УДК 517.54

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И КВАДРАТИЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

А. К. Бахтин, А. Л. Таргонский

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3
e-mail: abahtin@imath.kiev.ua

We study extremal problems for regions with free poles lying in ray systems of points.

Вивчаються екстремальні задачі про області з вільними полюсами, що належать променевим системам точок.

Введение. В геометрической теории функций комплексной переменной экстремальные задачи о неналегающих областях представляют известное классическое направление. Возникновение этого направления связано с известной работой М. А. Лаврентьева [1], где была впервые поставлена и решена задача о произведении конформных радиусов двух взаимно не пересекающихся односвязных областей. В последующем эта задача обобщалась и усиливалась в работах многих авторов (см., например, [2 – 8]). Следует отметить, что большое значение при решении таких задач имеет теория квадратичных дифференциалов, в частности результаты, описывающие локальную и глобальную структуру их траекторий (см., например, [2]).

1. Обозначения и определения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ обозначают множества натуральных, вещественных и комплексных чисел соответственно.

Системой неналегающих областей (с. н. о.) называется конечный набор $\{B_k\}_{k=1}^n$, $n \in \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, таких произвольных областей любой связности, что $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \bigcap B_m = \varnothing$ $\forall k \neq m$, $k, m = \overline{1, n}$.

Рассмотрим при $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, множество Λ_n всех наборов точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \subset \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ таких, что

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi.$$

Такие системы точек $A_n \in \Lambda_n$ будем называть лучевыми системами точек. Для лучевых систем точек введем следующие обозначения: $a_{n+1} := a_1$, $a_0 := a_n$, $\sigma_k := \dfrac{1}{\pi}(\arg a_{k+1} - - \arg a_k)$, $k = \overline{1, n}$. Очевидно, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k = 2$.

На Λ_n определим функционал

$$\mu = \mu\left(A_n\right) = \mu\left(\{a_k\}_{k=1}^n\right) = \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\sigma_k}}\right)|a_k|,$$

где $\chi\left(t\right) = \dfrac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right)$.

Величину $r(B, a)$ будем называть внутренним радиусом области B относительно точки a (определение внутреннего радиуса области см., например, в [6]).

Рассмотрим функционал

$$J_n = \left(r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)\right)^\alpha \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

где $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $n \geq 2$, — произвольная система точек множества Λ_n, $\{B_0, B_1, B_2, \ldots$ $\ldots, B_n, B_\infty\}$ — произвольная с. н. о., причем $0 \in B_0$, $\infty \in B_\infty$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, а фиксированное число $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$.

В работе при любом $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, и при некоторых ограничениях на систему точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \Lambda_n$ и с. н. о. $\{B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n, B_\infty\}$ оцениваются сверху значения функционала J_n. Близкие задачи были рассмотрены в работах [4–14].

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0; 0,125]$. Тогда для произвольной системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \Lambda_n$ и произвольной с. н. о. $\{B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n, B_\infty\}$ такой, что $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, $\infty \in B_\infty$, выполняется неравенство*

$$\left(r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)\right)^\alpha \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq \left(r(D_0, 0)\, r(D_\infty, \infty)\right)^\alpha \prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k), \tag{1}$$

где области D_0, D_∞, D_k и точки d_k, $k = \overline{1,n}$, — соответственно круговые области и полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\alpha w^{2n} + \mu\left(n^2 - 2\alpha\right) w^n + \alpha\mu^2}{w^2\left(w^n - \mu\right)^2}\, dw^2. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha \leq \left(\frac{7}{20}\, n\right)^2$. Тогда для произвольной системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \Lambda_n$, для которой $\sigma_k \leq \frac{7}{10\sqrt{\alpha}}$ $\forall k = \overline{1,n}$, и произвольной с. н. о. $\{B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n, B_\infty\}$ такой, что $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, $\infty \in B_\infty$, выполняется неравенство (1) с аналогичным утверждением о знаке равенства.*

Непосредственно из теоремы 2 получаем следующий результат.

Следствие 1. *Пусть $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{n}$, $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2 + \varepsilon_0 n}\right)^2$. Тогда для произвольной системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \Lambda_n$, для которой $\sigma_k = \frac{2}{n} + \varepsilon_k$, $|\varepsilon_k| \leq \varepsilon_0$, $k = \overline{1,n}$, и произвольной с. н. о. $\{B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n, B_\infty\}$ такой, что $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, $\infty \in B_\infty$, выполняется неравенство (1) с аналогичным утверждением о знаке равенства.*

При $\alpha = 0$ из формулировки теоремы 1 получаем следующий результат.

Следствие 2. *Пусть* $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда для произвольной системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n} \in \Lambda_n$ *и с. н. о.* $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ *такой, что* $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, *выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leq \prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, d_k\right),$$

где области D_k *и точки* d_k, $k = \overline{1,n}$, *— соответственно круговые области и полюсы квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{\left(w^n - \mu\right)^2}\, dw^2.$$

3. Доказательства. ***Доказательство теоремы 1.*** При доказательстве этой теоремы также воспользуемся методом кусочно-разделяющего преобразования В. Н. Дубинина.

