обмежена за нормою* $\|\cdot\|$ *і задовольняє рівність*

$$u(p, g, \varphi_{n+1}(\varphi)) = P(\varphi_{n+p}(\varphi))u(p, g, \varphi_n(\varphi)) + c(\varphi_{n+g+1}(\varphi)).$$

Домовимось через $D^s_\varphi(\Phi(\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m))$ позначати довільну похідну $s$-го порядку функції $\Phi(\varphi)$ по $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m$. При цьому вважатимемо, що матриця диференціюється поелементно, а вектор-функція — покоординатно.

Будемо говорити, що $\Phi(\varphi) \in C^\rho_{\mathrm{Lip}}(\varphi)$ з коефіцієнтом $\alpha$, якщо для всіх $0 \le s \le \rho$ виконується нерівність

$$\|D^s_\varphi(\Phi(\varphi) - \Phi(\bar{\varphi}))\| \le \alpha\|\varphi - \bar{\varphi}\|,$$

де $\alpha$ — додатна стала, що не залежить від $s$ та $\{\varphi, \bar{\varphi}\} \subset \mathcal{T}_m$.

Нагадаємо, що послідовність матриць $\overset{(n)}{C}(t) = [\overset{(n)}{c}_{ij}(t)]^\infty_{i,j=1}$ називають правильною на проміжку $T$ [3, с. 165], якщо при кожному $t \in T$ вона обмежена, поелементно збігається до деякої матриці $C(t)$, причому ряди $\sum_{j=1}^\infty |\overset{(n)}{c}_{ij}(t)|, i = 1, 2, \ldots$, збігаються рівномірно відносно $n$.

Розглянемо укорочену систему рівнянь

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + a(\varphi_n), \quad \overset{(s)}{x}_{n+1} = \overset{(s)}{P}(\varphi_{n+p})\overset{(s)}{x}_n + \overset{(s)}{c}(\varphi_{n+g+1}), \tag{2}$$

у якій $\overset{(s)}{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^s)$, $\overset{(s)}{c}(\varphi) = \{c_1(\varphi), c_2(\varphi), \ldots, c_s(\varphi)\}$, $\overset{(s)}{P}(\varphi) = [p_{ij}(\varphi)]^s_{i,j=1}$.

Через $\Omega^n_l(p, \varphi)$ та $\overset{(s)}{\Omega}{}^n_l(p, \varphi)$ позначимо матриціанти однорідних рівнянь

$$x_{n+1} = P(\varphi_{n+p}(\varphi))x_n$$

та

$$\overset{(s)}{x}_{n+1} = \overset{(s)}{P}(\varphi_{n+p}(\varphi))\overset{(s)}{x}_n$$

відповідно.

Сформулюємо основний результат цієї роботи у вигляді такого твердження.

**Теорема.** *Нехай для всіх натуральних* $s$ *і* $\varphi \in \mathcal{T}_m$ *виконуються умови:*

*1)*$\{a(\varphi), P(\varphi), c(\varphi)\} \subset C^\rho_{\mathrm{Lip}}(\varphi)$, *причому* $a(\varphi)$ *з коефіцієнтом* $\alpha_0$;

*2)*$\|D^l_\varphi(P(\varphi))\| \le P^*, \|D^l_\varphi(a(\varphi))\| \le A^*, \|D^l_\varphi(c(\varphi))\| \le C^*$, *де* $1 \le l \le \rho$ *та додатні сталі* $P^*, A^*, C^*$ *не залежать від* $l$ *і* $\varphi$;

*3) матриця* $\overset{(s)}{P}(\varphi)$ *невироджена;*

*4) при всіх цілих* $l > n$

$$\|\overset{(s)}{\Omega}{}^n_l(0, \varphi)\| \le M\lambda^{l-n},$$

*де сталі $M > 0$ і $0 < \lambda < 1$ не залежать від $s$ і $\varphi$;*

*5) послідовність $\{\overset{(s)}{P}{}^{-1}(\varphi)\}_{s=1}^{\infty}$ правильна і $\|\overset{(s)}{P}{}^{-1}(\varphi)\| \leq P_1$, де додатна стала $P_1$ не залежить від $s$ та $\varphi$.*

*Якщо при цьому $\lambda(1+\alpha_0)(1+mA^*)^\rho < 1$, то для будь-яких цілих $g \geq 0, p \geq 0$ інваріантний тор системи рівнянь (1) існує і належить $C^\rho_{\mathrm{Lip}}(\varphi)$.*

Перед доведенням теореми сформулюємо декілька допоміжних тверджень.

**Лема 1.** *Нехай $a(\varphi) \in C^\rho(\varphi)$ і $\|D^s_\varphi(a(\varphi))\| \leq A^*$, де $A^*$ — додатна стала, що не залежить від $\varphi \in \mathcal{T}_m$ та $1 \leq s \leq \rho$. Тоді при всіх натуральних $n$ і $1 \leq s \leq \rho$ справджується нерівність*

$$\|D^s_\varphi(\varphi_n(\varphi))\| \leq K_s(1+mA^*)^{sn}, \tag{3}$$

*де сталі $K_s$ не залежать від $n$ та $\varphi \in \mathcal{T}_m$.*

***Доведення.*** При $s = 1$ нерівність (3) доведено в [4]. При цьому $K_1 = 1$. Припустимо, що вона справджується при $1 < s \leq k,\ k < \rho$, і доведемо її при $s = k+1$.

Неважко пересвідчитись, що $D^k_\varphi(\varphi_n(\varphi)) = D^k_\varphi(\varphi_{n-1}(\varphi)) + L$, де $L$ — сума скінченної кількості доданків двох типів:

$$D^p_{\varphi_{n-1}(\varphi)}(a(\varphi_{n-1}(\varphi)))D^{\lambda_1}_\varphi(\varphi^{k_1}_{n-1}(\varphi))\ldots D^{\lambda_r}_\varphi(\varphi^{k_r}_{n-1}(\varphi)) \tag{4}$$

та

$$D^1_{\varphi_{n-1}(\varphi)}(a(\varphi_{n-1}(\varphi)))D^k_\varphi(\varphi^\sigma_{n-1}(\varphi)),$$

де $p \in \{1,2,\ldots,k\}, \lambda_i \in \{1,2,\ldots,k-1\}, \{k_i,\sigma\} \subset \{1,2,\ldots,m\}, i = 1,2,\ldots,r, \sum_{j=1}^r \lambda_j = k$.

