УДК 517.91

МОДИФІКОВАНИЙ ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОД ДЛЯ СИСТЕМ КВАЗІЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ ТА ОБМЕЖЕННЯМ

А. Ю. Лучка, В. А. Ферук

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

We consider a quasilinear system of differential equations with a constant delay, an initial condition, and a restriction. A modification of the projection-iteration method is proposed and substantiated for this system.

Розглядається квазілінійна система диференціальних рівнянь зі сталим запізненням, початковою умовою та обмеженням і обґрунтовується застосування до неї модифікованого проекційно-ітеративного методу.

Функціонально-диференціальним рівнянням та їх системам із обмеженням в останні десятиліття присвячено чимало праць (див., наприклад, $[1,2]$). Одним із напрямків дослідження таких задач є розробка методів встановлення умов сумісності та побудова наближених розв'язків [3 – 6].

Об'єктом дослідження в даній статті є задача

$$\frac{d}{dt}x(t) + L(t)x(t) + M(t)x(t-\Delta) = f(x) + \varepsilon F(t, x(t), x(t-\Delta)), \quad t \in (a,b), \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [a-\Delta, a), \quad x(a) = \varphi(a), \tag{2}$$

$$\int\limits_a^b S(t)x(t)dt = \alpha, \tag{3}$$

в якій $\Delta > 0$ — стале запізнення, $L(t)$, $M(t)$ та $S(t)$ — матриці розмірності $m \times m$, $m \times m$ та $l \times m$ відповідно, елементи яких сумовні з квадратом на відрізку $[a,b]$, $f \in L_2[a,b]$, $\varphi \in C[a-\Delta, a]$, де $L_2[a,b]$ і $C[a-\Delta,a]$ — простори вектор-функцій, компоненти яких сумовні з квадратом на відрізку $[a,b]$ і неперервні на відрізку $[a-\Delta,a]$ відповідно, вектор $\alpha \in \mathbb{R}^l$, а вектор-функція $F : [a,b]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ задає оператор $F : W_2^1[a,b] \to L_2[a,b]$.

Розглядувану задачу будемо вважати сумісною, якщо в класі $W_2^1[a,b]$ абсолютно неперервних вектор-функцій, похідна яких належить простору $L_2[a,b]$, існує вектор-функція $x(t)$, яка майже скрізь задовольняє систему рівнянь (1), умову (2) та обмеження (3). Якщо порушується хоча б одна з вимог, задача є несумісною. Взагалі кажучи, задача (1) – (3) несумісна при $l > 0$, однак при виконанні певних умов вона може бути сумісною.

Метою даної статті є встановлення умов сумісності задачі (1) – (3) в іншому вигляді, ніж у [6], і дослідження застосування до неї модифікованого проекційно-ітеративного методу та його обґрунтування.

1. Суть методу. Наближені розв'язки задачі (1) – (3) будемо знаходити за модифікованим варіантом проекційно-ітеративного методу [7]. Для цього нам потрібні матриці

$$C(t) = A(t) - L(t), \quad D(t) = B(t) - M(t), \tag{4}$$

де $A(t)$ та $B(t)$ — неперервні при $t \in [a, b]$ квадратні матриці розмірності $m \times m$, і матриці $\Phi(t)$ та $\Psi(t)$ із сумовними з квадратом на $[a, b]$ елементами розмірності $m \times n$ та $\nu \times m$ відповідно, причому стовпці матриці $\Phi(t)$ і рядки матриці $\Psi(t)$ є лінійно незалежними, а $n = l + \nu$.

Суть методу полягає в тому, що послідовні наближення до шуканого розв'язку задачі (1) – (3) визначаємо із задачі

$$\frac{d}{dt}x_k(t) + A(t)x_k(t) + B(t)x_k(t-\Delta) = v_k(t) + \Phi(t)\lambda_k, \tag{5}$$

$$x_k(t) = \varphi(t), \quad t \in [a-\Delta, a), \quad x_k(a) = \varphi(a), \tag{6}$$

в якій параметр $\lambda_k \in \mathbb{R}^n$ знаходимо таким, щоб справджувались умови

$$\int\limits_a^b S(t)x_k(t)dt = \alpha, \tag{7}$$

$$\int\limits_a^b \Psi(t)\left(\frac{d}{dt}x_k(t) + L(t)x_k(t) + M(t)x_k(t-\Delta)\right)dt =$$

$$= \int\limits_a^b \Psi(t)\left(f(t) + \varepsilon F(t, u_k(t), u_k(t-\Delta))\right)dt, \tag{8}$$

де вектор-функція $u_k(t)$ — розв'язок задачі

$$\frac{d}{dt}u_k(t) + A(t)u_k(t) + B(t)u_k(t-\Delta) = v_k(t), \tag{9}$$

$$u_k(t) = \varphi(t), \quad t \in [a-\Delta, a), \quad u_k(a) = \varphi(a), \tag{10}$$

в якій

$$v_k(t) = f(t) + C(t)x_{k-1}(t) + D(t)x_{k-1}(t-\Delta) + \varepsilon F(t, u_{k-1}(t), u_{k-1}(t-\Delta)). \tag{11}$$

Початкове наближення $x_0(t)$ визначаємо із задачі (5) – (10) при $k = 0$ та заданій вектор-функції $v_0(t)$. Його можна трактувати як наближення, знайдене за проекційним методом. У випадку, коли $\Psi(t) = 0$, тобто умова (8) відсутня, і $n = l$, метод вироджується в ітераційний процес [6]. Якщо ж $\varepsilon = 0$, то запропонований модифікований проекційно-ітеративний метод збігається з проекційно-ітеративним методом, який досліджувався в [5].

