

УДК 517.938

**ФУНКЦІЇ ГРІНА СЛАБКОРЕГУЛЯРНИХ СИСТЕМ
ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ****О. А. Бурилко***Ін-т математики НАН України,**Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3*

We study the structure and properties of non-unique Green's functions for systems of linear differential equations and give necessary conditions for their existence.

Досліджуються структура та властивості неєдиних функцій Гріна систем лінійних диференціальних рівнянь, наведені деякі необхідні умови їх існування.

Розглянемо систему

$$dx/dt = A(t)x, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (1)$$

де $A(t) \in C^0(\mathbf{R})$, $C^0(\mathbf{R})$ — простір неперервних і обмежених на $\mathbf{R}$ функцій.

Дослідженню питання слабкої регулярності на $\mathbf{R}$ даної системи, тобто коли відповідна неоднорідна система

$$dy/dt = A(t)y + f(t), \quad y \in \mathbf{R}^n, \quad (2)$$

має принаймні один обмежений на $\mathbf{R}$ розв'язок для кожної вектор-функції $f(t) \in C^0(\mathbf{R})$, присвячено велику кількість робіт (зокрема, [1 – 11]). Як показано в роботах [2, 9], слабка регулярність системи (1) еквівалентна існуванню функції Гріна $G(t, \tau)$ задачі про обмежені розв'язки цієї системи, при цьому всі обмежені на $\mathbf{R}$ розв'язки системи (2) для кожної фіксованої вектор-функції $f(t) \in C^0(\mathbf{R})$, $f(t) \not\equiv 0$, можна подати у вигляді

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau) f(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Особливо добре вивчено питання про обмежені на всій осі розв'язки системи (2) у випадку, коли система (1) є експоненціально дихотомічною. У цьому випадку (1) має єдину функцію Гріна $G(t, \tau)$ і для кожної вектор-функції $f(t) \in C^0(\mathbf{R})$ існує єдиний обмежений на $\mathbf{R}$ розв'язок системи (система (1) називається регулярною). Крім вказаного вище випадку система може мати безліч функцій Гріна (відповідно (2) має безліч обмежених розв'язків для кожної неоднорідності і (1) називається строго слабкорегулярною) або не мати таких функцій взагалі (не для кожної $f(t)$ система (2) має обмежені розв'язки, (1) називається нерегулярною). Дослідженню слабкорегулярних систем у загальному (не лише регулярному) випадку присвячено, зокрема, роботи [7, 9, 11]. В даній роботі вивчаються

структура та властивості неєдиних функцій Гріна системи (1). Ці властивості описуються в термінах проекторів експоненціально трихотомічних систем (поняття введене в роботі [10]). Також даються необхідні умови існування таких функцій в загальному та деяких часткових випадках.

Нехай $\Omega_\tau^t(A)$ — матрицант системи (1), $\Omega_\tau^\tau(A) = I_n$ — n -вимірна одинична матриця, $\|A(t)\| = \max_{\|x\|=1} \|A(t)x\|$, $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ — звичайний скалярний добуток в $\mathbf{R}^n$.

Означення 1 [9]. Говорять, що система (1) має функцію Гріна задачі про обмежені на $\mathbf{R}$ розв'язки, якщо існує неперервна матрична функція $C(\tau)$ така, що функція

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(A)C(\tau), & \tau \leq t; \\ \Omega_\tau^t(A)[C(\tau) - I_n], & \tau > t, \end{cases} \quad (4)$$

задовольняє оцінку

$$\|G(t, \tau)\| \leq K \exp\{-\gamma|t - \tau|\} \quad (5)$$

для всіх $t, \tau \in \mathbf{R}$, де K, γ — додатні сталі, не залежні від $t, \tau \in \mathbf{R}$.