Оскільки

$$D^{k+1}_\varphi(\varphi_n(\varphi)) = D^1_\varphi(D^k_\varphi(\varphi_n(\varphi))),$$

то

$$D^{k+1}_\varphi(\varphi_n(\varphi)) = D^{k+1}_\varphi(\varphi_{n-1}(\varphi)) + L_1,$$

де $L_1$ — сума скінченної кількості доданків вигляду (4) та вигляду

$$D^1_{\varphi_{n-1}(\varphi)}(a(\varphi_{n-1}(\varphi)))D^{k+1}_\varphi(\varphi^\sigma_{n-1}(\varphi)),$$

де $p \in \{1,2,\ldots,k+1\}, \lambda_i \in \{1,2,\ldots,k\}, \{k_i,\sigma\} \subset \{1,2,\ldots,m\}, i = 1,2,\ldots,r, \sum_{j=1}^r \lambda_j = k+1$.

У цьому випадку

$$\|D^{k+1}_\varphi(\varphi_n(\varphi))\| \leq \Delta_1(1+mA^*)^{(\lambda_1+\,\ldots\,+\lambda_r)(n-1)} + \Delta_2\|D^{k+1}_\varphi(\varphi_{n-1}(\varphi))\| =$$

$$= \Delta_1(1+mA^*)^{(k+1)(n-1)} + \Delta_2\|D^{k+1}_\varphi(\varphi_{n-1}(\varphi))\|,$$

де сталі $\Delta_1$ і $\Delta_2$ не залежать від $n$ та $\varphi$.

Продовжуючи процес, одержуємо такі співвідношення:

$$\|D_{\varphi}^{k+1}(\varphi_n(\varphi))\| \leq \sum_{i=1}^{2} Z_i(1+mA^*)^{(k+1)(n-i)} + Z_3\|D_{\varphi}^{k+1}(\varphi_{n-2}(\varphi))\| \leq \dots$$

$$\dots \leq Z_0 \sum_{i=1}^{n-1} (1+mA^*)^{(k+1)i} \leq$$

$$\leq Z_0 \frac{(1+mA^*)^{k+1}((1+mA^*)^{(k+1)(n-1)}-1)}{mA^*} \leq$$

$$\leq K_{k+1}(1+mA^*)^{(k+1)n},$$

де стала $K_{k+1}$ не залежить від $n$ та $\varphi$. Лему доведено.

**Лема 2.** *Нехай виконуються умови леми 1 і $\{P(\varphi), c(\varphi)\} \subset C^{\rho}(\varphi)$, причому $\|D_{\varphi}^s(P(\varphi))\| \leq P^*, \|D_{\varphi}^s(c(\varphi))\| \leq C^*$, де $P^*$ і $C^*$ — додатні сталі, що не залежать від $\varphi \in \mathcal{T}_m$ та $1 \leq s \leq \rho$. Тоді при всіх натуральних $n$ і $1 \leq s \leq \rho$ для будь-яких цілих $l+g \geq 0, p \geq 0$ справджуються нерівності*

$$\|D_{\varphi}^s(\overset{(n)}{c}(\varphi_{l+g}(\varphi)))\| \leq C_s^*(1+mA^*)^{s(l+g)}, \tag{5}$$

$$\|D_{\varphi}^s(\overset{(n)}{\Omega}{}_l^0(p,\varphi))\| \leq Z_s\lambda^l(1+mA^*)^{sl}, \tag{6}$$

*де додатні сталі $C_s^*$ і $Z_s$ не залежать від $n$ і $\varphi \in \mathcal{T}_m$.*

***Доведення.*** Легко переконатись, що $D_{\varphi}^s(\overset{(n)}{c}(\varphi_{l+g}(\varphi)))$ є сумою скінченної кількості доданків вигляду

$$\Phi_{\eta}(\varphi) = D_{\varphi_{l+g}(\varphi)}^{\eta}(\overset{(n)}{c}(\varphi_{l+g}(\varphi)))D_{\varphi}^{\lambda_1}(\varphi_{l+g}^{l_1}(\varphi))\dots D_{\varphi}^{\lambda_m}(\varphi_{l+g}^{l_m}(\varphi)), \tag{7}$$

де $\eta \in \{1,2,\dots,s\}$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = s, \lambda_i \in \{0,1,2,\dots,s\}, i \in \{1,2,\dots,m\}$, причому в (7) під виразом $D^0(\varphi_{l+g}^{l_i}(\varphi))$ розуміється одиниця.

Використовуючи оцінку (3), покладаючи $K_{\lambda_i} = 1$ при $\lambda_i = 0$ і позначаючи $C^*\prod_{i=1}^m K_{\lambda_i}$ через $Y_{\eta}$, одержуємо, що норма виразу (7) не перевищує $Y_{\eta}(1+mA^*)^{s(l+g)}$, де $Y_{\eta}$ не залежать від $n$ і $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Останнє гарантує правильність оцінки (5).

Для доведення нерівності (6) застосуємо метод математичної індукції. При $s = 1$ цю нерівність доведено в [4]. Припустимо, що нерівність (6) справджується при всіх натуральних $s < d < \rho$, і доведемо її при $s = d$.

Використавши співвідношення

$$\frac{\partial \overset{(n)}{\Omega}{}_l^0(p,\varphi)}{\partial \varphi^i} = -\sum_{k=1}^{l} \overset{(n)}{\Omega}{}_k^0(p,\varphi)\frac{\partial \overset{(n)}{P}(\varphi_{k+p-1}(\varphi))}{\partial \varphi^i}\overset{(n)}{\Omega}{}_l^{k-1}(p,\varphi),$$

доведене в [4] для $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, випишемо рівність

$$D_\varphi^d(\overset{(n)}{\Omega}{}_l^0(p, \varphi)) = -\sum_{k=1}^{l} \Gamma, \tag{8}$$

у якій $\Gamma$ є сумою скінченної кількості доданків вигляду

$$\Gamma^*(p_0, p_1, p_2, \varphi) = D_\varphi^{p_0}(\overset{(n)}{\Omega}{}_k^0(p, \varphi)) D_\varphi^{p_1}(\overset{(n)}{P}(\varphi_{k+p-1}(\varphi))) D_\varphi^{p_2}(\overset{(n)}{\Omega}{}_l^{k-1}(p, \varphi)),$$

де $\{p_0, p_2\} \subset \{0, 1, \ldots, d-1\}, p_1 \in \{1, 2, \ldots, d\}, p_0 + p_1 + p_2 = d$.