Функция

$$\zeta_k\left(w\right) = -i\left(e^{-i\arg a_k} w\right)^{\frac{1}{\sigma_k}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

конформно отображает область

$$\Delta_k := \left\{w : \, \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\right\}, \quad k = \overline{1,n},$$

на правую полуплоскость. Из соотношений (3) видно, что

$$\left|\zeta_k\left(w\right) - \zeta_k\left(a_m\right)\right| \sim \frac{1}{\sigma_k} |a_m|^{\frac{1}{\sigma_k}-1} \left|w - a_m\right|, \quad w \to a_m,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n, \quad m = k, k+1, \tag{4}$$

$$\left|\zeta_k\left(w\right)\right| = |w|^{\frac{1}{\sigma_k}}, \quad w \to 0, \ w \to \infty.$$

Обозначим

$$\zeta_k\left(a_k\right) =: \omega_1^{(k)}, \quad \zeta_k\left(a_{k+1}\right) =: \omega_2^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Из формул (3) и (5) получаем

$$\begin{gathered} \omega_1^{(k)} = \zeta_k\left(a_k\right) = -i\left(\frac{|a_k|}{a_k} a_k\right)^{\frac{1}{\sigma_k}} = -i\left|a_k\right|^{\frac{1}{\sigma_k}}, \\ \omega_2^{(k)} = \zeta_k\left(a_{k+1}\right) = -i\left(e^{i(\arg a_{k+1} - \arg a_k)}\left|a_{k+1}\right|\right)^{\frac{1}{\sigma_k}} = i\left|a_{k+1}\right|^{\frac{1}{\sigma_k}}, \quad k = \overline{1,n}. \end{gathered} \tag{6}$$

Результаты разделяющего преобразования [5, 6] областей B_0 и B_∞ относительно семейства функций $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$ обозначим соответственно $\left\{G_0^{(k)}\right\}_{k=1}^n$ и $\left\{G_\infty^{(k)}\right\}_{k=1}^n$. Результат разделяющего преобразования области B_k, $k = 2, 3, \ldots, n$, относительно семейства функций $\{\zeta_{k-1}, \zeta_k\}$ обозначим $\left\{G_2^{(k-1)}, G_1^{(k)}\right\}$. Для области B_1 результатом разделяющего преобразования относительно семейства функций $\{\zeta_1, \zeta_n\}$ будет пара областей $\left\{G_1^{(1)}, G_2^{(n)}\right\}$. Таким образом, совокупность областей $\{\Delta_k\}_{k=1}^n$ и любая система точек $\{0, \{a_k\}_{k=1}^n, \infty\}$, $\{a_k\}_{k=1}^n \in \Lambda_n$ с с. н. о. $\{B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n, B_\infty\}$ такой, что $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, $\infty \in$ $\in B_\infty$, порождают систему точек $\left\{0, \omega_1^{(k)}, \omega_2^{(k)}, \infty\right\}$ такую, что $\left\{\omega_1^{(k)}, \omega_2^{(k)}\right\} \in \Lambda_2^* \, \forall k = \overline{1,n}$, и с. н. о. $\left\{G_0^{(k)}, G_1^{(k)}, G_2^{(k)}, G_\infty^{(k)}\right\}$ такую, что $0 \in G_0^{(k)}$, $\omega_1^{(k)} \in G_1^{(k)}$, $\omega_2^{(k)} \in G_2^{(k)}$, $\infty \in G_\infty^{(k)}$, $k = \overline{1,n}$.

Из теоремы 1.9 [6] и соотношений (4) – (6) следуют неравенства

$$r\left(B_k, a_k\right) \leq \left[\frac{r\left(G_1^{(k)}, \omega_1^{(k)}\right)}{\sigma_k^{-1}\left|a_k\right|^{\frac{1}{\sigma_k}-1}} \frac{r\left(G_2^{(k-1)}, \omega_2^{(k-1)}\right)}{\sigma_{k-1}^{-1}\left|a_k\right|^{\frac{1}{\sigma_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \forall k = 2, \ldots, n,$$

$$r\left(B_1, a_1\right) \leq \left[\frac{r\left(G_1^{(1)}, \omega_1^{(1)}\right)}{\sigma_1^{-1}\left|a_1\right|^{\frac{1}{\sigma_1}-1}} \frac{r\left(G_2^{(n)}, \omega_2^{(n)}\right)}{\sigma_n^{-1}\left|a_1\right|^{\frac{1}{\sigma_n}-1}}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

$$r\left(B_0, 0\right) \leq \prod_{k=1}^n \left[r\left(G_0^{(k)}, 0\right)\right]^{\frac{\sigma_k^2}{2}}, \quad r\left(B_\infty, \infty\right) \leq \prod_{k=1}^n \left[r\left(G_\infty^{(k)}, \infty\right)\right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}}.$$

