УДК 517 . 9

УСКОРЕНИЕ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ ДЛЯ СЛАБОНЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

С. М. Чуйко

Славян. пед. ун-т
Украина, 84116, Славянск, ул. Г. Батюка, 19
e-mail: chujko-slav@inbox.ru

We obtain a new iteration procedure for finding solutions of a Noetherian weakly nonlinear boundary-value problem for a system of ordinary differential equations in the noncritical case.

Побудовано нову ітераційну процедуру для знаходження розв'язків нетерової слабконелінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у некритичному випадку.

Постановка задачи. Для построения решения

$$z(t,\varepsilon) = \mathrm{col}(z^{(1)}(t,\varepsilon),\ldots,z^{(n)}(t,\varepsilon)),$$

$$z_i(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b], \quad z_i(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t) + \varepsilon Z(z,t,\varepsilon), \tag{1}$$

удовлетворяющих краевому условию

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{2}$$

традиционно используется метод простых итераций [1, 2]. Преимуществом этого метода является простота, однако сходимость итерационной процедуры, получаемой по методу простых итераций, линейна. Поэтому естественно возникает задача о построении итерационной процедуры, имеющей ускоренную сходимость. Для решения поставленной задачи используем эффективный метод Ньютона – Канторовича [3, 4].

Решение краевой задачи (1), (2) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$\frac{dz_0}{dt} = A(t)z_0 + f(t), \tag{3}$$

$$\ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in R^m. \tag{4}$$

Здесь $A(t)$ — $(n \times n)$-матрица и $f(t)$ — n-мерный вектор-столбец, элементы которых — непрерывные на отрезке $[a,b]$ действительные функции, $\ell z(\cdot)$ — линейный ограниченный векторный функционал вида $\ell z(\cdot) = \operatorname{col}\left(\ell^{(1)}z(\cdot), \ldots, \ell^{(m)}z(\cdot)\right), m \neq n, \ell^{(1)}z(\cdot), \ldots, \ell^{(m)}z(\cdot) : C[a,b] \to R^1$ — линейные ограниченные функционалы. Нелинейности $Z(z,t,\varepsilon)$ и $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ задачи (1), (2) дважды непрерывно дифференцируемы по неизвестной z в малой окрестности порождающего решения и дважды непрерывно дифференцируемы по малому параметру ε в малой положительной окрестности нуля. Кроме того, считаем вектор-функцию $Z(z,t,\varepsilon)$ непрерывной по независимой переменной t на отрезке $[a,b]$. Предположим, что для порождающей задачи (3), (4) имеет место некритический случай $P_{Q^*} = 0$. Здесь $Q = \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$-матрица, P_{Q^*} — $(m \times m)$-матрица-ортопроектор $P_{Q^*} : R^m \to N(Q^*)$, $X(t)$ — нормальная фундаментальная матрица $(X(a) = I_n)$ однородной части системы (3). При этом общее решение задачи (3), (4)

$$z_0(t,c_r) = X_r(t)c_r + G\left[f(s);\alpha\right](t)$$

определяет обобщенный оператор Грина задачи (3), (4)

$$G[f(s);\alpha](t) = X(t)Q^+\{\alpha - \ell K[f(s)](\cdot)\} + K[f(s)](t).$$

Здесь Q^+ — псевдообратная матрица по Муру–Пенроузу [1].

В некритическом случае система (1), (2) разрешима для любых нелинейностей дифференциальной системы $Z(z(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ и краевого условия $J(z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$. Искомое решение $z(t,\varepsilon) = z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon)$ ищем в окрестности решения порождающей задачи. Для нахождения возмущения

$$x(t,\varepsilon) = \operatorname{col}(x^{(1)}(t,\varepsilon), \ldots, x^{(n)}(t,\varepsilon)),$$

$$x^{(j)}(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b], \quad x^{(j)}(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad x^{(j)}(t,0) \equiv 0, \quad j = 1,2,\ldots,n,$$

порождающего решения $z_0(t,c_r)$ получаем задачу

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon Z(z_0 + x, t, \varepsilon), \tag{5}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon J(z_0(\cdot,c_r) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon). \tag{6}$$

Решение задачи (5), (6) представимо в виде

$$x(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(t,\varepsilon), \tag{7}$$

где

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon G[Z(z_0(s,c_r) + x(s,\varepsilon), s, \varepsilon);\ J(z_0(\cdot,c_r) + x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)](t).$$

Произвольный вектор

$$c_r(\varepsilon) = \operatorname{col}(c_r^{(1)}(\varepsilon), \ldots, c_r^{(r)}(\varepsilon)),$$

$$c_r^{(j)}(\cdot) \in C^1[0,\varepsilon_0], \quad c_r^{(j)}(0) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,r.$$

Оператор Грина в равенстве (7) определяет непрерывный оператор

$$(\Phi_0\, x)(t,\varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + \varepsilon X(t)Q^+\{J(z_0(\cdot,c_r)+x(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)-$$
$$-\,\ell K[Z(z_0(s,c_r)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)](\cdot)\} + \varepsilon K[Z(z_0(s,c_r)+x(s,\varepsilon),s,\varepsilon)](t).$$