Оцінимо спочатку вираз $D_\varphi^{p_1}(\overset{(n)}{P}(\varphi_{k+p-1}(\varphi)))$, подавши його у вигляді суми скінченної кількості доданків вигляду

$$D^\eta_{\varphi_{k+p-1}(\varphi)}(\overset{(n)}{P}(\varphi_{k+p-1}(\varphi))) D_\varphi^{\lambda_1}(\varphi_{k+p-1}^{l_1}(\varphi)) \ldots D_\varphi^{\lambda_m}(\varphi_{k+p-1}^{l_m}(\varphi)), \tag{9}$$

де $\eta$ набуває значень від 1 до $p_1$ включно, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = p_1,\ \lambda_i \in \{0, 1, \ldots, p_1\},\ l_i \in \{1, 2, \ldots \ldots, m\},\ i = \overline{1, m}$, причому за домовленістю $D^0(\varphi_{k+p-1}^{l_i}(\varphi)) = 1$.

Використовуючи лему 1 і позначаючи $P^* \prod_{i=1}^m K_{\lambda_i}$ через $\tilde{X}(\eta)$, приходимо до висновку, що норма виразу (9) не перевищує

$$\tilde{X}(\eta) \prod_{i=1}^m (1 + mA^*)^{\lambda_i(k+p-1)} = \tilde{X}(\eta)(1 + mA^*)^{p_1(k+p-1)},$$

де $\tilde{X}(\eta)$ не залежить від $n$ і $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Звідси

$$\|D_\varphi^{p_1}(\overset{(n)}{P}(\varphi_{k+p-1}(\varphi)))\| \le X(p_1)(1 + mA^*)^{p_1(k+p-1)}, \tag{10}$$

де $X(p_1)$ не залежить від $n$ та $\varphi \in \mathcal{T}_m$ і дорівнює добутку $\tilde{X}(\eta)$ на кількість доданків вигляду (9) у зображенні $D_\varphi^{p_1}(\overset{(n)}{P}(\varphi_{k+p-1}(\varphi)))$.

І, нарешті, оцінимо вираз

$$D_\varphi^{p_2}(\overset{(n)}{\Omega}{}_l^{k-1}(p, \varphi)) = D_\varphi^{p_2}(\overset{(n)}{\Omega}{}_{l-k+1}^0(p, \varphi_{k-1}(\varphi))),$$

подавши його у вигляді суми скінченної кількості доданків вигляду

$$D^\eta_{\varphi_{k-1}(\varphi)}(\overset{(n)}{\Omega}{}_{l-k+1}^0(p, \varphi_{k-1}(\varphi))) D_\varphi^{\lambda_1}(\varphi_{k-1}^{l_1}(\varphi)) \ldots D_\varphi^{\lambda_m}(\varphi_{k-1}^{l_m}(\varphi)), \tag{11}$$

де $\eta$ набуває значень від 1 до $p_2$ включно, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = p_2,\ \lambda_i \in \{0, 1, \ldots, p_2\},\ l_i \in \{1, 2, \ldots \ldots, m\},\ D_\varphi^0(\varphi_{k-1}^{l_i}(\varphi)) = 1$.

Норма виразу (11) обмежена добутком

$$\|D^{\eta}_{\varphi_{k-1}(\varphi)}(\overset{(n)}{\Omega}{}^{0}_{l-k+1}(p,\varphi_{k-1}(\varphi)))\|\prod_{i=1}^{m}K_{\lambda_i}(1+mA^*)^{\lambda_i(k-1)} \le$$

$$\le Z_{\eta}\lambda^{l-k+1}(1+mA^*)^{\eta(l-k+1)}(1+mA^*)^{p_2(k-1)}\prod_{i=1}^{m}K_{\lambda_i}.$$

У цьому випадку

$$\|D^{p_2}_{\varphi}(\overset{(n)}{\Omega}{}^{k-1}_{l}(p,\varphi))\| \le \tilde{Z}(p_2)\lambda^{l-k+1}(1+mA^*)^{p_2 l}, \tag{12}$$

де $\tilde{Z}(p_2)$ не залежить від $n$ та $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Тоді

$$\|\Gamma^*(p_0,p_1,p_2,\varphi)\| \le Z_{p_0}\lambda^{k}(1+mA^*)^{p_0 k}X(p_1)(1+mA^*)^{p_1(k+p-1)}\times$$

$$\times\, \tilde{Z}(p_2)\lambda^{l-k+1}(1+mA^*)^{l(d-p_1-p_0)} \le$$

$$\le B(p_0,p_1,p_2)\lambda^{l}(1+mA^*)^{(p_0+p_1)k+ld-l(p_0+p_1)},$$

де $B(p_0,p_1,p_2)$ теж не залежить від $n$ та $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Отже,

$$\sum_{k=1}^{l}\|\Gamma^*(p_0,p_1,p_2,\varphi)\| \le B(p_0,p_1,p_2)\lambda^{l}(1+mA^*)^{ld-l(p_0+p_1)}\times$$

$$\times \sum_{k=1}^{l}(1+mA^*)^{(p_0+p_1)k} \le$$

$$\le B(p_0,p_1,p_2)\lambda^{l}(1+mA^*)^{ld-l(p_0+p_1)}\times$$

$$\times \frac{(1+mA^*)^{p_1+p_0+l(p_0+p_1)}}{(1+mA^*)^{p_1+p_0}-1} \le \tilde{B}\lambda^{l}(1+mA^*)^{ld},$$

де $\tilde{B}$ не залежить від $n$ та $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Враховуючи рівність (8), завершуємо доведення леми 2.

**Лема 3.** *Нехай виконуються умови леми 1, причому $a(\varphi) \in C^{\rho}_{\mathrm{Lip}}$ з коефіцієнтом $\alpha_0$. Тоді при всіх натуральних $n$ і $1 \le s \le \rho$ справджується нерівність*

$$\|D^{s}_{\varphi}(\varphi_n(\varphi)-\varphi_n(\bar{\varphi}))\| \le \bar{K}_s(1+\alpha_0)^{n}(1+mA^*)^{sn}\|\varphi-\bar{\varphi}\|, \tag{13}$$

*де сталі $\bar{K}_s$ не залежать від $n$ та $\{\varphi,\bar{\varphi}\} \in \mathcal{T}_m$.*

***Доведення.*** При $s = 1$ нерівність (13) доведено в [4] (лема 2). Припустимо, що вона має місце при $1 < s \leq k,\ k < \rho$, і доведемо її при $s = k+1$.