2. Зведення системи функціонально-диференціальних рівнянь з обмеженням до крайової задачі з обмеженням. Припустимо, не зменшуючи загальності, що $b = a + N\Delta$. У цьому випадку задачу (1) – (3) можна звести до крайової задачі для системи диференціальних рівнянь з обмеженням. Для цього використаємо спосіб, описаний у [5], згідно з яким система рівнянь (1) розглядається на кожному інтервалі (τ_i, τ_{i+1}), обмеження (3) записується у вигляді

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} S(t)x(t)dt = \alpha,$$

вводиться заміна змінної $t = cs + \tau_i$, де $\tau_i = a + (i-1)\Delta$, $i = \overline{0, N}$, $c = \Delta/T$, $s \in [0, T]$, і враховується умова (2).

Після нескладних перетворень і вимоги неперервності вектор-функції $x(t)$ у точках τ_i, $i = \overline{1, N}$, отримаємо крайову задачу для системи диференціальних рівнянь порядку mN

$$\left(\frac{d}{ds} + P(s)\right) z(s) = p(s) + \varepsilon U(s, z(s)), \quad z(0) = \gamma + Jz(T), \tag{12}$$

з обмеженням

$$\int_0^T V(s)z(s)ds = \alpha, \tag{13}$$

в якій

$$z(s) = \begin{pmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \\ \cdots \\ z_N(s) \end{pmatrix}, \quad P(s) = \begin{pmatrix} L_1(s) & O & \cdots & O & O \\ M_2(s) & L_2(s) & \cdots & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & M_N(s) & L_N(s) \end{pmatrix},$$

$$p(s) = \begin{pmatrix} p_1(s) \\ p_2(s) \\ \cdots \\ p_N(s) \end{pmatrix}, \quad U(s, z(s)) = \begin{pmatrix} U_1(s, z_1(s), \psi(s)) \\ U_2(s, z_2(s), z_1(s)) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_N(s, z_N(s), z_{N-1}(s)) \end{pmatrix},$$

$$V(s) = \begin{pmatrix} S_1(s) & S_2(s) & \cdots & S_N(s) \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} O & O & \cdots & O & O \\ I & O & \cdots & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & I & O \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \varphi(a) \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

де I — одинична матриця в $\mathbb{R}^m$,

$$z_i(s) = x(cs + \tau_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad z_0(s) = \psi(s) = \varphi(cs + \tau_0),$$

$$L_i(s) = cL(cs + \tau_i), \quad M_i(s) = cM(cs + \tau_i), \quad S_i(s) = cS(cs + \tau_i), \quad i = \overline{1, N},$$

$$p_1(s) = cf(cs + \tau_1) - M_1(s)\psi(s), \quad p_i(s) = cf(cs + \tau_i), \quad i = \overline{2, N},$$

$$U_i(s, z_i(s), z_{i-1}(s)) = cF(cs + \tau_i, x(cs + \tau_i), x(cs + \tau_{i-1})), \quad i = \overline{1, N}.$$

Твердження 1. *Система диференціальних рівнянь (1) порядку m із запізненням, умовою (2) та обмеженням (3) у випадку, коли $b = a + N\Delta$, еквівалентна крайовій задачі (12) для системи диференціальних рівнянь порядку mN з обмеженням (13), розв'язки яких пов'язані між собою співвідношенням*

$$x(t) = \begin{cases} z_1(s), & t \in [a, \tau_2]; \\ z_2(s), & t \in [\tau_2, \tau_3]; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ z_N(s), & t \in [\tau_N, b], \end{cases} \qquad z(s) = \begin{pmatrix} x(cs + \tau_1) \\ x(cs + \tau_2) \\ \cdots\cdots\cdots \\ x(cs + \tau_N) \end{pmatrix}, \quad s \in [0, T]. \tag{14}$$

3. Допоміжна задача. При встановленні умов сумісності задачі (1) – (3) в іншому вигляді, ніж у [6], і обгрунтуванні модифікованого проекційно-ітеративного методу (5) – (11) важливу роль відіграє допоміжна задача

$$\frac{d}{dt}x(t) + A(t)x(t) + B(t)x(t - \Delta) = v(t) + \Phi(t)\lambda, \tag{15}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [a - \Delta, a), \quad x(a) = \varphi(a), \quad \int_a^b S(t)x(t)dt = \alpha, \tag{16}$$

$$\int_a^b \Psi(t)\left(\frac{d}{dt}x(t) + L(t)x(t) + M(t)x(t - \Delta)\right)dt =$$

$$= \int_a^b \Psi(t)\left(f(t) + \varepsilon F(t, u(t), u(t - \Delta))\right)dt, \tag{17}$$

$$\frac{d}{dt}u(t) + A(t)u(t) + B(t)u(t - \Delta) = v(t), \tag{18}$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in [a - \Delta, a), \quad u(a) = \varphi(a), \tag{19}$$

в якій вектор-функція $v \in L_2[a, b]$ є заданою, а вектор-функцію $x \in W_2^1[a, b]$ та вектор $\lambda \in \mathbb{R}^n$ слід визначити.

Сформулюємо умови розв'язуваності допоміжної задачі. Для цього використаємо спосіб, описаний у [5], згідно з яким задача (15) – (19) зводиться до еквівалентної задачі вигляду

$$\left(\frac{d}{ds} + H(s)\right) z(s) = y(s) + E(s)\lambda, \tag{20}$$

$$z(0) = \gamma + Jz(T), \quad \int_0^T V(s)z(s)ds = \alpha, \tag{21}$$

$$\int_0^T Z(s)\left(\left(\frac{d}{ds} + P(s)\right) z(s) - p(s) - \varepsilon U(s, w(s))\right) ds = 0, \tag{22}$$

$$\left(\frac{d}{ds} + H(s)\right) w(s) = y(s), \quad w(0) = \gamma + Jw(T), \tag{23}$$

