УДК 517.9

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

Д. В. Бельский

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3

We find new properties of $C^1(0,+\infty)$-solutions of the linear differential-functional equation $\dot{x}(t) = ax(t)+ +bx(qt) + c\dot{x}(qt)$ in a neighbourhood of the singular point $t = +\infty$.

Встановлено нові властивості $C^1(0,+\infty)$-розв'язків лінійного диференціально-функціонального рівняння $\dot{x}(t) = ax(t) + bx(qt) + c\dot{x}(qt)$ в околі особливої точки $t = +\infty$.

В данной работе рассматривается линейное дифференциально-функциональное уравнение

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(qt) + c\dot{x}(qt), \tag{1}$$

где $\{a,b,c\} \subset R, 0 < q < 1, t \in (0,+\infty)$. В настоящее время получены интересные результаты, касающиеся свойств его решений. Так, в [1] исследованы асимптотические свойства решений уравнения (1) при $c = 0$, в [2] установлены новые свойства решений этого уравнения при $a = 0, c = 0$, в [3] получены условия существования аналитических почти периодических решений уравнения (1) при $c = 0$, в [4] построено представление общего решения уравнения (1) при $|c| > 1$. Несмотря на широкие приложения таких уравнений в различных областях науки и техники (см. [5] и приведенную в ней библиографию), многие вопросы теории линейных дифференциально-функциональных уравнений вида (1) изучены мало. Это прежде всего касается исследования асимптотических свойств решений уравнения (1) из класса $C^1(0,+\infty)$ в окрестности особой точки $t = +\infty$. Цель данной работы — установить новые свойства $C^1(0,+\infty)$-решений уравнения (1) при достаточно общих предположениях относительно коэффициентов a, b, c.

Исследуем сначала ограниченность решений уравнения (1) на отрезке $[1,+\infty)$.

Теорема 1. *Пусть* $\{a,b,c\} \subset R, 0 < q < 1$. *Тогда:*

1) если $a < 0$, *то решения уравнения (1) являются* $O(t^\nu)$, *где* $\nu > \ln\left(\left|\frac{b}{a} + c\right| + |c|\right) \times \times \frac{1}{\ln q^{-1}}$ *при* $t \to +\infty$;

2) если $a \geq 0$, *то решения уравнения (1) являются* $O\left(e^{\eta t}\right)$, *где* $\eta > a$ *при* $t \to +\infty$.

Доказательство. Выполняя в уравнении (1) замену переменной $x(t) = t^\nu y(t)$, где ν — действительное число, которое будет определено ниже, получаем

$$\dot{y}(t) = \left(a - \frac{\nu}{t}\right) y(t) + \left(bq^\nu + c\nu q^{\nu-1}\frac{1}{t}\right) y(qt) + cq^\nu \dot{y}(qt).$$

Запишем последнее уравнение в виде

$$\dot{y}(t) = \left(a - \frac{\nu}{t}\right) y(t) + (bq^\nu + acq^\nu)\, y(qt) +$$

$$+\ cq^\nu\,(bq^\nu + acq^\nu)\, y\left(q^2 t\right) + (cq^\nu)^2\,(bq^\nu + acq^\nu)\, y\left(q^3 t\right) + \ldots$$

$$\ldots + (cq^\nu)^{m-1}\,(bq^\nu + acq^\nu)\, y\left(q^m t\right) +$$

$$+\ (cq^\nu)^m \left(bq^\nu + cq^{\nu-1}\frac{\nu}{q^m t}\right) y\left(q^{m+1}t\right) + (cq^\nu)^{m+1}\,\dot{y}\left(q^{m+1}t\right), \quad m \geq 1, \tag{2}$$

и оценим $|y(t)|$. С этой целью отрезок $[t_0, t_0 + L]$, где $t_0 \geq q^{-5}$ (q^{-5} выбрано произвольно, лишь для удобства дальнейших рассуждений), $L > 0$, такой, что при любом $t \in [t_0, t_0 + L]$ выполняется неравенство

$$|y(t)| \geq |y(s)| \qquad \forall\, s \in [q, t],$$

назовем отрезком „роста". Если отрезков „роста" не существует, то $|y(t)|$ — ограниченная на $[1, +\infty)$ функция. Предположим, что t принадлежит отрезку „роста" $[t_0, t_0 + L]$. Тогда при $m \in N$ и ν таких, что $q^{m+1}t \in [q, 1]$, $|cq^\nu| < 1$, в силу (2) имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|y(t)|^2 = \mathrm{Re}\left(y(t)\overline{\dot{y}(t)}\right) \leq \Bigg(a - \frac{\nu}{t} +$$