З доведення леми 1 випливає

$$\|D_\varphi^{k+1}(\varphi_n(\varphi) - \varphi_n(\bar\varphi))\| \leq \|D_\varphi^{k+1}(\varphi_{n-1}(\varphi) - \varphi_{n-1}(\bar\varphi))\| + \\ + \|R_p(\varphi,\bar\varphi)\| + \|\bar R_p(\varphi,\bar\varphi)\|, \tag{14}$$

де $R_p(\varphi,\bar\varphi)$ — сума скінченної кількості доданків вигляду

$$D^p = D^p_{\varphi_{n-1}(\varphi)}(a(\varphi_{n-1}(\varphi)))D_\varphi^{\lambda_1}(\varphi_{n-1}^{k_1}(\varphi))\ldots D_\varphi^{\lambda_r}(\varphi_{n-1}^{k_r}(\varphi)) - \\ - D^p_{\varphi_{n-1}(\varphi)}(a(\varphi_{n-1}(\bar\varphi)))D_\varphi^{\lambda_1}(\varphi_{n-1}^{k_1}(\bar\varphi))\ldots D_\varphi^{\lambda_r}(\varphi_{n-1}^{k_r}(\bar\varphi)),$$

а $\bar R_p(\varphi,\bar\varphi)$ — сума $m$ доданків вигляду

$$D^1 = D^1_{\varphi_{n-1}(\varphi)}(a(\varphi_{n-1}(\varphi)))D_\varphi^{k+1}(\varphi_n^\sigma(\varphi)) - D^1_{\varphi_{n-1}(\varphi)}(a(\varphi_{n-1}(\bar\varphi)))D_\varphi^{k+1}(\varphi_n^\sigma(\bar\varphi)),$$

причому $p \in \{1,2,\ldots,k+1\},\ \lambda_i \in \{1,2,\ldots,k\},\ k_i \in \{1,2,\ldots,m\},\ \sigma \in \{1,2,\ldots,m\},\ i = 1,2,\ldots,r,\ \sum_{j=1}^r \lambda_j = k+1$.

Випишемо таку нерівність:

$$\|D^p\| \leq \alpha_0\|\varphi_{n-1}(\varphi) - \varphi_{n-1}(\bar\varphi)\|\prod_{i=1}^r K_{\lambda_i}(1+mA^*)^{\lambda_i(n-1)} + A^*\sum_{i=1}^r\Bigg\{\|D_\varphi^{\lambda_i}(\varphi_{n-1}^{k_i}(\varphi) - \\ - \varphi_{n-1}^{k_i}(\bar\varphi)\|\prod_{j=1}^{i-1}K_{\lambda_j}(1+mA^*)^{\lambda_j(n-1)}\prod_{j=i+1}^{r}K_{\lambda_j}(1+mA^*)^{\lambda_j(n-1)}\Bigg\},$$

де під символами $\prod_{j=1}^0(\cdot), \prod_{j=r+1}^r(\cdot)$ розуміються одиниці.

Введемо позначення:

$$\overset{(0)}{A} = \max\{K_{\lambda_2}\ldots K_{\lambda_r}, K_{\lambda_1}K_{\lambda_2}K_{\lambda_3}K_{\lambda_4}\ldots K_{\lambda_r},\ldots,K_{\lambda_1}K_{\lambda_2}\ldots K_{\lambda_{r-1}}\},$$

$$\bar D^p = \alpha_0\prod_{i=1}^r K_{\lambda_i} + A^*\overset{(0)}{A}\sum_{i=1}^r \bar K_{\lambda_i}, \quad D_1^1 = m\alpha_0 K_{k+1},$$

$$\bar D_1^p = \bar D^p\xi, \quad \tilde D = \bar D_1^p + D_1^1,$$

де $\xi$ — кількість доданків у сумі $R_p(\varphi,\bar\varphi)$.

Випишемо тепер ланцюжок нерівностей

$$\begin{aligned}\|D^p\| \ &\le \ \alpha_0(1+\alpha_0)^{n-1}(1+mA^*)^{(k+1)(n-1)}\prod_{i=1}^{r}K_{\lambda_i}\|\varphi-\bar{\varphi}\|+\\ &+ \ A^*(1+mA^*)^{(k+1)(n-1)}\overset{(0)}{A}\sum_{i=1}^{r}\|D_\varphi^{\lambda_i}(\varphi_{n-1}^{k_i}(\varphi)-\varphi_{n-1}^{k_i}(\bar{\varphi}))\| \le\\ &\le \ \alpha_0(1+\alpha_0)^{n-1}(1+mA^*)^{(k+1)(n-1)}\prod_{i=1}^{r}K_{\lambda_i}\|\varphi-\bar{\varphi}\|+\\ &+ \ A^*(1+mA^*)^{(k+1)(n-1)}\overset{(0)}{A}\sum_{i=1}^{r}\bar{K}_{\lambda_i}(1+\alpha_0)^{n-1}(1+mA^*)^{\lambda_i(n-1)}\|\varphi-\bar{\varphi}\| \le\\ &\le \ (1+\alpha_0)^{n-1}(1+mA^*)^{(k+1)(n-1)}\|\varphi-\bar{\varphi}\|\left\{\alpha_0\prod_{i=1}^{r}K_{\lambda_i}+A^*\overset{(0)}{A}\sum_{i=1}^{r}\bar{K}_{\lambda_i}\right\} \le\\ &\le \ \bar{D}^p(1+\alpha_0)^{n-1}(1+mA^*)^{(k+1)(n-1)}\|\varphi-\bar{\varphi}\|.\end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned}\|D^1\| < \ &\alpha_0K_{k+1}(1+\alpha_0)^{n-1}(1+mA^*)^{(k+1)(n-1)}\|\varphi-\bar{\varphi}\|+\\ &+ \ A^*\|D_\varphi^{k+1}(\varphi_{n-1}(\varphi)-\varphi_{n-1}(\bar{\varphi}))\|.\end{aligned}$$