Означення 2 [10]. Система (1) називається експоненціально трихотомічною на осі $\mathbf{R}$, якщо існують $(n \times n)$ -вимірні матриці проектування P, Q такі, що

$$PQ = QP, \quad P + Q - PQ = I_n,$$

і константи $K_1 \geq 1, \gamma_1 > 0$ такі, що

$$\begin{aligned} \|\Omega_0^t(A)P\Omega_\tau^0(A)\| &\leq K_1 \exp\{-\gamma_1(t - \tau)\}, & 0 \leq \tau \leq t, \\ \|\Omega_0^t(A)[I_n - P]\Omega_\tau^0(A)\| &\leq K_1 \exp\{\gamma_1(t - \tau)\}, & t \leq \tau, \tau \geq 0, \\ \|\Omega_0^t(A)Q\Omega_\tau^0(A)\| &\leq K_1 \exp\{\gamma_1(t - \tau)\}, & t \leq \tau \leq 0, \\ \|\Omega_0^t(A)[I_n - Q]\Omega_\tau^0(A)\| &\leq K_1 \exp\{-\gamma_1(t - \tau)\}, & \tau \leq t, \tau \leq 0. \end{aligned}$$

Поклавши в означенні 2 $Q = I_n - P$, отримуємо виконання умов

$$\begin{aligned} \|\Omega_0^t(A)P\Omega_\tau^0(A)\| &\leq K_1 \exp\{-\gamma_1(t - \tau)\}, & \tau \leq t, \\ \|\Omega_0^t(A)[I_n - P]\Omega_\tau^0(A)\| &\leq K_1 \exp\{\gamma_1(t - \tau)\}, & t \leq \tau, \end{aligned}$$

тобто означення експоненціальної дихотомії системи (1) на осі $\mathbf{R}$ [1 – 11].

Лема [10]. Наступні твердження є попарно еквівалентними:

1) система (1) є експоненціально трихотомічною на $\mathbf{R}$;

2) система (1) є експоненціально дихотомічною на кожній з півосей $\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^-$ (одночасно) відповідно з проекторами P_+, P_- такими, що

$$P_+P_- = P_-P_+ = P_-;$$

3) існують три взаємно ортогональні проектори P_1, P_2, P_3 такі, що $P_1 + P_2 + P_3 = I_n$ і виконуються оцінки

$$\|\Omega_0^t(A)P_1\Omega_\tau^0(A)\| \leq K_1 \exp\{-\gamma_1(t - \tau)\}, \quad \tau \leq t, \quad (6)$$

$$\|\Omega_0^t(A)P_2\Omega_\tau^0(A)\| \leq K_1 \exp\{\gamma_1(t-\tau)\}, \quad t \leq \tau, \quad (7)$$

$$\|\Omega_0^t(A)P_3\Omega_\tau^0(A)\| \leq K_1 \begin{cases} \exp\{-\gamma_1(t-\tau)\}, & 0 \leq \tau \leq t; \\ \exp\{\gamma_1(t-\tau)\}, & t \leq \tau \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

При цьому проектори з тверджень 1–3 пов'язані між собою таким чином:

$$P_1 = P_- = I_n - Q, \quad P_2 = I_n - P_+ = I_n - P, \quad P_3 = P_+ - P_- . \quad (9)$$

Порівнюючи критерії слабкої регулярності системи (1) [9, с. 33] і її експоненціальної трихотомії [10, с. 366], що дані у термінах функцій Ляпунова, отримуємо наступне твердження.

Теорема 1. Система (1) є слабкорегулярною на $\mathbf{R}$ тоді і тільки тоді, коли вона є експоненціально трихотомічною на $\mathbf{R}$.

