УДК 539.3

ЗНАХОДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ТРИВИМІРНИХ РІВНЯНЬ ЛЯМЕ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

В. П. Ревенко

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

We have integrated the Lamé equation and, in the case of the three-dimensional elasticity theory, found new solutions that are expressed in terms of harmonic functions. We prove that the expression of the solution involvesonly three independent functions. The general solution of the Lamé equation, in a curvilinear orthogonal coordinate system, is expressed in terms of three harmonic functions.

Зінтегровано рівняння Ляме, знайдено нові розв'язки тривимірної теорії пружності, які подано через гармонічні функції. Доведено, що існують тільки три незалежні функції у поданні розв'язку. Загальний розв'язок рівнянь Ляме у криволінійній ортогональній системі координат виражено через три гармонічні функції.

Вступ. При розв'язуванні тривимірних задач теорії пружності [1, 2], як правило, задають конкретний розподіл переміщень, що приводить до знаходження частинних розв'язків рівнянь Ляме. Тому інтегрування рівнянь Ляме і знаходження вектора пружних переміщень у загальному випадку є дуже важливою задачею. Вважають [1, 2], що загальне подання розв'язку рівнянь Ляме через гармонічні функції було одержано незалежно П. Ф. Папковичем [3] і Нейбером [4]

$$\mathbf{u} = \psi - \frac{1}{4(1-\nu)} \operatorname{grad}\left(\Psi + x\psi_1 + y\psi_2 + z\psi_3\right), \tag{1}$$

де Ψ, ψ_j, $j = \overline{1,3}$, — гармонічні функції, ν — коефіцієнт Пуассона. У роботі [5] досліджувались питання повноти знайдених розв'язків у залежності від зв'язності області. Питання побудови точних розв'язків тривимірної теорії пружності в напруженнях досліджувалися в [6, 7]. При знаходженні розв'язків рівнянь Ляме використовувалися різні підходи, але не було доведено, що знайдено загальний розв'язок [1, 2, 8]. На даний час у теорії пружності існує великий клас задач, які не вдається розв'язати за допомогою відомих подань вектора переміщень, що привело до розробки нових розрахункових схем і моделей [9–11]. Огляд літератури з цієї тематики наведено в роботах [1, 2, 7, 11].

Метою даної роботи є побудова загального розв'язку тривимірних рівнянь Ляме в інваріантному відносно заміни системи координат вигляді і доведення, що в ньому існує тільки три незалежні функції.

1. Постановка задачі. Рівняння Ляме в переміщеннях [1, 2] запишемо у векторному вигляді

$$\alpha\nabla^2\mathbf{u} + \operatorname{grad} e = 0, \tag{2}$$

де $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ — оператор Лапласа, $e = \operatorname{div}\mathbf{u} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3}$ — об'ємне розширення, $\alpha = 1 - 2\nu$, $\mathbf{u} = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j} + u_3\,\mathbf{k}$ — вектор пружних переміщень, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — одиничні орти декартової системи координат.

Розглянемо однозв'язне опукле тривимірне тіло D. Будемо вважати, що компоненти вектора пружних переміщень в області D мають неперервні частинні похідні за змінними x_1, x_2, x_3 до четвертого порядку включно. При побудові тривимірного вектора пружних переміщень необхідно використовувати набір функцій, які можна вважати векторами [11, 12]. Такий набір функцій має фізичний зміст, пов'язаний з інваріантністю відносно різних систем координат, і його можна в подальшому використовувати в інших системах координат, зокрема криволінійних.

2. Знаходження загального розв'язку рівнянь Ляме в інваріантному вигляді. При дослідженні рівнянь Ляме будемо виходити з відомого факту, що об'ємне розширення є гармонічною функцією, а кожна компонента вектора пружних переміщень — розв'язком бігармонічного рівняння. Для цього рівняння можна виділити окремо два класи розв'язків: гармонічні (I) і бігармонічні (II) функції трьох змінних.

2.1. Кожна компонента вектора переміщень є гармонічною функцією. У цьому випадку з рівнянь Ляме (2) випливає, що об'ємне розширення буде сталою, а система рівнянь спрощується:

$$\nabla^2\mathbf{u} = 0, \quad e = \operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \equiv C, \tag{3}$$

де C — стала. Загальний розв'язок системи рівнянь (3) розіб'ємо на частинний поліномний (степені 1) та однорідний гармонічний.