Тоді з (14) одержуємо

$$\begin{aligned}\|D_\varphi^{k+1}(\varphi_n(\varphi)-\varphi_n(\bar{\varphi}))\| \le \ &\|D_\varphi^{k+1}(\varphi_{n-1}(\varphi)-\varphi_{n-1}(\bar{\varphi}))\|+\\ &+ \ \bar{D}_1^p(1+\alpha_0)^{n-1}(1+mA^*)^{(k+1)(n-1)}\|\varphi-\bar{\varphi}\|+D_1^1(1+\alpha_0)^{n-1}\times\\ &\times \ (1+mA^*)^{(k+1)(n-1)}\|\varphi-\bar{\varphi}\|+mA^*\|D_\varphi^{k+1}(\varphi_{n-1}(\varphi)-\varphi_{n-1}(\bar{\varphi}))\| =\\ &= \ (1+mA^*)\|D_\varphi^{k+1}(\varphi_{n-1}(\varphi)-\varphi_{n-1}(\bar{\varphi}))\|+\\ &+ \ \tilde{D}(1+\alpha_0)^{n-1}(1+mA^*)^{(k+1)(n-1)}\|\varphi-\bar{\varphi}\|,\end{aligned}$$

де $\tilde{D}$ не залежить від $n$ та$\{\varphi,\bar{\varphi}\}\subset\mathcal{T}_m$.

Одержане рекурентне співвідношення веде до нерівностей

$$\|D_\varphi^{k+1}(\varphi_n(\varphi) - \varphi_n(\bar\varphi))\| \le (1+mA^*)^n \|D_\varphi^{k+1}(\varphi_0(\varphi) - \varphi_0(\bar\varphi))\| +$$

$$+ \tilde D \sum_{i=0}^{n-1} (1+\alpha_0)^i (1+mA^*)^{ik+n-1} \|\varphi - \bar\varphi\| =$$

$$= \tilde D \sum_{i=0}^{n-1} (1+\alpha_0)^i (1+mA^*)^{ik+n-1} \|\varphi - \bar\varphi\| =$$

$$= \frac{\tilde D (1+mA^*)^{n-1}((1+\alpha_0)^n(1+mA^*)^{kn} - 1)}{(1+\alpha_0)(1+mA^*)^k - 1} \le$$

$$\le \bar K_{k+1}(1+\alpha)^n (1+mA^*)^{n(k+1)},$$

де стала $\bar K_{k+1} = \dfrac{\tilde D}{((1+\alpha)(1+mA^*)-1)(1+mA^*)}$ і не залежить від $n$ та $\{\varphi, \bar\varphi\} \subset \mathcal{T}_m$.

Останнє доводить оцінку (13) при $s = k+1$, а разом з тим і лему 3.

**Лема 4.** *Нехай виконуються умови леми 3, причому $\{P(\varphi, c(\varphi))\} \subset C^\rho_{\mathrm{Lip}}(\varphi)$. Тоді при всіх натуральних $n$ і $1 \le s \le \rho$ для будь-яких цілих $l+g \ge 0, p \ge 0$ справджуються нерівності*

$$\|D_\varphi^s(\overset{(n)}{c}(\varphi_{l+g}(\varphi)) - \overset{(n)}{c}(\varphi_{l+g}(\bar\varphi)))\| \le C_s(1+\alpha_0)^{l+g}(1+mA^*)^{s(l+g)}\|\varphi - \bar\varphi\|, \qquad (15)$$

$$\|D_\varphi^s(\overset{(n)}{\Omega}{}^0_l(p,\varphi) - \overset{(n)}{\Omega}{}^0_l(p,\bar\varphi))\| \le \Omega_s \lambda^l (1+\alpha_0)^l (1+mA^*)^{sl}\|\varphi - \bar\varphi\|, \qquad (16)$$

*де сталі $C_s$ і $\Omega_s$ не залежать від $n$ та $\{\varphi, \bar\varphi\} \subset \mathcal{T}_m$.*

***Доведення.*** З подання (7) випливає, що $\|D_\varphi^s(\overset{(n)}{c}(\varphi_{l+g}(\varphi)) - \overset{(n)}{c}(\varphi_{l+g}(\bar\varphi)))\|$ не перевищує суму скінченної кількості доданків вигляду $\|\Phi_\eta(\varphi) - \Phi_\eta(\bar\varphi)\|$.

Нехай $c(\varphi)$ і $P(\varphi)$ належать $C^\rho_{\mathrm{Lip}}(\varphi)$ з коефіцієнтами $\beta$ і $\gamma$ відповідно.

Враховуючи леми 1, 3 і вводячи позначення

$$\bar C_s = \beta \prod_{i=1}^m K_{\lambda_i} + C^*\{\bar K_{\lambda_1} K_{\lambda_2} K_{\lambda_3} \ldots K_{\lambda_m} + K_{\lambda_1} \bar K_{\lambda_2} K_{\lambda_3} \ldots K_{\lambda_m} + \ldots$$

$$\ldots + K_{\lambda_1} K_{\lambda_2} K_{\lambda_3} \ldots K_{\lambda_{m-1}} \bar K_{\lambda_m}\},$$

виписуємо такі нерівності:

$$\|\Phi_\eta(\varphi)-\Phi_\eta(\bar\varphi)\| \le \beta\|\varphi_{l+g}(\varphi)-\varphi_{l+g}(\bar\varphi)\|\prod_{i=1}^{m}K_{\lambda_i}(1+mA^*)^{\lambda_i(l+g)}+$$

$$+C^*\|D_\varphi^{\lambda_1}(\varphi_{l+g}^{l_1}(\varphi))\dots D_\varphi^{\lambda_m}(\varphi_{l+g}^{l_m}(\varphi))-D_\varphi^{\lambda_1}(\varphi_{l+g}^{l_1}(\bar\varphi))\dots D_\varphi^{\lambda_m}(\varphi_{l+g}^{l_m}(\bar\varphi))\| \le$$

$$\le \beta(1+\alpha_0)^{l+g}(1+mA^*)^{s(l+g)}\prod_{i=1}^{m}K_{\lambda_i}\|\varphi-\bar\varphi\|+C^*\{\bar K_{\lambda_1}K_{\lambda_2}K_{\lambda_3}\dots K_{\lambda_m}+$$

$$+K_{\lambda_1}\bar K_{\lambda_2}K_{\lambda_3}\dots K_{\lambda_m}+\ \dots\ +K_{\lambda_1}K_{\lambda_2}K_{\lambda_3}\dots K_{\lambda_{m-1}}\bar K_{\lambda_m}\}(1+\alpha_0)^{l+g}\times$$

$$\times(1+mA^*)^{s(l+g)}\|\varphi-\bar\varphi\| \le \bar C_s(1+\alpha_0)^{l+g}(1+mA^*)^{s(l+g)}\|\varphi-\bar\varphi\|,$$

причому при $\lambda_i=0$ покладено $K_{\lambda_i}=\bar K_{\lambda_i}=1$ і сталі $\bar C_s$ не залежать від $n$ та $\{\varphi,\bar\varphi\}\subset\mathcal{T}_m$, що доводить нерівність (15).