де враховано попередні позначення і

$$E(s) = \begin{pmatrix} \Phi_1(s) \\ \Phi_2(s) \\ \cdots \\ \Phi_N(s) \end{pmatrix}, \quad H(s) = \begin{pmatrix} A_1(s) & O & \cdots & O & O \\ B_2(s) & A_2(s) & \cdots & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & B_N(s) & A_N(s) \end{pmatrix},$$

$$\Phi_i(s) = c\Phi(cs + \tau_i), \quad A_i(s) = cA(cs + \tau_i), \quad B_i(s) = cB(cs + \tau_i), \quad i = \overline{1, N},$$

$$Z(s) = (\Psi_1(s) \ldots \Psi_2(s) \cdots \Psi_N(s)), \quad \Psi_i(s) = c\Psi(cs + \tau_i), \quad i = \overline{1, N},$$

а компоненти вектор-функцій $w(s)$ та $y(s)$ мають відповідно вигляд

$$w_i(s) = u(cs + \tau_i), \quad i = \overline{1, N},$$

$$y_1(s) = cv(cs+\tau_1) - B_1(s)\psi(s), \quad y_i(s) = cv(cs+\tau_i), \quad i = \overline{2,N}.$$

Припустимо, що неперервні матриці $A(t)$ та $B(t)$ вибрано таким чином, що крайова задача (23) має єдиний розв'язок при довільній вектор-функції $y(s)$ із $L_2[0,T]$. За такого припущення розв'язок задачі (20) – (23) шукаємо у вигляді

$$z(s) = w(s) + \delta(s). \tag{24}$$

Підставивши вираз (24) у співвідношення (20) – (22) і врахувавши крайову задачу (23), отримаємо

$$\left(\frac{d}{ds} + H(s)\right)\delta(s) = E(s)\lambda, \quad \delta(0) = \gamma + J\delta(T), \tag{25}$$

$$\int_0^T V(s)\delta(s)ds = \alpha - \int_0^T V(s)w(s)ds, \tag{26}$$

$$\int_0^T Z(s)\left(\frac{d}{ds} + P(s)\right)\delta(s)ds = \int_0^T Z(s)r(s)ds, \tag{27}$$

де

$$r(s) = p(s) - \left(\frac{d}{ds} + P(s)\right)w(s) + \varepsilon U(s, w(s)). \tag{28}$$

Нехай $Y(s)$ — матриця розмірності $mN \times n$, яка визначається із задачі

$$\left(\frac{d}{ds} + H(s)\right)Y(s) = E(s), \quad Y(0) = JY(T). \tag{29}$$

Тоді, очевидно, єдиний розв'язок задачі (25) має вигляд

$$\delta(s) = Y(s)\lambda. \tag{30}$$

Визначимо тепер вектор $\lambda \in \mathbb{R}^n$ таким чином, щоб справджувались обмеження (26) та умова (27). Для цього підставимо вектор-функцію $\delta(s)$, що зображається формулою (30), у зазначені обмеження та умову, в результаті чого дістанемо рівняння

$$\Lambda\lambda = \beta, \tag{31}$$

де матриця Λ розмірності $n \times n$ знаходиться за формулою

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_1 = \int_0^T V(s)Y(s)ds, \qquad \Lambda_2 = \int_0^T Z(s)\left(\frac{d}{ds} + P(s)\right)Y(s)ds, \tag{32}$$

а права частина має вигляд

$$\beta = \begin{pmatrix} \alpha - \int\limits_0^T V(s)w(s)ds \\ \int\limits_0^T Z(s)r(s)ds \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Лема 1. *Якщо матриця Λ невироджена, то існує єдиний розв'язок задачі (20) – (22), що зображається формулами*

$$z(s) = d(s) + (Gw)(s) + \varepsilon \int\limits_0^T N(s,\xi)U(\xi, w(\xi))d\xi, \tag{34}$$

$$\lambda = \sigma + R(w) + \varepsilon \int\limits_0^T \Delta_2 Z(\xi)U(\xi, w(\xi))d\xi, \tag{35}$$

в яких $w(t)$ — єдиний розв'язок крайової задачі, (23),

$$d(s) = Y(s)\sigma, \quad \sigma = \Delta_1\alpha + \int\limits_0^T \Delta_2 Z(s)p(s)ds, \tag{36}$$

$$(Gw)(s) = w(s) + Y(s)R(w), \quad N(s,\xi) = Y(s)\Delta_2 Z(\xi), \tag{37}$$

$$R(w) = -\int\limits_0^T \Delta_1 V(\xi)w(\xi)d\xi - \int\limits_0^T \Delta_2 Z(\xi)\left(\frac{d}{d\xi} + P(\xi)\right)w(\xi)d\xi, \tag{38}$$

Δ_1 та Δ_2 — прямокутні матриці розмірності $n \times l$ та $n \times \nu$ відповідно, такі, що $\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 \end{pmatrix}$.

Справді, за умови $\det \Lambda \neq 0$ існує єдиний розв'язок рівняння (31), який з урахуванням формул (32), (33) можна записати у вигляді

$$\lambda = \Delta_1\alpha - \int\limits_0^T \Delta_1 V(s)w(s)ds + \int\limits_0^T \Delta_2 Z(s)r(s)ds. \tag{39}$$

На підставі формул (28) та (39) неважко отримати співвідношення

$$\lambda = \Delta_1\alpha + \int_0^T \Delta_2 Z(s)p(s)ds + \varepsilon\int_0^T \Delta_2 Z(\xi)U(\xi, w(\xi))d\xi -$$

$$- \int_0^T \Delta_1 V(\xi)w(\xi)d\xi - \int_0^T \Delta_2 Z(\xi)\left(\frac{d}{d\xi} + P(\xi)\right)w(\xi)d\xi. \tag{40}$$

Отже, із формул (24), (30), (40) та (36) – (38) правильність зображень (34), (35) випливає очевидним чином.