Теорема 1. *Якщо вектор пружних переміщень* $\mathbf{u}$ *має об'ємне розширення, що дорівнює нулю* $(\operatorname{div}\mathbf{u} \equiv 0)$, *то він є гармонічним розв'язком рівнянь Ляме і його можна подати у вигляді*

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad}\Psi + \operatorname{rot}Q\mathbf{k}, \tag{4}$$

де Ψ *і* Q *— незалежні гармонічні функції трьох змінних.*

Доведення. У цьому випадку рівняння Ляме, які задовольняє вектор пружних переміщень, зводяться до системи (3), де $C = 0$. Отже, всі компоненти вектора будуть гармонічними функціями. Поле пружних переміщень, задане у вигляді градієнта

$$\mathbf{w} = \operatorname{grad}\Psi,$$

де Ψ — довільна гармонічна функція, задовольняє рівняння (3). Довільний розв'язок системи рівнянь (3) завжди можна подати у вигляді

$$u_1 = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3}, \quad u_2 = \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}, \quad u_3 = \frac{\partial\psi_3}{\partial x_3}, \tag{5}$$

де ψ_j — гармонічні функції. За означенням $\operatorname{div}\mathbf{u} \equiv 0$. Внаслідок довільності гармонічної функції Ψ, яка описує градієнтне поле переміщень, покладемо $\Psi = \psi_3$. Віднімаючи від переміщень (5) це градієнтне поле, одержуємо новий вектор переміщень $\mathbf{v}$, компоненти якого є такими:

$$v_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1}, \quad v_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2}, \quad v_3 = 0.$$

Оскільки $\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv 0$, то $\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial v_2}{\partial x_2}$. Отже, існує така гармонічна функція Q, що $v_1 = \frac{\partial Q}{\partial x_2}$, $v_2 = -\frac{\partial Q}{\partial x_1}$. Звідси випливає, що $\mathbf{v} = \operatorname{rot} Q\mathbf{k}$.

Теорему доведено.

У подальшому будемо використовувати наступне твердження.

Лема. *Загальний розв'язок рівняння*

$$\operatorname{div} \mathbf{W} = -\frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2} \tag{6}$$

має вигляд

$$\mathbf{W} = \operatorname{grad} K + \operatorname{rot} M\,\mathbf{k} + x_1 \operatorname{rot}\left(\frac{\partial P}{\partial x_2}\,\mathbf{k}\right) - x_2 \operatorname{rot}\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\,\mathbf{k}\right), \tag{7}$$

де P, K, M — довільні гармонічні функції трьох змінних.

Доведення. Випадок, коли $P \equiv 0$, розглянуто в теоремі 1. Отже, нам потрібно знайти частинний розв'язок рівняння (6). Легко перевірити, що гармонічний вектор $\mathbf{B}$, де

$$B_1 = x_1 \frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} - x_2 \frac{\partial^2 P}{\partial x_2 \partial x_1}, \quad B_2 = x_2 \frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} - x_1 \frac{\partial^2 P}{\partial x_2 \partial x_1}, \quad B_3 = 0,$$

є частинним розв'язком.

Лему доведено.

Таким чином, ми довели аналог теореми Ґельмгольца [12] про розклад гармонічного векторного поля.

Наслідок 1. *Довільне гармонічне векторне поле можна подати у вигляді (7), де окремо виділено дивергентну, градієнтну і роторну частини векторного поля.*

2.2. Компоненти вектора пружних переміщень є бігармонічними функціями трьох змінних.

Теорема 2. *Загальний розв'язок рівнянь Ляме для бігармонічних компонент переміщень із точністю до гармонічних розв'язків (4) має вигляд*

$$\mathbf{u} = x_3 \operatorname{grad} R - (3 - 4\nu) R\,\mathbf{k}, \tag{8}$$

де R — гармонічна функція трьох змінних.

Доведення. Наведемо загальний вигляд бігармонічного розв'язку рівнянь Ляме

$$\mathbf{u} = x_1 \mathbf{B_1} + x_2 \mathbf{B_2} + x_3 \mathbf{B_3} + \boldsymbol{\psi}, \tag{9}$$

де $\boldsymbol{\psi}= \psi_1\mathbf{i} + \psi_2\mathbf{j} + \psi_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B_j} = B_{j1}\mathbf{i} + B_{j2}\mathbf{j} + B_{j3}\mathbf{k}$; ψ_j, B_{jk} — гармонічні функції. Згідно з наслідком 1, одну частину вектора $\boldsymbol{\psi}$ враховує гармонічний розв'язок (4), а другу можна включити у коефіцієнти B_{jk}, отже, його можна не враховувати.

Знайдемо об'ємне розширення

$$e = \operatorname{div} \mathbf{u} = N + x_1 \operatorname{div} \mathbf{B_1} + x_2 \operatorname{div} \mathbf{B_2} + x_3 \operatorname{div} \mathbf{B_3}, \tag{10}$$

де $N = B_{11} + B_{22} + B_{33}$, та лапласіани

$$\nabla^2 u_j = 2 \left(\frac{\partial B_{1j}}{\partial x_1} + \frac{\partial B_{2j}}{\partial x_2} + \frac{\partial B_{3j}}{\partial x_3} \right), \quad j = \overline{1,3}. \tag{11}$$

Виходячи з вигляду рівнянь Ляме, припустимо, що

$$\operatorname{div} \mathbf{B_j} \equiv 0, \quad j = \overline{1,3}. \tag{12}$$

Рівняння Ляме після врахування цих умов набирають вигляду

$$2\alpha \left(\frac{\partial B_{1j}}{\partial x_1} + \frac{\partial B_{2j}}{\partial x_2} + \frac{\partial B_{3j}}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial N}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1,3}. \tag{13}$$