Для доведення оцінки (16) використаємо метод математичної індукції. При $s=1$ цю оцінку доведено в [4] (лема 5). Припустимо, що оцінка (16) справджується при всіх натуральних $s<d<\rho$, і доведемо її при $s=d$. Використовуючи рівність (8), приходимо до висновку, що $\|D_\varphi^d(\overset{(n)}{\Omega}{}_l^0(p,\varphi)-(\overset{(n)}{\Omega}{}_l^0(p,\bar\varphi)\|$ не перевищує вираз $\sum_{k=1}^{l}\bar\Gamma$, де $\bar\Gamma$ є сумою скінченної кількості доданків вигляду $\bar\Gamma^*=\|\Gamma^*(p_0,p_1,p_2,\varphi)-\Gamma^*(p_0,p_1,p_2,\bar\varphi)\|$. Але

$$\bar\Gamma^* \le \|D_\varphi^{p_0}(\overset{(n)}{\Omega}{}_k^0(p,\varphi)-\overset{(n)}{\Omega}{}_k^0(p,\bar\varphi))\|\|D_\varphi^{p_1}(\overset{(n)}{P}(\varphi_{k+p-1}(\varphi))\|\times$$

$$\times\|D_\varphi^{p_2}(\overset{(n)}{\Omega}{}_l^{k-1}(p,\varphi)))\|+\|D_\varphi^{p_0}(\overset{(n)}{\Omega}{}_k^0(p,\bar\varphi))\|\|D_\varphi^{p_1}(\overset{(n)}{P}(\varphi_{k+p-1}(\varphi))-$$

$$-\overset{(n)}{P}(\varphi_{k+p-1}(\bar\varphi)))\|\|D_\varphi^{p_2}(\overset{(n)}{\Omega}{}_l^{k-1}(p,\varphi))\|+$$

$$+\|D_\varphi^{p_0}(\overset{(n)}{\Omega}{}_k^0(p,\bar\varphi))\|\|D_\varphi^{p_1}(\overset{(n)}{P}(\varphi_{k+p-1}(\bar\varphi))\|\times$$

$$\times\|D_\varphi^{p_2}(\overset{(n)}{\Omega}{}_l^{k-1}(p,\varphi)-\overset{(n)}{\Omega}{}_l^{k-1}(p,\bar\varphi))\|,$$

звідки, враховуючи (6), (10), (12), маємо

$$\bar\Gamma^* \le \|D_\varphi^{p_0}(\overset{(n)}{\Omega}{}_k^0(p,\varphi)-\overset{(n)}{\Omega}{}_k^0(p,\bar\varphi))\|X(p_1)(1+mA^*)^{p_1(k+p-1)}\times$$

$$\times\tilde Z(p_2)\lambda^{l-k+1}(1+mA^*)^{p_2 l}+$$

$$+Z_{p_0}\lambda^k(1+mA^*)^{p_0 k}\tilde Z(p_2)\lambda^{l-k+1}(1+mA^*)^{p_2 l}\|D_\varphi^{p_1}(\overset{(n)}{P}(\varphi_{k+p-1}(\varphi)-$$

$$- \overset{(n)}{P}(\varphi_{k+p-1}(\bar{\varphi}))\| + Z_{p_0}\lambda^k(1+mA^*)^{p_0k}X(p_1)(1+mA^*)^{p_1(k+p-1)}\times$$

$$\times \|D_{\varphi}^{p_2}(\overset{(n)}{\Omega}{}_l^{k-1}(p,\varphi) - \overset{(n)}{\Omega}{}_l^{k-1}(p,\bar{\varphi}))\|.$$

Враховуючи подання (9), можна стверджувати, що вираз

$$\|D_{\varphi}^{p_1}(\overset{(n)}{P}(\varphi_{k+p-1}(\varphi)) - \overset{(n)}{P}(\varphi_{k+p-1}(\bar{\varphi})))\|$$

не перевищує суму скінченної кількості доданків вигляду

$$\gamma(1+\alpha_0)^{k+p-1}\prod_{i=1}^{m}K_{\lambda_i}(1+mA^*)^{\lambda_i(k+p-1)}\|\varphi-\bar{\varphi}\| + mP^*\{\bar{K}_{\lambda_1}K_{\lambda_2}K_{\lambda_3}\ldots K_{\lambda_m}+$$

$$+ K_{\lambda_1}\bar{K}_{\lambda_2}K_{\lambda_3}\ldots K_{\lambda_m} + \ldots + K_{\lambda_1}K_{\lambda_2}K_{\lambda_3}\ldots K_{\lambda_{m-1}}\bar{K}_{\lambda_m}\}\times$$

$$\times (1+\alpha_0)^{k+p-1}(1+mA^*)^{p_1(k+p-1)}\|\varphi-\bar{\varphi}\|.$$

Позначаючи їх кількість через $m_1$, одержуємо оцінку

$$\|D_{\varphi}^{p_1}(\overset{(n)}{P}(\varphi_{k+p-1}(\varphi)) - \overset{(n)}{P}(\varphi_{k+p-1}(\bar{\varphi})))\| \le$$

$$\le \gamma_0(1+\alpha_0)^{k+p-1}(1+mA^*)^{p_1(k+p-1)}\|\varphi-\bar{\varphi}\|,$$

де

$$\gamma_0 = \left\{\gamma\prod_{i=1}^{m}K_{\lambda_i} + mP^*(\bar{K}_{\lambda_1}K_{\lambda_2}K_{\lambda_3}\ldots K_{\lambda_m} + K_{\lambda_1}\bar{K}_{\lambda_2}K_{\lambda_3}\ldots K_{\lambda_m} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + K_{\lambda_1}K_{\lambda_2}K_{\lambda_3}\ldots K_{\lambda_{m-1}}\bar{K}_{\lambda_m})\right\}m_1$$

— стала, що не залежить від $n$ та $\{\varphi,\bar{\varphi}\}\subset\mathcal{T}_m$.