Система

$$x(t,\varepsilon) = (\Phi_0\, x)(t,\varepsilon) \tag{8}$$

в этом случае эквивалентна краевой задаче (1), (2) на множестве функций $x(t,\varepsilon)$, обращающихся в нуль при $\varepsilon = 0$, причем для построения решений этой операторной системы применим [1, 2] метод простых итераций

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = (\Phi_0\, x_k)(t,\varepsilon), \quad x_0(t,\varepsilon) \equiv 0, \quad k = 0,1,\ldots. \tag{9}$$

Процедура (9) имеет линейную сходимость, поэтому естественно поставить задачу об ускорении этих итераций. Для этого воспользуемся методом Ньютона – Канторовича. Введем в рассмотрение оператор

$$(\varphi\, x)(t,\varepsilon) = (\Phi_0\, x)(t,\varepsilon) - x(t,\varepsilon).$$

Оператор $\varphi(x(t,\varepsilon))$ действует из пространства непрерывных на отрезках $[a,b]$ и $[0,\varepsilon_0]$ действительных вектор-функций

$$x(t,\varepsilon) = \mathrm{col}(x^{(1)}(t,\varepsilon),\ldots,x^{(n)}(t,\varepsilon)), \quad x^{(j)}(\cdot,\varepsilon) \in C^1[a,b],$$
$$x^{(j)}(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad j = 1,2,\ldots,n,$$

в это же пространство.

Схема доказательства следующих утверждений аналогична [3], поэтому подробности последующих преобразований опущены. Согласно теореме Канторовича [5], для нахождения решения операторной системы (8) применима итерационная процедура $(x_0(t,\varepsilon) \equiv 0)$

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = x_k(t,\varepsilon) - [(\varphi'\, x_k)(t,\varepsilon)]^{-1}(\varphi\, x_k)(t,\varepsilon), \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{10}$$

Определитель производной

$$(\varphi'\, x_k)(t,\varepsilon) = \varepsilon G\left[\frac{\partial Z(z_0(t,c_r)+x_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon)}{\partial x};\ \frac{\partial J(z_0(\cdot,c_r)+x_k(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x}\right](t) - I_n$$

в малой окрестности порождающего решения $z_0(t,c_r)$ и точки $\varepsilon = 0$ мало отличается от -1, поэтому формула (10) корректна. В достаточно малой окрестности точного решения $\tilde z(t,\varepsilon)$ при условии

$$\theta\, \|\tilde z(t,\varepsilon) - z_0(t,c_r)\| < 1 \tag{11}$$

итерационная процедура (10) сходится, причем имеет место квадратичная сходимость. Для этого необходимо существование константы

$$\theta = \sup_{k \in N} \left\{ \frac{\gamma_1(k)\gamma_2(k)}{2} \right\}.$$

Здесь величины $\gamma_1(k)$, $\gamma_2(k)$ гарантируют выполнение неравенств

$$\left\| \left[\left(\frac{\partial \varphi(z_0 + x)}{\partial x} \Big|_{\, x \, = \, x_k} \right)(t, \varepsilon) \right]^{-1} \right\| \leq \gamma_1(k),$$

$$\left\| \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \, x \right] \Big|_{\, z \, = \, \xi_k} \right\}(t, \varepsilon) \right\| \leq \gamma_2(k) \, ||x(t, \varepsilon)||,$$

где $\xi_k(t, \varepsilon)$ — точка, лежащая на отрезке, образованном точками $\tilde{z}(t, \varepsilon)$ и $z_k(t, \varepsilon)$. Поскольку точное решение $\tilde{z}(t, \varepsilon)$ неизвестно, на практике имеет смысл использовать условие сходимости

$$\tilde{\theta} \, \|z_k(t, \varepsilon) - z_0(t, c_r)\| < 1,$$

где

$$\tilde{\theta} = \sup_{k \in N} \left\{ \frac{\gamma_1(k)\tilde{\gamma}_2(k)}{2} \right\}, \quad \left\| \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \, x \right] \Big|_{\, z \, = \, z_k} \right\}(t, \varepsilon) \right\| \leq \tilde{\gamma}_2(k) \, \|x(t, \varepsilon)\|.$$

Пример. Покажем, что итерационная процедура (10) применима для нахождения T-периодического решения уравнения

$$\frac{dz}{dt} = z - \frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon \, \arccos z, \tag{12}$$

при $\varepsilon = 0$ обращающегося в T-периодическое решение порождающего уравнения

$$\frac{dz_0}{dt} = z_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Поскольку $X(t) = e^t$, $Q = \ell X(\cdot) = 1 - e^T \neq 0$, имеет место некритический случай. Легко показать, что T-периодическая задача для уравнения (12) не имеет решений, отличных от положений равновесия. Другими словами, T-периодическая задача для уравнения (12) имеет единственное периодическое решение, при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $z_0(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Для уравнения (12) оператор $(\varphi \, x)$ имеет вид

$$(\varphi \, x) = \varepsilon \, G[Z(z_0(t, c_r) + x(t, \varepsilon), t, \varepsilon); 0](t) - x(t, \varepsilon).$$