Лема 2. *Якщо матриця* Λ *невироджена та існує єдиний розв'язок крайової задачі (23), який визначається формулою*

$$w(s) = e(s) + \int_0^T \Gamma(s,\xi)y(\xi)d\xi, \tag{41}$$

в якій $e(s)$ — *єдиний розв'язок задачі*

$$\left(\frac{d}{ds} + H(s)\right)e(s) = 0, \quad e(0) = \gamma + Je(T),$$

причому $\Gamma(0,\xi) = J\Gamma(T,\xi)$*, то для вектор-функції* $z(s)$ *(34) мають місце зображення*

$$z(s) = h(s) + \int_0^T G(s,\xi)y(\xi)d\xi + \varepsilon\int_0^T N(s,\eta)U\left(\eta, e(\eta) + \int_0^T \Gamma(\eta,\xi)y(\xi)d\xi\right)d\eta \tag{42}$$

та властивості

$$\int_0^T G(s,\xi)E(\xi)d\xi = O, \quad G(0,\xi) = JG(T,\xi), \tag{43}$$

де

$$h(s) = d(s) + e(s) + Y(s)\mu, \quad G(s,\xi) = \Gamma(s,\xi) + Y(s)R(\xi), \tag{44}$$

$$R(\xi) = \int_0^T (\Delta_2 Z(\eta)Q(\eta) - \Delta_1 V(\eta))\,\Gamma(\eta,\xi)d\eta - \Delta_2 Z(\xi), \tag{45}$$

а матриця $Y(s)$ визначається із задачі (29) та

$$Q(s) = H(s) - P(s), \tag{46}$$

$$\mu = \int_0^T \left(\Delta_2 Z(\xi)Q(\xi) - \Delta_1 V(\xi)\right) e(\xi) d\xi. \tag{47}$$

Справді, оскільки з урахуванням позначення (46) та рівності (23) маємо

$$\left(\frac{d}{ds} + P(s)\right) w(s) = y(s) - Q(s)w(s), \tag{48}$$

то формулу (38) можна подати у вигляді

$$R(w) = \int_0^T (\Delta_2 Z(\xi)Q(\xi) - \Delta_1 V(\xi))w(\xi)d\xi - \int_0^T \Delta_2 Z(\xi)y(\xi)d\xi.$$

Якщо сюди підставити зображення (41), то отримаємо

$$R(w) = \int_0^T (\Delta_2 Z(\xi)Q(\xi) - \Delta_1 V(\xi))e(\xi)d\xi - \int_0^T \Delta_2 Z(\xi)y(\xi)d\xi +$$

$$+ \int_0^T (\Delta_2 Z(\eta)Q(\eta) - \Delta_1 V(\eta)) \int_0^T \Gamma(\eta,\xi)y(\xi)d\xi d\eta,$$

або з використанням позначень (45), (47)

$$R(w) = \mu + \int_0^T R(\xi)y(\xi)d\xi. \tag{49}$$

Отже, згідно з формулами (37), (41) та (44) маємо

$$d(s) + (Gw)(s) = d(s) + e(s) + \int_0^T \Gamma(s,\xi)y(\xi)d\xi + Y(s)\mu +$$

$$+ \int_0^T Y(s)R(\xi)y(\xi)d\xi = h(s) + \int_0^T G(s,\xi)y(\xi)d\xi,$$

а тому зображення (34) набере вигляду

$$z(s) = h(s) + \int_0^T G(s,\xi)y(\xi)d\xi + \varepsilon \int_0^T N(s,\xi)U(\xi,w(\xi))d\xi.$$

Підставивши ще сюди вираз (41), очевидно, отримаємо зображення (42).

Для встановлення властивості (43) використаємо ті факти, що

$$\Delta_1\Lambda_1 + \Delta_2\Lambda_2 = \widehat{I},$$

де $\widehat{I}$ — одинична матриця в $\mathbb{R}^n$, і, як це випливає із співвідношення (46) та задачі (29),

$$\left(\frac{d}{ds} + P(s)\right)Y(s) = E(s) - Q(s)Y(s), \quad Y(s) = \int_0^T \Gamma(s,\xi)E(\xi)d\xi,$$

на основі яких, по-перше, з урахуванням позначень (45) та (32) маємо

$$\int_0^T R(\xi)E(\xi)d\xi = -\int_0^T \Delta_1 V(\eta)\int_0^T \Gamma(\eta,\xi)E(\xi)d\xi d\eta -$$

$$-\int_0^T \Delta_2 Z(\eta)E(\eta)d\eta + \int_0^T \Delta_2 Z(\eta)Q(\eta)\int_0^T \Gamma(\eta,\xi)E(\xi)d\xi d\eta =$$

$$= -\int_0^T \Delta_1 V(\eta)Y(\eta)d\eta - \int_0^T \Delta_2 Z(\eta)(E(\eta) - Q(\eta)Y(\eta))d\eta =$$

$$= -\Delta_1\Lambda_1 - \Delta_2\int_0^T Z(\eta)\left(\frac{d}{d\eta} + P(\eta)\right)Y(\eta)d\eta = -\Delta_1\Lambda_1 - \Delta_2\Lambda_2 = -\widehat{I}, \tag{50}$$

а по-друге, згідно з формулами (44), (50)

$$\int_0^T G(s,\xi)E(\xi)d\xi = \int_0^T \Gamma(s,\xi)E(\xi)d\xi + Y(s)\int_0^T R(\xi)E(\xi)d\xi = Y(s) - Y(s) = O,$$

що й потрібно було довести.

4. Умови сумісності задачі. Поряд із крайовою задачею (12) з обмеженням (13) розглянемо крайову задачу з керуванням

$$\left(\frac{d}{ds} + P(s)\right) w(s) = Q(s)\delta(s) + p(s) + \varepsilon U(s, w(s)), \quad w(0) = \gamma + Jw(T), \tag{51}$$

в якій керування $\delta(s)$ визначається із задачі (25) – (28).