Оскільки функцію $C(\tau)$ завжди можна подати у вигляді

$$C(\tau) = \Omega_0^\tau(A)P(\tau)\Omega_\tau^0(A),$$

де $P(\tau)$ того ж класу, що і $C(\tau)$, то функцію Гріна (4) можна записати так:

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \Omega_0^t(A)P(\tau)\Omega_\tau^0(A), & \tau \leq t; \\ \Omega_0^t(A)[P(\tau) - I_n]\Omega_\tau^0(A), & \tau > t. \end{cases} \quad (10)$$

Отже, будемо вивчати функції $P(\tau)$ такі, що виконується оцінка (5). Як відомо [9], для функції Гріна експоненціально дихотомічної системи виконуються умови

$$C^2(\tau) = C(\tau), \quad C(\tau) = \Omega_0^\tau(A)C\Omega_\tau^0(A) \quad \forall \tau \in \mathbf{R}, \quad (11)$$

що еквівалентно виконанню умов

$$P^2(\tau) = P(\tau), \quad P(\tau) = C \quad \forall \tau \in \mathbf{R}, \quad (12)$$

де $C = C(0)$ — постійна матриця. В [9] також показано, що у випадку строгої слабкої регулярності системи (1) жодна з умов (11) (відповідно (12)) не буде виконуватись. У випадку експоненціальної трихотомії системи (1) з проекторами P_+ , P_- можна записати функцію [10]

$$\overline{G}(t, \tau) = \begin{cases} \Omega_0^t(A)P_+\Omega_\tau^0(A), & 0 < \tau \leq \max(t, 0); \\ \Omega_0^t(A)[P_+ - I_n]\Omega_\tau^0(A), & \max(t, 0) < \tau; \\ \Omega_0^t(A)P_-\Omega_\tau^0(A), & \tau \leq \min(t, 0); \\ \Omega_0^t(A)[P_- - I_n]\Omega_\tau^0(A), & \min(t, 0) < \tau \leq 0, \end{cases} \quad (13)$$

для якої буде виконуватись

$$\|\overline{G}(t, \tau)\| \leq K_1 \exp\{-\gamma_1|t - \tau|\}. \quad (14)$$

При цьому *один* (як це буде показано далі) обмежений розв'язок системи (2) для кожної $f(t) \in C^0(\mathbf{R})$ можна записати у вигляді

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}(t, \tau) f(\tau) d\tau. \quad (15)$$

Отже, функція $\overline{G}(t, \tau)$ є функцією Гріна задачі про обмежені розв'язки (1), але спеціального вигляду. На відміну від $G(t, \tau)$ вигляду (10) матриця $P(\tau)$ цієї функції зазнає розриву першого роду в точці $\tau = 0$. Крім цього, для функції $\overline{G}(t, \tau)$ на кожній з півосей $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$ виконуються умови (12), де $C = P_+$ на $\mathbf{R}^+$ і $C = P_-$ на $\mathbf{R}^-$. Зазначимо, що для експоненціально дихотомічної на $\mathbf{R}$ системи (1) функції $G(t, \tau)$ і $\overline{G}(t, \tau)$ збігаються.

Якщо ми будемо вимагати експоненціальну дихотомію лише на одній з півосей, то матриця проектування, що входить у цю умову, може бути неєдиною. Наприклад, система

$$dx_1/dt = x_1, \quad dx_2/dt = -x_2,$$

є експоненціально дихотомічною на $\mathbf{R}^+$ з будь-яким з проекторів $P_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbf{R}$, і експоненціально дихотомічною на $\mathbf{R}$ з єдиним проектором $P = \text{diag}\{0; 1\}$.

Теорема 2. *Проектори P_+ , P_- експоненціально трихотомічної на $\mathbf{R}$ системи — єдині.*