Условия реализации знака равенства в неравенствах (7) полностью описаны в теореме 1.9 [6]. На основании соотношений (7) получаем неравенство

$$\Xi_n(p) = \left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^\alpha \prod_{k=1}^n r\left(B_k, a_k\right) \leq$$

$$\leq \prod_{k=1}^n \left\{\left(r\left(G_0^{(k)}, 0\right) r\left(G_\infty^{(k)}, \infty\right)\right)^{\frac{\alpha\sigma_k^2}{2}} \left(\frac{r\left(G_1^{(k)}, \omega_1^{(k)}\right) r\left(G_2^{(k)}, \omega_2^{(k)}\right)}{\left(\sigma_{k-1}\sigma_k\right)^{-1}\left(\left|a_k\right|\left|a_{k+1}\right|\right)^{\frac{1}{\sigma_k}-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}, \tag{8}$$

где $\sigma_0 := \sigma_n$. Выражение (8) можно записать следующим образом:

$$\Xi_n \leq 2^n \prod_{k=1}^n \sigma_k \prod_{k=1}^n \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\sigma_k}}\right)\left|a_k\right| \times$$

$$\times \prod_{k=1}^n \left\{\frac{r\left(G_1^{(k)}, \omega_1^{(k)}\right) r\left(G_2^{(k)}, \omega_2^{(k)}\right)}{\left(\left|a_k\right|^{\frac{1}{\sigma_k}} + \left|a_{k+1}\right|^{\frac{1}{\sigma_k}}\right)^2}\left(r\left(G_0^{(k)}, 0\right) r\left(G_\infty^{(k)}, \infty\right)\right)^{\alpha\sigma_k^2}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Каждое выражение, стоящее в фигурных скобках неравенства (9), является значением функционала

$$\Gamma_\tau = \left(r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right)^{\tau^2} \frac{r\left(B_1, a_1\right) r\left(B_2, a_2\right)}{\left|a_1 - a_2\right|^2} \tag{10}$$

на системе точек $\left\{0, \omega_1^{(k)}, \omega_2^{(k)}, \infty\right\}$ и с. н. о. $\left\{G_0^{(k)}, G_1^{(k)}, G_2^{(k)}, G_\infty^{(k)}\right\}$, $k = \overline{1, n}$. На основании теоремы 1 [10, 11] и инвариантности функционала (10) получаем оценку

$$\Gamma_\tau \leq \Psi\left(\tau\right), \tag{11}$$

где $\Psi\left(\tau\right)$ — положительная функция, равная значению функционала Γ_τ на системе точек $\{0, i, -i, \infty\}$ и с. н. о. $\left\{B_0^0, B_1^0, B_2^0, B_\infty^0\right\}$, а B_0^0, B_1^0, B_2^0, B_3^0 — круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^4 + 2\left(1 - \dfrac{2}{\tau^2}\right)w^2 + 1}{w^2\left(w^2+1\right)^2}\,dw^2.$$

Тогда из (9) и (11) получаем соотношение

$$\Xi_n \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \mu\left(\prod_{k=1}^{n} \Psi\left(\sqrt{\alpha}\sigma_k\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Пользуясь результатами [6, 8], нетрудно показать, что функция $\log\Psi\left(\tau\right)$ выпукла на промежутке $\left[0; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Тогда из (12) имеем соотношение

$$\Xi_n \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n \mu\left(\Psi\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{n}\right)\right)^{\frac{n}{2}}$$

для $0 \leq \alpha \leq 0,125$. Из (13) следует справедливость неравенства (1) и квадратичного дифференциала (2).

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2, в основном, аналогично доказательству теоремы 1.

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — **5**. — С. 159 – 245.
2. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 256 с.
3. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев, 1975. — 11 с.
4. *Кузьмина Г. В.* Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. научн. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та РАН. — 2001. — **276**. — С. 253 – 275.

5. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Владивосток, 1988. — 193 с.
6. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. — 1994. — **49**, № 1 (295). — С. 3 – 76.
7. *Ковалев Л. В.* О трех непересекающихся областях // Дальневост. мат. журн. — 2000. — **1**, № 1. — С. 3 – 7.
8. *Емельянов Е. Г.* К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей // Зап. научн. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та РАН. — 2002. — **286**. — С. 103 – 114.
9. *Bakhtin A. K.* Extremal problems for non-overlapping domains with free poles on closed curves // Int. Workshop Potential Theory and Free Boundary Flows: Abstrs. — Kiev: Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, 2003. — P. 4.
10. *Бахтин А. К.* Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности // Некоторые экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами. — Киев, 2003. — С. 1 — 45. — (Препринт/ НАН Украины. Ин-т математики; 2003.6).
11. *Бахтин А. К.* Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности // Допов. НАН України. — 2004. — № 8. — С. 7 – 15.
12. *Бахтин А. К.* Кусочно-разделяющее преобразование и экстремальные задачи со свободными полюсами на лучах // Там же. — № 12. — С. 7 – 13.
13. *Бахтин А. К., Таргонский А. Л.* Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на лучах // Там же. — № 7. — С. 7 – 13.
14. *Бахтин А. К., Таргонский А. Л.* Некоторые экстремальные задачи теории неналегающих областей со свободными полюсами на лучах // Некоторые экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами. — Киев, 2003. — С. 46 – 67. — (Препринт/ НАН Украины. Ин-т математики; 2003.6).

Получено 14.02.2005