Оскільки за припущенням матриця Λ невироджена, то існує єдиний розв'язок задачі (25) – (28), зокрема згідно з формулами (30), (39) та (37) маємо

$$\delta(s) = Y(s)\Delta_1 \left(\alpha - \int\limits_0^T V(\xi)w(\xi)d\xi\right) +$$

$$+ \int\limits_0^T N(s,\xi) \left(p(\xi) - \left(\frac{d}{d\xi} + P(\xi)\right) w(\xi) + \varepsilon U(\xi, w(\xi))\right) d\xi. \tag{52}$$

Лема 3. *Крайова задача (12) з обмеженням (13) сумісна лише тоді, коли існує розв'язок $w \in W_2^1[0,T]$ задачі (51), (52) і справджуються умови*

$$\Delta_1 \int\limits_0^T V(s)w(s)ds = \Delta_1\alpha, \quad \int\limits_0^T Z(s)r(s)ds = 0, \tag{53}$$

де вектор-функція $r(s)$ визначається формулою (28).

Справді, нехай $w^* \in W_2^1[0,T]$ — такий розв'язок задачі (51), (52), що виконуються умови (53), тобто

$$\Delta_1 \int\limits_0^T V(s)w{*}(s)ds = \Delta_1\alpha. \tag{54}$$

Тоді згідно з формулою (52) $\delta(s) = 0$ і, як це випливає із (51), правильною є рівність

$$\left(\frac{d}{ds} + P(s)\right) w^*(s) = p(s) + \varepsilon U(s, w^*(s)), \quad w^*(0) = \gamma + Jw^*(T). \tag{55}$$

Отже, із співвідношень (54) та (55) очевидним чином випливає, що $z(s) = w^*(s)$ — розв'язок задачі (12), (13), тобто вона є сумісною.

Навпаки, нехай $z^* \in W_2^1[0,T]$ — розв'язок крайової задачі (12) з обмеженням (13), тобто справджуються рівності

$$p(s) - \left(\frac{d}{ds} + P(s)\right) z^*(s) + \varepsilon U(s, z^*(s)) = 0, \quad \int\limits_0^T V(s)z^*(s)ds = \alpha.$$

Використавши їх та формулу (28), неважко помітити, що вектор-функція $w(s) = z^*(s)$ — розв'язок задачі (51), (52), який задовольняє умови (53).

Встановимо тепер умови сумісності задачі (1) – (3). Для цього зведемо задачу з керуванням (51), (25) – (28) до еквівалентного інтегрального рівняння без обмежень. Щоб його отримати, використаємо рівність (48), згідно з якою рівняння (51) набере вигляду

$$y(s) - Q(s)w(s) = Q(s)\delta(s) + p(s) + \varepsilon U(s, w(s)),$$

де вектор-функція $y(s)$ визначається формулою (23), або з урахуванням формули (24)

$$y(s) = p(s) + Q(s)z(s) + \varepsilon U(s, w(s)). \tag{56}$$

Якщо у співвідношення (56) підставити вирази (41), (42) і виконати нескладні перетворення, то отримаємо

$$y(s) = g(s) + \int\limits_0^T K(s,\xi)y(\xi)d\xi + \varepsilon W(s, y(s)), \tag{57}$$

де

$$g(s) = p(s) + Q(s)h(s), \quad K(s,\xi) = Q(s)G(s,\xi), \tag{58}$$

$$W(s, y(s)) = U\left(s, e(s) + \int\limits_0^T \Gamma(s,\xi)y(\xi)d\xi\right) +$$

$$+ \int\limits_0^T Q(s)N(s,\eta)U\left(\eta, e(\eta) + \int\limits_0^T \Gamma(\eta,\xi)y(\xi)d\xi\right)d\eta. \tag{59}$$

На основі аналізу наведених формул та нескладних перетворень приходимо до такого висновку.

Твердження 2. *Якщо $y^* \in L_2[0,T]$ — розв'язок інтегрального рівняння (57), то вектор-функція*

$$w^*(s) = e(s) + \int\limits_0^T \Gamma(s,\xi)y^*(\xi)d\xi \tag{60}$$

є розв'язком задачі з керуванням (51), (52) і , навпаки, якщо $w^* \in W_2^1[0,T]$ — розв'язок задачі (51), (52), то вектор-функція

$$y^*(s) = \left(\frac{d}{ds} + H(s)\right)w^*(s) \tag{61}$$

є розв'язком інтегрального рівняння (57).

Теорема 1. *Задача (1) – (3) сумісна лише тоді, коли існує розв'язок $y^* \in L_2[0,T]$ інтегрального рівняння (57) і справджуються умови*

$$\Delta_1 \int\limits_0^T V(s)w^*(s)ds = \Delta_1\alpha, \quad \int\limits_0^T Z(s)r^*(s)ds = 0, \tag{62}$$

де вектор-функція $w^*(s)$ визначається формулою (60) та

$$r^*(s) = p(s) - \left(\frac{d}{ds} + P(s)\right) w^*(s) + \varepsilon U(s, w^*(s)).$$

Доведення безпосередньо випливає із леми 3 і тверджень 1, 2. Справді, нехай $y^*(s)$ —розв'язок інтегрального рівняння (57) такий, що вектор-функція $w^*(s)$, яка визначається формулою (60), задовольняє умови (62). Тоді на підставі твердження 2 виконуються всі умови леми 3, згідно з якою крайова задача (12) з обмеженням (13) є сумісною. Отже, враховуючи ще твердження 1, приходимо до висновку, що задача (1) – (3) є сумісною. Навпаки, нехай існує розв'язок $x^* \in W_2^1[0,T]$ задачі (1) – (3). У цьому випадку згідно із твердженням 1 задача (12), (13) є сумісною. Отже, за лемою 3 існує розв'язок $w^*(s)$ задачі з керуванням (51), (52), який задовольняє умови (62), а за твердженням 2 вектор-функція $y^*(s)$, яка визначається формулою (61), — розв'язок рівняння (57).

Зауваження 1. Із формули (52) випливає, що за умов (62) керування $\delta(s) = 0$.