Тоді, враховуючи рівність

$$\|D_{\varphi}^{p_2}(\overset{(n)}{\Omega}{}_l^{k-1}(p,\varphi) - \overset{(n)}{\Omega}{}_l^{k-1}(p,\bar{\varphi}))\| =$$

$$= \|D_{\varphi}^{p_2}(\overset{(n)}{\Omega}{}_{l-k+1}^{0}(p,\varphi_{k-1}(\varphi)) - \overset{(n)}{\Omega}{}_{l-k+1}^{0}(p,\varphi_{k-1}(\bar{\varphi})))\|,$$

маємо

$$\bar{\Gamma}^* \le X(p_1)\tilde{Z}(p_2)\Omega_{p_0}\lambda^k(1+\alpha_0)^k(1+mA^*)^{p_0k}\times$$

$$\times(1+mA^*)^{p_1(k+p-1)}\lambda^{l-k+1}(1+mA^*)^{p_2l}\|\varphi-\bar{\varphi}\|+$$

$$+ Z_{p_0}\tilde{Z}(p_2)\gamma_0\lambda^k(1+mA^*)^{p_0k}\lambda^{l-k+1}(1+mA^*)^{p_2l}\times$$

$$\times (1+\alpha_0)^{k+p-1}(1+mA^*)^{p_1(k+p-1)}\|\varphi-\bar\varphi\|+$$

$$+ Z_{p_0}X(p_1)\Omega_{p_2}\lambda^k(1+mA^*)^{p_0k}(1+mA^*)^{p_1(k+p-1)}\times$$

$$\times \lambda^{l-k+1}(1+\alpha_0)^{l-k+1}(1+mA^*)^{p_2(l-k+1)}\|\varphi-\bar\varphi\| \le$$

$$\le \lambda X(p_1)\tilde Z(p_2)\Omega_{p_0}(1+mA^*)^{pd}\lambda^l(1+\alpha_0)^k(1+mA^*)^{ld}\|\varphi-\bar\varphi\|+$$

$$+ \lambda(1+\alpha_0)^pZ_{p_0}\tilde Z(p_2)\gamma_0(1+mA^*)^{pd}\lambda^l(1+\alpha_0)^k(1+mA^*)^{ld}\|\varphi-\bar\varphi\|+$$

$$+ \lambda(1+mA^*)^{pd}Z_{p_0}X(p_1)(1+mA^*)^{p_2l}\lambda^l(1+\alpha_0)^l(1+mA^*)^{(p_0+p_1)k}\|\varphi-\bar\varphi\|.$$

Вводячи позначення

$$\lambda X(p_1)\tilde Z(p_2)\Omega_{p_0}(1+mA^*)^{pd} = \bar\Gamma_1^*,$$

$$\lambda(1+\alpha_0)^pZ_{p_0}\tilde Z(p_2)\gamma_0(1+mA^*)^{pd} = \bar\Gamma_2^*,$$

$$\lambda(1+mA^*)^{pd}Z_{p_0}X(p_1)\Omega_{p_2} = \bar\Gamma_3^*,$$

одержуємо оцінку

$$\bar\Gamma^* \le \lambda^l\{(1+\alpha_0)^k(1+mA^*)^{dl}(\bar\Gamma_1^*+\bar\Gamma_2^*)+$$

$$+ \bar\Gamma_3^*(1+\alpha_0)^l(1+mA^*)^{p_2l}(1+mA^*)^{(p_0+p_1)k}\}\|\varphi-\bar\varphi\|.$$

Звідси

$$\sum_{k=1}^{l}\bar\Gamma^* \le \lambda^l\Bigg\{(1+mA^*)^{dl}\frac{1}{\alpha_0}(\bar\Gamma_1^*+\bar\Gamma_2^*)(1+\alpha_0)^{l+1}+$$

$$+ \bar\Gamma_3^*(1+\alpha_0)^l(1+mA^*)^{p_2l}\frac{1}{(1+mA^*)^{p_0+p_1}-1}\times$$

$$\times (1+mA^*)^{p_0+p_1}(1+mA^*)^{(p_0+p_1)l}\Bigg\}\|\varphi-\bar\varphi\|.$$

Позначаючи, в свою чергу, вираз

$$\frac{1+\alpha_0}{\alpha_0}(\bar\Gamma_1^*+\bar\Gamma_2^*)+\bar\Gamma_3^*\frac{(1+mA^*)^d}{mA^*}$$

через $\bar\Gamma_4^*$, отримуємо нерівність

$$\sum_{k=1}^{l}\bar\Gamma^* \le \bar\Gamma_4^*\lambda^l(1+\alpha_0)^l(1+mA^*)^{dl}\|\varphi-\bar\varphi\|,$$

де $\bar{\Gamma}_4^*$ — стала, що не залежить від $n, l$ та $\{\varphi, \bar{\varphi}\} \subset \mathcal{T}_m$. Це завершує доведення леми.

***Доведення теореми.*** Як відомо [4], в умовах теореми функції

$$u(p, g, \varphi) = -\sum_{l=1}^{\infty} \Omega_l^0(p, \varphi) c(\varphi_{l+g}(\varphi))$$

та

$$\overset{(s)}{u}(p, g, \varphi) = -\sum_{l=1}^{\infty} \overset{(s)}{\Omega}{}_l^0(p, \varphi) \overset{(s)}{c}(\varphi_{l+g}(\varphi))$$

породжують інваріантні тори систем рівнянь (1) і (2) відповідно, причому в покоординатному розумінні

$$\lim_{s \to \infty} \overset{(s)}{u}(p, g, \varphi) = u(p, g, \varphi).$$

Покажемо, що послідовність

$$D_\varphi^s(\overset{(1)}{u}(p, g, \varphi)), D_\varphi^s(\overset{(2)}{u}(p, g, \varphi)), \ldots, D_\varphi^s(\overset{(n)}{u}(p, g, \varphi)), \ldots \tag{17}$$

є рівномірно відносно $n$ обмеженою і рівностепенево неперервною по $\varphi$ при кожному натуральному $s \leq \rho$.