Доведення. Припустимо, що крім проекторів P_+ , P_- існують інші проектори $\overline{P}_+$, $\overline{P}_-$, що задовольняють умови (6) – (8). Тоді при $\tau > 0$ отримуємо нерівності

$$\begin{aligned} \|[P_+ - \overline{P}_+][\overline{P}_- - P_-]\| &\leq \|[I_n - \overline{P}_+]\Omega_\tau^0(A) - [I_n - P_+]\Omega_\tau^0(A)\| \times \\ &\times \|\Omega_\tau^0(A)[\overline{P}_- - P_-]\| \leq 2K_1 \exp\{-\gamma_1 \tau\} \cdot 2K_1 \exp\{-\gamma_1 \tau\} = 4K_1^2 \exp\{-2\gamma_1 \tau\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|[P_+ - \overline{P}_+][P_+ - P_- - [\overline{P}_+ - \overline{P}_-]]\| &\leq \|[I_n - \overline{P}_+]\Omega_\tau^0(A) - \\ &- [I_n - P_+]\Omega_\tau^0(A)\| \|\Omega_\tau^0(A)[P_+ - P_-] - \Omega_\tau^0(A)[\overline{P}_+ - \overline{P}_-]\| \leq 4K_1^2 \exp\{-2\gamma_1 \tau\}. \end{aligned}$$

Переходячи в цих нерівностях до границі при $\tau \rightarrow +\infty$, одержуємо рівності

$$[P_+ - \overline{P}_+][\overline{P}_- - P_-] = 0, \quad [P_+ - \overline{P}_+][P_+ - \overline{P}_+ - [P_- - \overline{P}_-]] = 0,$$

додаючи які, маємо $\|P_+ - \overline{P}_+\|^2 = 0$ і, отже, $P_+ = \overline{P}_+$. Аналогічно при $\tau < 0$ отримуємо нерівності

$$\|[P_- - \overline{P}_-][\overline{P}_+ - P_+]\| \leq 4K_1^2 \exp\{2\gamma_1 \tau\},$$

$$\|[P_+ - P_- - [\overline{P}_+ - \overline{P}_-]][P_- - \overline{P}_-]\| \leq 4K_1^2 \exp\{2\gamma_1 \tau\},$$

з яких при переході до границі при $\tau \rightarrow -\infty$ впливає $P_- = \overline{P}_-$. Теорему доведено.

Таким чином, експоненціально трихотомічна система має єдину функцію $\overline{G}(t, \tau)$. Тоді для будь-якої $f(t) \in C^0(\mathbf{R})$ існує обмежений на $\mathbf{R}$ розв'язок системи (2), який можна записати у вигляді (15). При $t = 0$ цей розв'язок набуває значення

$$y(0) = P_- \int_{-\infty}^0 \Omega_\tau^0(A) f(\tau) d\tau + [P_+ - I_n] \int_0^{+\infty} \Omega_\tau^0(A) f(\tau) d\tau,$$

що належить підпростору $\mathbf{R}^n \setminus \hat{E}$, де $\hat{E} = [P_+ - P_-]\mathbf{R}^n$.

Теорема 3. Якщо система (1) є слабкорегулярною, то для будь-якої вектор-функції $f(t) \in C^0(\mathbf{R})$ існує єдиний обмежений на $\mathbf{R}$ розв'язок $y(t)$ системи (2), що задовольняє умову $y(0) \in \mathbf{R}^n \setminus \hat{E}$.

Доведення. Існування такого розв'язку показано вище, а єдиність випливає з того, що різниця двох описаних розв'язків була б обмеженим розв'язком $x(t)$ системи (1) з початковим значенням $x(0) \in \mathbf{R}^n \setminus \hat{E}$, що можливо лише для тривіального розв'язку. Теорему доведено.

Загальний вигляд обмежених на $\mathbf{R}$ розв'язків системи (2) можна отримати, додаючи до (15) довільні обмежені розв'язки однорідної системи (1). Такими є розв'язки $x(t)$, що задовольняють умову $x(0) \in \hat{E}$ (і тільки вони).