Зауваження 2. За умови теореми 1, як це випливає із леми 3 і тверджень 1 та 2, зокрема формули (14), розв'язки $x^*(t)$ задачі (1) – (3) пов'язані із розв'язками $y^*(s)$ рівняння (57) співвідношеннями

$$x^*(t) = \begin{cases} z_1^*(s), & t \in [a, \tau_2]; \\ z_2^*(s), & t \in [\tau_2, \tau_3]; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ z_N^*(s), & t \in [\tau_N, b], \end{cases} \qquad z^*(s) = e(s) + \int\limits_0^T \Gamma(s,\xi)y^*(\xi)d\xi, \tag{63}$$

$$y^*(s) = \left(\frac{d}{ds} + H(s)\right) w^*(s), \quad w^*(s) = \begin{pmatrix} x^*(cs+\tau_1) \\ x^*(cs+\tau_2) \\ \cdots\cdots\cdots \\ x^*(cs+\tau_N) \end{pmatrix}, \quad s \in [0,T]. \tag{64}$$

Теорема 2. *Задача (1) – (3) має єдиний розв'язок лише тоді, коли існує єдиний розв'язок інтегрального рівняння (57) і справджуються умови (62).*

Доведення. Нехай інтегральне рівняння (57) має єдиний розв'язок. Отже, за теоремою 1 задача (1) – (3) є сумісною. Припустимо, що вона має два розв'язки: $x^*(t)$ та $\overline{x}(t)$, причому $x^*(t) \neq \overline{x}(t)$. Тоді за теоремою 1 і зауваженням 2 існують розв'язки рівняння (57), які мають вигляд (64) та

$$\overline{y}(s) = \left(\frac{d}{ds} + H(s)\right)\overline{w}(s), \quad \overline{w}(s) = \begin{pmatrix} \overline{x}(cs+\tau_1) \\ \overline{x}(cs+\tau_2) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \overline{x}(cs+\tau_N) \end{pmatrix}. \tag{65}$$

Оскільки $y^*(t) = \overline{y}(t)$, то на основі співвідношень (64) та (65), по-перше, легко отримуємо

$$\left(\frac{d}{ds} + H(s)\right)(w^*(s) - \overline{w}(s)) = 0, \quad w^*(0) - \overline{w}(0) = J\left(w^*(T) - \overline{w}(T)\right),$$

звідки випливає $w^*(s) = \overline{w}(s)$, а по-друге, враховуючи останню рівність, маємо $x^*(t) = \overline{x}(t)$, що суперечить припущенню. Отже, задача (1) – (3) є однозначно розв'язуваною.

Нехай тепер вихідна задача (1) – (3) має єдиний розв'язок. Припустимо, що інтегральне рівняння має два розв'язки: $y^*(s)$ та $\overline{y}(s)$, причому $y^*(s) \neq \overline{y}(s)$. Тоді за теоремою 1 та зауваженням 2 існують розв'язки задачі (1) – (3), які мають вигляд (63) та

$$\overline{x}(t) = \begin{cases} \overline{z}_1(s), & t \in [a, \tau_2]; \\ \overline{z}_2(s), & t \in [\tau_2, \tau_3]; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{z}_N(s), & t \in [\tau_N, b], \end{cases} \qquad \overline{z}(s) = e(s) + \int_0^T \Gamma(s,\xi)\overline{y}(\xi)d\xi. \tag{66}$$

Оскільки за припущенням задача (1) – (3) має лише єдиний розв'язок, то $x^*(t) = \overline{x}(t)$. Отже, згідно з формулами (63) та (66) маємо

$$\int_0^T \Gamma(s,\xi)\left(y^*(\xi) - \overline{y}(\xi)\right)d\xi = 0.$$

Звідси очевидним чином випливає $y^*(s) = \overline{y}(s)$, що суперечить припущенню, тобто інтегральне рівняння (57) не може мати більше одного розв'язку.

5. Умови збіжності модифікованого проекційно-ітеративного методу. Встановимо умови збіжності методу (5) – (11). Для цього зведемо його до методу послідовних наближень для інтегрального рівняння (57).

Використаємо спосіб, описаний в пп. 2, 3, згідно з яким метод (5) – (11) зведеться до модифікованого проекційно-ітеративного методу для крайової задачі (12) з обмеженням (13), тобто

$$\left(\frac{d}{ds} + H(s)\right) z_k(s) = y_k(s) + E(s)\lambda_k, \tag{67}$$

$$z_k(0) = \gamma + J z_k(T), \quad \int_0^T V(s) z_k(s) ds = \alpha, \tag{68}$$

$$\int_0^T Z(s)\left(\left(\frac{d}{ds}+P(s)\right)z_k(s)-p(s)-\varepsilon U(s,w_k(s))\right)ds\,=\,0, \tag{69}$$

$$\left(\frac{d}{ds}+H(s)\right)w_k(s)\,=\,y_k(s),\quad w_k(0)\,=\,\gamma+Jw_k(T), \tag{70}$$

$$y_k(s)\,=\,p(s)+Q(s)z_{k-1}(s)+\varepsilon U(s,w_{k-1}(s)). \tag{71}$$

Тут використано попередні позначення, а компоненти вектор-функцій

$$z_k(s)\,=\,\begin{pmatrix} z_1^k(s)\\ z_2^k(s)\\ \dots\dots\\ z_N^k(s)\end{pmatrix},\quad w_k(s)\,=\,\begin{pmatrix} w_1^k(s)\\ w_2^k(s)\\ \dots\dots\\ w_N^k(s)\end{pmatrix},\quad y_k(s)\,=\,\begin{pmatrix} y_1^k(s)\\ y_2^k(s)\\ \dots\dots\\ y_N^k(s)\end{pmatrix}$$

визначаються формулами

$$z_i^k(s)\,=\,x_k(cs+\tau_i),\quad w_i^k(s)\,=\,u_k(cs+\tau_i),\quad i\,=\,\overline{1,N},$$

$$y_1^k(s)\,=\,cv_k(cs+\tau_1)-B_1(s)\psi(s),\quad y_i^k(s)\,=\,cv_k(cs+\tau_i),\quad i\,=\,\overline{2,N}.$$