$$+\ |bq^\nu + acq^\nu| \left[1 + |cq^\nu| + |cq^\nu|^2 + \ldots + |cq^\nu|^{m-1}\right] +$$

$$+\ \left|(cq^\nu)^m\, bq^\nu + (cq^\nu)^{m+1}\,\frac{\nu}{q^{m+1}t}\right| + |cq^\nu|^{m+1}\,\frac{\left|\dot{y}(q^{m+1}t)\right|}{|y(t)|}\Bigg)|y(t)|^2 \leq$$

$$\leq \Bigg(a + |bq^\nu + acq^\nu|\,\frac{1}{1 - |cq^\nu|} + \left|(cq^\nu)^m\, bq^\nu + (cq^\nu)^{m+1}\,\frac{\nu}{q^{m+1}t}\right| +$$

$$+\ |cq^\nu|^{m+1}\,\frac{\sup\limits_{s\in[q,1]} |\dot{y}(s)|}{\sup\limits_{s\in[q,1]} |y(s)|}\Bigg)|y(t)|^2. \tag{3}$$

Если $a < 0$ и $\nu > \ln\left(\left|\dfrac{b}{a} + c\right| + |c|\right)\dfrac{1}{\ln q^{-1}}$, то $|cq^\nu| < 1$ и при $t_0 > T$ (где T, а следовательно, и m — достаточно большие числа) из (3) следует $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\,|y(t)|^2 < 0$. Таким образом, на интервале $(T, +\infty)$ отрезков „роста" не существует. Первая часть теоремы доказана.

Предположим, что $\eta > a \geq 0$. Выберем ν так, чтобы $|cq^\nu| < 1$ и

$$a + \left|bq^\nu + acq^\nu\right| \frac{1}{1 - |cq^\nu|} + \left|(cq^\nu)^m bq^\nu + (cq^\nu)^{m+1} \frac{\nu}{q^{m+1}t}\right| +$$

$$+ \left|cq^\nu\right|^{m+1} \frac{\sup\limits_{s\in[q,1]} |\dot{y}(s)|}{\sup\limits_{s\in[q,1]} |y(s)|} \leq a + |bq^\nu + acq^\nu| \frac{1}{1 - |cq^\nu|} + |cq^\nu| \, |bq^\nu| + |cq^\nu| \frac{\nu}{q} +$$

$$+ \left|cq^\nu\right| \frac{\sup\limits_{s\in[q,1]} |\dot{y}(s)|}{\sup\limits_{s\in[q,1]} |y(s)|} \leq \frac{\eta + a}{2}.$$

Тогда в силу (3) $y(t) = O\left(e^{\left(\frac{\eta+a}{2}\right)t}\right)$, $t \to +\infty$, и $x(t) = t^\nu y(t) = O\left(e^{\eta t}\right)$, $t \to +\infty$.

Теорема доказана.

Исследуем задачу о существовании решений уравнения (1), удовлетворяющих условию

$$\exists \lim_{t\to 0+} x(t) \overset{\mathrm{df}}{=} x(0+) \in C. \tag{4}$$

Теорема 2. *При* $\{a, b, c\} \subset R$, $0 < q < 1$, $|c| < q$, *задача (1), (4) имеет единственное решение*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k t^k, \quad \textit{где} \quad x_0 = x(0+), \quad x_k = \frac{a + bq^{k-1}}{(1 - cq^{k-1})\, k} x_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Доказательство. Исходя из условия существования предела (4) и теоремы 1, можно утверждать, что к решению задачи (1), (4) применимо преобразование Лапласа.

Рассмотрим случай, когда $a \geq 0$. Пусть $\tilde{x}(t)$ — некоторое решение задачи (1), (4), а $f(p)$ — его преобразование Лапласа, которое определено и является аналитической функцией в области $\operatorname{Re} p > a$. Для любого $p \in R$, $p > a + 2$, согласно теореме 1 имеем

$$|f(p)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-pt} \tilde{x}(t) dt\right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-pt} \left|\tilde{x}(t)\right| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-pt} K e^{(a+1)t} dt \leq$$

$$\leq \frac{K}{p - a - 1} \leq \frac{M}{p}, \qquad |f(p)|\, p \leq M < +\infty, \tag{5}$$

где M — некоторая постоянная.