Отже, крім розв'язків вигляду (3), всі обмежені на $\mathbf{R}$ розв'язки системи (2) можна записати у вигляді

$$y(t) = \Omega_0^t(A)[P_+ - P_-]y(0) + \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}(t, \tau) f(\tau) d\tau. \quad (16)$$

Теорема 4. Нехай система (1) є експоненціально трихотомічною. Тоді для матриць $P(\tau)$, що входять у структуру функції Гріна (10), (5), виконуються рівності

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow -\infty} P(\tau)[I_n - P_+] &= 0, & \lim_{\tau \rightarrow +\infty} P(\tau)P_+ &= P_+, & P_+P(0) &= P(0), \\ \lim_{\tau \rightarrow -\infty} P(\tau)[P_+ - P_-] &= 0, & \lim_{\tau \rightarrow +\infty} P(\tau)P_- &= P_-, & P_-P(0) &= P_-. \end{aligned} \quad (17)$$

Доведення. Виконання оцінки (5) для (10) еквівалентне виконанню двох нерівностей

$$\|\Omega_0^t(A)P(\tau)\Omega_\tau^0(A)\| \leq \exp\{-\gamma(t - \tau)\}, \quad \tau \leq t, \quad (18)$$

$$\|\Omega_0^t(A)[P(\tau) - I_n]\Omega_\tau^0(A)\| \leq \exp\{\gamma(t - \tau)\}, \quad \tau > t. \quad (19)$$

Нехай $\tau < 0$. Використовуючи (18) і (7), одержуємо

$$\|P(\tau)[I_n - P_+]\| \leq \|P(\tau)\Omega_\tau^0(A)\| \|\Omega_0^\tau(A)[I_n - P_+]\| \leq KK_1 \exp\{(\gamma + \gamma_1)\tau\},$$

звідки $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \|P(\tau)[I_n - P_+]\| = 0$ і остаточно маємо першу з рівностей (17). З (18) і (8) аналогічно отримуємо $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} P(\tau)[P_+ - P_-] = 0$. При $t \geq 0$ з (18) маємо $\|\Omega_0^t(A)P(0)\| \leq \exp\{-\gamma t\}$. Тоді

$$\|[I_n - P_+]P(0)\| \leq \|[I_n - P_+]\Omega_\tau^0(A)\| \|\Omega_0^\tau(A)P(0)\| \leq KK_1 \exp\{(\gamma + \gamma_1)\tau\},$$

звідки $[I_n - P_+]P(0) = 0$, і, отже, $P_+P(0) = P(0)$.

Використовуючи (19) і (6) – (8) при $\tau > 0$, аналогічно доводимо виконання решти рівностей. Цим і завершується доведення теореми.

Теорема 5. *Якщо система (1) є експоненціально трихотомічною, то вона має функції Гріна (8) з матрицями $P(\tau)$ вигляду*

$$P(\tau) = [P_+ + P_- + [P_+ - P_-]H(\tau)]/2, \quad (20)$$

де матриці $H(\tau) \in C^0(\mathbf{R})$ і такі, що

$$\begin{aligned} \|H(\tau) + I_n\| &\leq \exp\{(\gamma_1 + \alpha)\tau\}, \quad \tau \leq 0, \\ \|H(\tau) - I_n\| &\leq \exp\{-(\gamma_1 + \alpha)\tau\}, \quad \tau \geq 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\alpha = \max_{t \in \mathbf{R}} \|A(t)\|.$$

При цьому оцінка (5) буде виконуватись з константами $\gamma = \gamma_1$, $K = 3K_1/2$.

Доведення. З формул (10), (13), (20) випливає

$$\begin{aligned} G(t, \tau) - \overline{G}(t, \tau) &= \begin{cases} \Omega_0^t(A)[P(\tau) - P_-]\Omega_\tau^0(A), & \tau \leq 0; \\ \Omega_0^t(A)[P(\tau) - P_+]\Omega_\tau^0(A), & \tau > 0, \end{cases} = \\ &= \frac{1}{2} \Omega_0^t(A)[P_+ - P_-] \begin{cases} [H(\tau) - I_n]\Omega_\tau^0(A), & \tau \leq 0; \\ [H(\tau) - I_n]\Omega_\tau^0(A), & \tau > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