За умови леми 1 існує єдиний розв’язок задачі (67) – (70), а згідно з лемою 2 та формулою (39) правильними є зображення

$$w_k(s)\,=\,e(s)+\int_0^T \Gamma(s,\xi)y_k(\xi)d\xi, \tag{72}$$

$$z_k(s)\,=\,h(s)+\int_0^T G(s,\xi)y_k(\xi)d\xi+\varepsilon\int_0^T N(s,\xi)U(\xi,w_k(\xi))d\xi, \tag{73}$$

$$\lambda_k\,=\,\Delta_1\alpha-\int_0^T \Delta_1 V(\xi)w_k(\xi)d\xi+\int_0^T \Delta_2 Z(\xi)r_k(\xi)d\xi, \tag{74}$$

де на підставі рівностей (48), (70) та позначення (28)

$$r_k(s)\,=\,p(s)-y_k(s)+Q(s)w_k(s)+\varepsilon U(s,w_k(s)). \tag{75}$$

Підставляючи тепер вирази (72) та (73) у формулу (71) та враховуючи позначення (58), (59), отримуємо

$$y_k(s) = g(s) + \int\limits_0^T K(s,\xi) y_{k-1}(\xi) d\xi + \varepsilon W(s, y_{k-1}(s)). \tag{76}$$

Таким чином, питання про збіжність методу (5) – (11) звелось до питання про збіжність методу послідовних наближень (76) для інтегрального рівняння (57), умовам збіжності якого присвячено обширну літературу.

Наведемо умову збіжності методу (76), яку встановлено в [7]. Із цією метою введемо проекційний оператор

$$(\Pi y)(s) := \int\limits_0^T \Pi(s,\xi) y(\xi) d\xi, \tag{77}$$

ядро якого має вигляд

$$\Pi(s,\xi) = E(s) \left(\int\limits_0^T E^*(\eta) E(\eta) d\eta \right)^{-1} E(\xi), \tag{78}$$

де $E^*(\eta)$ — спряжена матриця. Очевидно, оператор (77) ортогонально проектує простір $L_2[0,T]$ на його підпростір, породжений лінійно незалежними стовпцями матриці $E(s)$, оскільки за припущенням стовпці матриці $\Phi(t)$ є лінійно незалежними.

Нехай

$$\widehat{v}(s) = y(s) - \int\limits_0^T \Pi(s,\xi) y(\xi) d\xi, \tag{79}$$

тоді на підставі першої властивості (43) та формул (78), (79) легко встановити рівність

$$\int\limits_0^T G(s,\xi) y(\xi) d\xi = \int\limits_0^T G(s,\xi) \widehat{v}(\xi) d\xi \quad \forall y \in L_2[0,T], \tag{80}$$

за допомогою якої, врахувавши ще позначення (58), рівнянню (57) можна надати вигляду

$$y(s) = g(s) + \int\limits_0^T K(s,\xi) \widehat{v}(\xi) d\xi + \varepsilon W(s, y(s)). \tag{81}$$

Далі, із формул (79) та (81) випливає рівність

$$\widehat{v}(s) = q(s) + \int\limits_0^T L(s,\xi) \widehat{v}(\xi) d\xi + \varepsilon \Omega(s, y(s)), \tag{82}$$

де

$$q(s) = g(s) - \int\limits_0^T \Pi(s,\xi) g(\xi) d\xi, \tag{83}$$

$$L(s,\xi) = K(s,\xi) - \int\limits_0^T \Pi(s,\eta) K(\eta,\xi) d\eta, \tag{84}$$

$$\Omega(s, y(s)) = W(s, y(s)) - \int\limits_0^T \Pi(s,\eta) W(\eta, y(\eta)) d\eta. \tag{85}$$

Таким чином, рівняння (57) можна трактувати як систему рівнянь (81) і (82).

Зазначимо, що метод послідовних наближень (76) для рівняння (57) також можна звести до вигляду

$$y_k(s) = g(s) + \int\limits_0^T K(s,\xi) \widehat{v}_{k-1}(\xi) d\xi + \varepsilon W(s, y_{k-1}(s)), \tag{86}$$

$$\widehat{v}_k(s) = q(s) + \int\limits_0^T L(s,\xi) \widehat{v}_{k-1}(\xi) d\xi + \varepsilon \Omega(s, y_{k-1}(s)). \tag{87}$$

Для цього досить ввести вектор-функцію

$$\widehat{v}_k(s) = y_k(s) - \int\limits_0^T \Pi(s,\xi) y_k(\xi) d\xi, \tag{88}$$

використати властивість (80), за допомогою якої співвідношення (76) набере вигляду (86), підставити його в (88) та взяти до уваги позначення (83) – (85).

Позначимо через p та q норми операторів

$$(K\widehat{v})(s) := \int\limits_0^T K(s,\xi) \widehat{v}(\xi) d\xi, \quad (L\widehat{v})(s) := \int\limits_0^T L(s,\xi) \widehat{v}(\xi) d\xi$$

відповідно, а через β та ω — константи Ліпшиця операторів

$$(Wy)(s) := W(s, y(s)), (\Omega y)(s) := \Omega(s, y(s)),$$

що діють у просторі $L_2[0,T]$, і зазначимо, що на основі формул (79), (84) та (85) маємо $\|\widehat{v}\| \leq \|y\|, q \leq p, \omega \leq \beta$.

Теорема 3. *Якщо виконується умова*

$$q + \varepsilon(\beta - \beta q + \omega p) < 1, \tag{89}$$

то існує єдиний розв'язок системи рівнянь (81), (82) і послідовності, побудовані за формулами (86), (87), збігаються до цього розв'язку, тобто

$$\lim_{k\to\infty} y_k(s) = y^*(s), \quad \lim_{k\to\infty} \widehat{v}_k(s) = \widehat{v}^*(s). \tag{90}$$

Доведення теореми наведено в [7] (§15).

Зауваження 3. У монографії [7] показано, що за певних умов нерівність (89) виконується при достатньо великих n та малих значеннях параметра ε.