Производная этого оператора

$$(\varphi' x) = G[Z'_x(z_0(t,c_r) + x(t,\varepsilon), t, \varepsilon); 0](t) - 1$$

определяет итерационную процедуру

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = x_k(t,\varepsilon) - \frac{\varepsilon\, G[Z(z_0(t,c_r) + x_k(t,\varepsilon), t, \varepsilon); 0](t) - x_k(t,\varepsilon)}{G[Z'_x(z_0(t,c_r) + x_k(t,\varepsilon), t, \varepsilon); 0](t) - 1}.$$

Поскольку

$$Z(z_0(t,c_r), t, 0) = \arccos(z_0(t,c_r)) = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\frac{\partial Z(z_0(t,c_r), t, 0)}{\partial x} = -\sqrt{2},$$

то

$$x_1(t,\varepsilon) = -\frac{\varepsilon\, G[\pi/4; 0](t)}{G[-\sqrt{2}; 0](t) - 1} = -\frac{-\varepsilon\,\pi/4}{\varepsilon\sqrt{2} - 1} = -\frac{\varepsilon\,\pi}{4(1 - \varepsilon\sqrt{2})}.$$

При нахождении первого приближения мы положили $x_0(t,\varepsilon) \equiv 0$; дальнейшие приближения $x_1(t,\varepsilon)$, $x_2(t,\varepsilon), \ldots$ представляют собой функции, зависящие только от малого параметра. Оператор Грина в задаче о нахождения периодического решения уравнения (12) действует на эти функции следующим образом:

$$G[\arccos(z_0(t,c_r) + x_k(t,\varepsilon)); 0](t) = -\arccos(z_0(t,c_r) + x_k(t,\varepsilon)).$$

Таким образом, для нахождения периодического решения уравнения (12) применима итерационная процедура

$$x_{k+1}(t,\varepsilon) = x_k(t,\varepsilon) - \frac{x_k(t,\varepsilon) + \varepsilon\arccos(z_0(t,c_r) + x_k(t,\varepsilon))}{1 - \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1 - (z_0(t,c_r) + x_k(t,\varepsilon))^2}}}. \tag{13}$$

Оценим промежуток значений малого параметра, на котором сохраняется сходимость этой итерационной процедуры. Для этого оценим промежуток значений малого параметра, на котором для всех натуральных значений индекса k выполняется достаточное условие (11) сходимости итерационной процедуры (13). Вычисляя первую производную

$$(\varphi' x_k) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - (z_0(t,c_r) + x_k(t,\varepsilon))^2}} - 1$$

и вторую производную оператора $(\varphi\, x)(t,\varepsilon)$

$$\left\| \left\{ \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}\, x\right] \Bigg|_{z = \xi_k} \right\}(t,\varepsilon) \right\| = \frac{\varepsilon\,(\xi_k(t,\varepsilon))}{\sqrt{[1 - (\xi_k(t,\varepsilon))^2]^3}},$$

приходим к условию $\tilde{\theta}\,\|x_k(t,\varepsilon)\| < 1$, где

$$\tilde{\theta} = \sup_{k\in N}\left|\frac{\varepsilon(z_0(t,c_r)+x_k(t,\varepsilon))}{2(1-(z_0(t,c_r)+x_k(t,\varepsilon))^2)(\sqrt{1-(z_0(t,c_r)+x_k\,(t,\varepsilon))^2}-\varepsilon)}\right|,$$

гарантирующему выполнение требования (11). Как показывают численные оценки, $\tilde{\theta} \approx$ $\approx 1,12\,838$, при этом последнее неравенство выполняется для всех натуральных значений индекса k при изменении малого параметра на отрезке $[0;\ 0,434\,699]$. Примем условием окончания итераций

$$\Delta = (\varphi\, z_{k+1}) = \left|z_{k+1} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon \arccos(z_{k+1})\right| < 10^{-15}.$$

В этом случае при максимальном значении малого параметра $\varepsilon = 0,434\,699$ итерационная процедура (10) сходится на третьем шаге. Для сравнения заметим, что при значении малого параметра $\varepsilon = 0,434\,699$ итерационная процедура (9) сходится на 41-м шаге.

Методика построения итерационной процедуры, аналогичной схеме (10), с использованием метода Ньютона–Канторовича может быть перенесена на краевые задачи в различных критических случаях ($P_{Q^*} \neq 0$), в частности на автономные краевые задачи [6].

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 p.
2. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с.
4. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 455 с.
5. *Деннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. — М.: Мир, 1988. — 440 с.
6. *Бойчук А. А., Чуйко С. М.* Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференц. уравнения. — 1992. — № 10. — С. 1668–1674.

Получено 10.11.2005