З нерівності [2, с. 162]

$$\|(\Omega_\tau^t(A))^{\pm 1}\| \leq \exp \left\{ \int_\tau^t \|A(\sigma)\| d\sigma \right\}, \quad \tau \leq t, \tau \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R},$$

випливає оцінка

$$\|\Omega_\tau^0(A)\| \leq \exp\{\alpha|\tau|\}, \quad \tau \in \mathbf{R}. \quad (23)$$

Тоді, використовуючи (8), (14) і (21) – (23), маємо

$$\begin{aligned} \|G(t, \tau)\| &\leq \|\overline{G}(t, \tau)\| + \|G(t, \tau) - \overline{G}(t, \tau)\| \leq \\ &\leq K_1 \exp\{-\gamma_1|t - \tau|\} + \frac{1}{2} \|\Omega_0^t(A)[P_+ - P_-]\| \times \\ &\times \|\Omega_\tau^0(A)\| \begin{cases} [H(\tau) - I_n], & \tau \leq 0, \\ [H(\tau) - I_n], & \tau > 0, \end{cases} \leq K_1 \exp\{-\gamma_1|t - \tau|\} + \\ &+ \frac{1}{2} K_1 \exp\{-\gamma_1|t|\} \exp\{\alpha|\tau|\} \exp\{-(\gamma_1 + \alpha)|\tau|\} \leq \frac{3}{2} K_1 \exp\{-\gamma_1|t - \tau|\}. \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Зауваження 1. Для функцій $P(\tau)$ вигляду (20) виконуються умови

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} P(\tau) = P_-, \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} P(\tau) = P_+, \quad P(0) = [P_+ + P_-]/2.$$

Зауваження 2. Крім функцій $G(t, \tau)$ з матрицями $P(\tau)$ вигляду (20), (21) система (1) може мати й інші функції Гріна.

Зауваження 3. Клас функцій $P(\tau)$ вигляду (20) таких, що (10) задовольняє оцінку (5), можна розширити, якщо замість (21) вимагати виконання нерівностей

$$\begin{aligned} \|H(\tau) + I_n\| &\leq \|\Omega_\tau^0(A)\|^{-1} \exp\{\gamma_1 \tau\}, \quad \tau \leq 0, \\ \|H(\tau) - I_n\| &\leq \|\Omega_\tau^0(A)\|^{-1} \exp\{-\gamma_1 \tau\}, \quad \tau \geq 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Зокрема, завжди можна вибрати $H(\tau) = h(\tau)I_n$, де $h(\tau)$ — скалярна функція така, що $|h(\tau) \pm 1|$ задовольняє вказані вище нерівності.

Як відомо [9], слабкорегулярну систему (1) завжди заміною змінних Ляпунова $x = L(t)z$ можна звести до блочно-трикутного вигляду

$$dz/dt = \Phi(t)z, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi^+(t) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi^-(t) & 0 \\ \Phi^+(t) & \Phi^-(t) & \hat{\Phi}(t) \end{pmatrix} \in C^0(\mathbf{R}), \quad (25)$$

де $\Phi^\pm(t)$, $\hat{\Phi}(t)$ такі, що відповідні матрицанти задовольняють оцінки

$$\begin{aligned} \|\Omega_\tau^t(\Phi^+)\| &\leq \bar{K} \exp\{-\bar{\gamma}(t - \tau)\}, \quad \tau \leq t, \\ \|\Omega_\tau^t(\Phi^-)\| &\leq \bar{K} \exp\{\bar{\gamma}(t - \tau)\}, \quad t \leq \tau, \\ \|\Omega_\tau^t(\hat{\Phi})\| &\leq \bar{K} \begin{cases} \exp\{-\bar{\gamma}(t - \tau)\}, & 0 \leq \tau \leq t; \\ \exp\{\bar{\gamma}(t - \tau)\}, & t \leq \tau \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