Теорема 4. *Якщо виконується умова (91) та співвідношення*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0, \tag{91}$$

то існує єдиний розв'язок $x^* \in W_2^1[a,b]$ задачі (1) – (3) і послідовність $\{x_k(t), \quad k \geq 0\} \subset$ $\subset W_2^1[a,b]$, побудована за методом (5) – (11), збігається до цього розв'язку.

Доведення. За умови (89), очевидно, існує єдиний розв'язок інтегрального рівняння (57) і виконується перше співвідношення (90). Використовуючи його і переходячи до границі при $k \to \infty$ в рівностях (72) – (75), приходимо до висновку, що існують границі

$$\lim_{k\to\infty} w_k(s) = w^*(s), \quad \lim_{k\to\infty} z_k(s) = z^*(s), \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda^*, \quad \lim_{k\to\infty} r_k(s) = r^*(s) \tag{92}$$

і мають вигляд

$$w^*(s) = e(s) + \int_0^T \Gamma(s,\xi) y^*(\xi) d\xi, \tag{93}$$

$$z^*(s) = h(s) + \int_0^T G(s,\xi) y^*(\xi) d\xi + \varepsilon \int_0^T N(s,\xi) U(\xi, w^*(\xi)) d\xi, \tag{94}$$

$$\lambda^* = \Delta_1 \alpha - \Delta_1 \int_0^T V(\xi) w^*(\xi) d\xi + \Delta_2 \int_0^T Z(\xi) r^*(\xi) d\xi, \tag{95}$$

$$r^*(s) = p(s) - y^*(s) + Q(s) w^*(s) + \varepsilon U(s, w^*(s)). \tag{96}$$

Оскільки за умови (91) $\lambda^* = 0$, а згідно з формулами (24), (30) $z^*(s) = w^*(s) + Y(s)\lambda^*$, то, очевидно, $z^*(s) = w^*(s)$. Отже, вираз (96) можна подати у вигляді

$$r^*(s) = p(s) - y^*(s) + Q(s)z^*(s) + \varepsilon U(s, w^*(s)). \tag{97}$$

Із формул (97), (93) та (94) і того факту, що $y^*(s)$ — розв'язок рівняння (57), випливає

$$r^*(s) = g(s) - y^*(s) + \int\limits_0^T K(s,\xi)y^*(\xi)d\xi + \varepsilon W(s, y^*(s)) = 0,$$

а тому, враховуючи вираз (95), маємо

$$\Delta_1 \int\limits_0^T V(\xi)w^*(\xi)d\xi = \Delta_1\alpha, \quad \int\limits_0^T Z(\xi)r^*(\xi)d\xi = 0. \tag{98}$$

Отже, виконуються всі умови теореми 2, згідно з якою задача (1)–(3) має єдиний розв'язок $x^*(t)$, пов'язаний із розв'язком $y^*(s)$ рівняння (57) співвідношенням (63).

Оскільки за допомогою формул (14) та (63) легко встановити рівність

$$x^*(t) - x_k(t) = \begin{cases} z_1^*(s) - z_1^k(s), & t \in [a, \tau_1]; \\ z_2^*(s) - z_2^k(s), & t \in [\tau_1, \tau_2]; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_N^*(s) - z_N^k(s), & t \in [\tau_N, b], \end{cases}$$

а між нормами в просторах $L_2[a,b]$ та $L_2[0,T]$ існує зв'язок

$$\|x^* - x_k\|^2 = \int\limits_a^b |x^*(t) - x_k(t)|^2 dt =$$

$$= c \sum_{i=1}^N \int\limits_0^T \left| z_i^*(s) - z_i^k(s) \right|^2 ds = c\|z^* - z_k\|^2, \tag{99}$$

то із співвідношень (92) та (99) очевидним чином випливає рівність

$$\lim_{k\to\infty} x_k(t) = x^*(t),$$

що й потрібно було довести.

Твердження 3. *Якщо виконується умова (89) і задача (1)–(3) є сумісною, то умова (91) теореми 4 виконується.*

Справді, у випадку, коли вихідна задача (1)–(3) є сумісною, за теоремою 1 рівняння (57) має розв'язок $y^*(s)$ і справджуються умови (98), а за умови (89), як це випливає із теореми 3, він єдиний та існує границя $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k = \lambda^*$. Оскільки із співвідношень (95) та (98) випливає $\lambda^* = 0$, то умова (91) справджується.

Зауваження 4. Збільшення числа лінійно незалежних рядків матриці $\Psi(t)$, тобто числа ν, істотно впливає на зменшення величини q.

Таким чином, в результаті проведених у даній статті досліджень:

1) встановлено новий вигляд умов сумісності систем квазілінійних диференціальних рівнянь із сталим запізненням;

2) запропоновано та обґрунтовано новий варіант проекційно-ітеративного методу побудови наближених розв'язків таких задач.

Отримані результати можна перенести на випадок систем диференціальних рівнянь із змінним запізненням та нелінійним обмеженням і застосувати розроблений підхід до дослідження систем диференціальних рівнянь нейтрального типу з обмеженням.

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматулина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 280 с.
2. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 319 с.
3. *Лучка А. Ю.* Методи дослідження систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 2. — С. 189 – 194.
4. *Кучерук Т. А.* Крайова задача для звичайних диференціальних рівнянь з додатковими умовами та її розв'язання ітераційним методом // Допов. НАН України. — 2002. — № 12. — С. 17 – 20.
5. *Лучка А. Ю., Ферук В. А.* Проекційно-ітеративний метод для систем диференціальних рівнянь із запізненням та обмеженнями // Нелінійні коливання. — 2003. — **6**, № 2. — С. 206 – 232.
6. *Ферук В. А.* Ітераційний метод для систем нелінійних диференціальних рівнянь із запізненням та обмеженнями // Там же. — № 3. — С. 428 – 436.
7. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. — Киев: Наук. думка, 1993. — 288 с.

Одержано 21.01.2004