Из (1), (4) получаем уравнение для преобразования Лапласа $f(p)$:

$$f(p) = q \frac{qp - a}{cp + b} f(qp) + \frac{c - q}{cp + b} x(0+), \qquad \operatorname{Re} p > q^{-1} a.$$

Предположим, что задача (1), (4) имеет два решения. Тогда разность преобразований Лапласа этих решений (обозначим ее $f_{\text{р}}(p)$) является ненулевым решением однородного уравнения

$$f_{\text{р}}(p) = q\frac{qp-a}{cp+b}f_{\text{р}}(qp), \qquad \operatorname{Re} p > q^{-1}a, \tag{6}$$

и удовлетворяет неравенству (5). Выполняя в уравнении (6) замену $f_{\text{р}}(p) = \dfrac{y(p)}{p}$, получаем уравнение

$$y(p) = \frac{qp-a}{cp+b}y(qp), \qquad \operatorname{Re} p > q^{-1}a. \tag{7}$$

Отсюда следует

$$\left|\frac{y(p)}{y(qp)}\right| = \left|\frac{qp-a}{cp+b}\right| \to \begin{cases} \left|\dfrac{q}{c}\right|, c \neq 0; \\ +\infty, c = 0, b \neq 0, \end{cases} \quad p \to \infty,$$

и, таким образом, если $\left|\dfrac{q}{c}\right| > 1$ или $(c = 0, b \neq 0)$, то аналитическое в области $\operatorname{Re} p > > q^{-1}a$ решение уравнения (7), ограниченное на интервале $\big(q^{-1}(a+2), +\infty\big)$, тождественно равно нулю на этом интервале, а значит, и в области $\operatorname{Re} p > q^{-1}a$. Следовательно, $f_{\text{р}}(p)$ — нулевая функция, что противоречит предположению.

Случай $c = 0, b = 0$ является тривиальным.

При $a < 0$ доказательство теоремы проводится аналогично.

Найдем условие, при котором задача (1), (4) может иметь не более одного ограниченного решения.

Теорема 3. *Если* $\{a, b, c\} \subset R$, $0 < q < 1$ $(|b| > |a|$ *или* $(a = 0, b = 0, |c| > q))$, *то двух ограниченных решений задачи (1), (4) быть не может.*

Доказательство. Если решение задачи (1), (4), например, $\tilde{x}(t)$, ограничено, то его преобразование Лапласа, $f(p)$, для любого $p \in R, p > 0$, удовлетворяет неравенству

$$|f(p)| = \left|\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\tilde{x}(t)dt\right| \leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\left|\tilde{x}(t)\right| dt \leq \frac{M}{p} < +\infty \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |f(p)|\, p \leq M < +\infty, \tag{8}$$

где константа M ограничивает сверху модуль решения.

Ограничимся пока $p \in R, p > 0$, и предположим, что существуют два различных ограниченных решения задачи (1), (4). Обозначим через $f_{\text{р}}(p)$ разность преобразований Лапласа этих решений. Функция $f_{\text{р}}(p)$ должна удовлетворять неравенству (8). Выполним замену $f_{\text{р}}(p) = \dfrac{y(p)}{p}$, где $y(p)$ должно быть непрерывно определено и ограничено на

$(0, +\infty)$. Для $y(p)$ аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 2, получим соотношение

$$\left|\frac{y(qp)}{y(p)}\right| = \left|\frac{cp+b}{qp-a}\right| \to \begin{cases} \left|\dfrac{b}{a}\right|, & a \neq 0; \\ +\infty, & a = 0, \quad b \neq 0; \\ \left|\dfrac{c}{q}\right|, & a = 0, \quad b = 0, \end{cases} \qquad p \to 0. \tag{9}$$

Поскольку $|b| > |a|$ (или $a = 0, b = 0, |c| > q$), согласно (9) непрерывная ограниченная функция

$$y(p) = pf_{\mathrm{p}}(p) = 0 \qquad \forall p \in (0, +\infty) \subset R. \tag{10}$$

На основании того, что функция $f_{\mathrm{p}}(p)$ определена и является аналитической в области $\mathrm{Re}\, p > 0$, из (10) следует, что она тождественно равна нулю. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

1. *Kato T., McLeod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — **77.** — P. 891 – 937.
2. *De Bruijn N. G.* The difference-differential equation $F'(x) = e^{\alpha x + \beta} F(x-1)$. I, II // Ned. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. Math. — 1953. — **15.** — P. 449 – 464.
3. *Frederickson P. O.* Series solutions for certain functional-differential equations // Lect. Notes Math. — 1971. — **243.** — P. 249 – 254.
4. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1974. — 119 с.
5. *Gumovski I., Mira C.* Recurrences and discrete dynamic systems // Lect. Notes Math. — 1980. — **809.** — 267 p.

Получено 19.10.2003