Оскільки дана система також є слабкорегулярною, то, згідно з лемою, вона має матриці проектування $\bar{P}_+$, $\bar{P}_-$ такі, що

$$\bar{P}_+ \bar{P}_- = \bar{P}_- \bar{P}_+ = \bar{P}_-. \quad (27)$$

При цьому

$$P_+ = L(0)\bar{P}_+L^{-1}(0), \quad P_- = L(0)\bar{P}_-L^{-1}(0). \quad (28)$$

Теорема 6. Проектори P_+ , P_- експоненціально трихотомічної системи можна подати у вигляді (28), де

$$\bar{P}_+ = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{P}_{31}^+ & \bar{P}_{32}^+ & \bar{P}_{33}^+ \end{pmatrix}, \quad \bar{P}_- = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{P}_{31}^- & \bar{P}_{32}^- & \bar{P}_{33}^- \end{pmatrix}. \quad (29)$$

При цьому блоки матриць (29) мають ті ж розміри, що і відповідні блоки $\Phi(t)$, і такі, що виконуються рівності (27).

Доведення. Розглянемо проектори $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$, визначені через $\bar{P}_+, \bar{P}_-$, згідно з лемою, аналогічно (9). Рівність нулю певних блоків цих проекторів впливає з одночасного виконання нерівностей (26) і (6) – (8) для них і матрицанта $\Omega_\tau^t(\Phi)$ системи (25), який можна записати у блочно-трикутному вигляді [9, с. 47]. Тоді, виразивши $\bar{P}_+, \bar{P}_-$ через ці $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$, отримаємо (29).

Розглянемо деякий частковий випадок.

Твердження. Якщо система (1) є експоненціально трихотомічною і при цьому має лише обмежені розв'язки, то для будь-якої вектор-функції $f(t) \in C^0(\mathbf{R})$ всі розв'язки неоднорідної системи (2) будуть обмеженими.

Дійсно, оскільки для системи (1) проектори $P_+ = I_n, P_- = 0$, то, записуючи обмежені розв'язки системи (2) у вигляді (16), отримуємо формулу

$$y(t) = \Omega_0^t(A)y(0) + \int_0^t \Omega_\tau^t(A)f(\tau)d\tau,$$

що описує всі розв'язки даної системи.

Зазначимо, що більшість з одержаних результатів справедливі і у тому випадку, коли матриця $A(t)$ належить класу інтегрально обмежених функцій або класу функцій, що набувають обмеженого росту.

1. Майзель А. Д. Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений // Тр. Урал. политехн. ин-та. Сер. мат. — 1954. — **51**. — С. 20 – 50.
2. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
3. Массера Х., Шеффер Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М.: Мир, 1979. — 456 с.
4. Lovelady D. L. Boundedness properties for linear ordinary differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. — 1973. — **41**, № 1. — P. 193 – 196.
5. Sacker R. J., Sell G. R. Existence of dichotomies and invariant splittings for differential systems. III // J. Different. Equat. — 1976. — **22**, № 2. — P. 497 – 522.
6. Coppel W. A. Dichotomies in stability theory // Lect. Notes Math. — Berlin etc.: Springer, 1978. — № 629.
7. Плисс В. А. Ограниченные решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. — Киев: Наук. думка, 1977. — С. 168 – 173.
8. Palmer K. J. Exponential dichotomies and transversal homoclinic points // J. Different. Equat. — 1984. — **55**, № 2. — P. 225 – 256.
9. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. Исследование дихотомии систем линейных дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. — Киев: Наук. думка, 1990. — 272 с.
10. Elaydi S., Hajek O. Exponential trichotomy of differential systems // J. Math. Anal. and Appl. — 1988. — **129**, № 2. — P. 362 – 374.
11. Boichuk A. A. Solution of weakly nonlinear differential equations bounded on the whole line // Нелінійні коливання. — 1999. — **2**, № 1. — С. 136 – 139.

Одержано 10.03.2000