Очевидно, що

$$D_\varphi^s(\overset{(n)}{u}(p, g, \varphi)) = D_\varphi^s\left(-\sum_{l=1}^{\infty} \overset{(n)}{\Omega}{}_l^0(p, \varphi) \overset{(n)}{c}(\varphi_{l+g}(\varphi))\right),$$

і якщо ряди

$$-\sum_{l=1}^{\infty} D_\varphi^k(\overset{(n)}{\Omega}{}_l^0(p, \varphi)) D_\varphi^{s-k}(\overset{(n)}{c}(\varphi_{l+g}(\varphi))), \ \ k = 0, 1, 2, \ldots, s, \tag{18}$$

рівномірно по $\varphi \in \mathcal{T}_m$ збігаються за нормою при кожному вказаному $k$, то має місце рівність

$$D_\varphi^s(\overset{(n)}{u}(p, g, \varphi)) = -\sum_{l=1}^{\infty} D_\varphi^s(\overset{(n)}{\Omega}{}_l^0(p, \varphi) \overset{(n)}{c}(\varphi_{l+g}(\varphi))) = \varepsilon(s, \varphi),$$

де $\varepsilon(s, \varphi)$ — сума скінченної кількості доданків вигляду (18).

Скориставшись лемою 2, випишемо оцінки

$$\sum_{l=1}^{\infty} \|D_{\varphi}^{k}(\overset{(n)}{\Omega}{}_{l}^{0}(p,\varphi))\|\|D_{\varphi}^{s-k}(\overset{(n)}{c}(\varphi_{l+g}(\varphi)))\| \leq$$

$$\leq \sum_{l=1}^{\infty} Z_k \lambda^l (1+mA^*)^{kl} C_{s-k}^* (1+mA^*)^{(s-k)(l+g)} \leq$$

$$\leq Z_k C_{s-k}^* (1+mA^*)^{(s-k)g} \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^l (1+mA^*)^{sl} \leq$$

$$\leq Z_k C_{s-k}^* (1+mA^*)^{sg} \frac{\lambda(1+mA^*)^s}{1-\lambda(1+mA^*)^s}.$$

Отже, ряди (18) при кожному $k = 0,1,2,\ldots,s$ збігаються за нормою рівномірно відносно $\varphi \in \mathcal{T}_m$, і послідовність (17) рівномірно обмежена.

Вираз

$$\|D_{\varphi}^{s}(\overset{(n)}{u}(p,g,\varphi) - \overset{(n)}{u}(p,g,\bar{\varphi}))\| = \|\varepsilon(s,\varphi) - \varepsilon(s,\bar{\varphi})\|$$

не перевищує суму скінченної кількості доданків вигляду

$$I(s) = \sum_{l=1}^{\infty} \|D_{\varphi}^{k}(\overset{(n)}{\Omega}{}_{l}^{0}(p,\varphi))D_{\varphi}^{s-k}(\overset{(n)}{c}(\varphi_{l+g}(\varphi)))-$$

$$- D_{\varphi}^{k}(\overset{(n)}{\Omega}{}_{l}^{0}(p,\bar{\varphi}))D_{\varphi}^{s-k}(\overset{(n)}{c}(\varphi_{l+g}(\bar{\varphi})))\|, \;\; k = 0,1,2,\ldots,s.$$

Використовуючи леми 2, 4 і позначаючи вираз

$$\Omega_k C_{s-k}^* (1+mA^*)^{sg} + Z_k (1+\alpha_0)^g (1+mA^*)^{sg} C_{s-k}$$

через $\Omega(s,k)$, одержуємо співвідношення

$$I(s) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \Big\{ \big\|D_{\varphi}^{k}(\overset{(n)}{\Omega}{}_{l}^{0}(p,\varphi) - \overset{(n)}{\Omega}{}_{l}^{0}(p,\bar{\varphi}))\big\|\big\|D_{\varphi}^{s-k}(\overset{(n)}{c}(\varphi_{l+g}(\varphi)))\big\| +$$

$$+ \big\|D_{\varphi}^{k}(\overset{(n)}{\Omega}{}_{l}^{0}(p,\bar{\varphi}))\big\|\big\|D_{\varphi}^{s-k}(\overset{(n)}{c}(\varphi_{l+g}(\varphi)) - \overset{(n)}{c}(\varphi_{l+g}(\bar{\varphi})))\big\| \Big\} \leq$$

$$\leq \sum_{l=1}^{\infty} \Big\{ \Omega_k \lambda^l (1+\alpha_0)^l (1+mA^*)^{kl} C^*_{s-k} (1+mA^*)^{(s-k)(l+g)} \|\varphi - \bar{\varphi}\| +$$

$$+ Z_k \lambda^l (1+mA^*)^{kl} C_{s-k} (1+\alpha_0)^{l+g} (1+mA^*)^{(s-k)(l+g)} \|\varphi - \bar{\varphi}\| \Big\} \leq$$

$$\leq \|\varphi - \bar{\varphi}\| \Omega(s,k) \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^l (1+\alpha_0)^l (1+mA^*)^{sl} \leq$$

$$\leq \Omega(s,k) \frac{\lambda(1+\alpha_0)(1+mA^*)^s}{1-\lambda(1+\alpha_0)(1+mA^*)^s} \|\varphi - \bar{\varphi}\|.$$

Це гарантує рівностепеневу неперервність послідовності (17) по $\varphi \in \mathcal{T}_m$ при кожному $s \leq \rho$.

Враховуючи покоординатну збіжність послідовності $\{\overset{(n)}{u}(p,g,\varphi)\}$ до $u(p,g,\varphi)$ при $n \to \infty$ і застосовуючи теорему Арцела — Асколі потрібну кількість разів, завершуємо доведення теореми.

***Наслідок.*** *Якщо в системі рівнянь (1)* $a(\varphi) = \omega$, *де* $\omega$ *— сталий вектор, то твердження теореми справджується при всіх цілих* $p$ *і* $g$.


1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. — Киев: Наук. думка, 1990. — 272 с.
3. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. — 308 с.
4. *Теплінський Ю. В., Марчук Н. А.* Метод укорочення в дослідженні гладкості інваріантного тора зчисленної системи різницевих рівнянь з параметрами // Зб. наук. праць Кам'янець- Поділ. пед. ун-ту. Сер. мат. — 2000. — Вип. 5. — С. 117–126.


*Одержано 27.10.2001*