Виразимо з умов (12) компоненти B_{jj}, $j = \overline{1,3}$, підставимо їх у (13) і після перетворень одержимо векторне рівняння

$$2\alpha \operatorname{rot} \mathbf{W} = \operatorname{grad} N, \tag{14}$$

де компоненти вектора $\mathbf{W}$ є такими: $W_1 = B_{23} - B_{32}$, $W_2 = B_{31} - B_{13}$, $W_3 = B_{12} - B_{21}$. Подамо вектор $\mathbf{W}$ у вигляді (7), візьмемо від нього ротор, підставимо у рівняння (14) і після використання векторних формул [12] одержимо

$$\operatorname{rot} \mathbf{W} = \operatorname{grad} \frac{\partial M}{\partial x_3} + x_1 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(\frac{\partial P}{\partial x_2} \mathbf{k} \right) - x_2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} \mathbf{k} \right) = \frac{1}{2\alpha} \operatorname{grad} N. \tag{15}$$

Із рівнянь (14), (15) випливає

$$P = 0, \quad M = \frac{1}{2\alpha} F, \tag{16}$$

де $\dfrac{\partial F}{\partial x_3} = N$. Визначальні умови для коефіцієнтів B_{jk} набирають вигляду

$$\mathbf{W} = \operatorname{grad} K + \frac{1}{2\alpha} \operatorname{rot} F\mathbf{k}, \quad B_{11} + B_{22} + B_{33} = \frac{\partial F}{\partial x_3}. \tag{17}$$

Ми одержали сім рівнянь (12), (17) для визначення одинадцяти невідомих функцій. Загальний розв'язок цих рівнянь може містити чотири довільні функції. Із леми, після врахування умов (12), випливає, що коефіцієнти B_{jk} можна записати у вигляді

$$B_{j1} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x_1} + \frac{\partial H_j}{\partial x_2}, \quad B_{j2} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x_2} - \frac{\partial H_j}{\partial x_1}, \quad B_{j3} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x_3}, \tag{18}$$

де ψ_j, H_j, $j = \overline{1,3}$, — довільні гармонічні функції.

Введемо нові позначення:

$$G_1 = H_1 + \psi_2, \quad G_2 = \psi_1 - H_2, \quad G_3 = H_3 - K, \quad A_1 = \psi_3 + \frac{1}{2\alpha} F. \tag{19}$$

Після використання рівностей (18) одержимо таку визначальну систему:

$$\begin{gathered} \frac{\partial G_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial G_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_1} - \frac{\partial G_2}{\partial x_2} + \frac{\partial K}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial G_2}{\partial x_1} + \frac{\partial G_1}{\partial x_2} + \frac{\partial (\psi_3 - F)}{\partial x_3} = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Розв'язок першого визначального рівняння у системі (20) запишемо у вигляді

$$G_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2}, \quad A_1 = \psi_3 + \frac{1}{2\alpha} F = \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \quad \psi_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}. \tag{21}$$

Підставимо ψ_3 в четверте рівняння системи (20), з якого після його розв'язання одержимо

$$G_1 = \frac{\partial A}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \frac{\partial \chi}{\partial x_1}, \quad F = -\frac{2\alpha}{2\alpha + 1} \frac{\partial A}{\partial x_3}, \quad G_2 = \frac{\partial A}{\partial x_1} - \frac{\partial Q}{\partial x_3} + \frac{\partial \chi}{\partial x_2}, \tag{22}$$

де Φ, Q, A, χ — чотири довільні гармонічні функції. Із другого і третього рівнянь системи (20) та другого рівняння у формулах (21) знаходимо

$$K = -\frac{\partial Q}{\partial x_2} - \frac{\partial \chi}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad \psi_1 = -\frac{\partial Q}{\partial x_3}, \quad \psi_3 = \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{1}{2\alpha + 1} \frac{\partial A}{\partial x_3}. \tag{23}$$

Підставимо функції (21) – (23) у зворотному порядку у співвідношення (19), (18) і знайдемо невідомі функціональні коефіцієнти B_{kj} :

$$\begin{gathered} B_{11} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad B_{12} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2}, \quad B_{13} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x_3^2}, \\ B_{21} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2^2}, \quad B_{22} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ B_{23} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2}, \quad B_{31} = b \frac{\partial^2 A}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ B_{32} = b \frac{\partial^2 A}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad B_{33} = b \frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right), \end{gathered} \tag{24}$$

де $b = \dfrac{1}{2\alpha + 1} = \dfrac{1}{3 - 4\nu}$. Безпосередньою перевіркою можна встановити, що функції B_{kj} задовольняють рівняння (12), (13).

Запишемо знайдені вектори пружних переміщень:

$$\mathbf{u} = x_3 \operatorname{grad} \frac{\partial Q}{\partial x_1} - x_1 \operatorname{grad} \frac{\partial Q}{\partial x_3}, \quad \mathbf{v} = x_2 \operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - x_3 \operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \tag{25}$$

для функцій Q, Φ і

$$\mathbf{w} = x_1 \operatorname{rot} \mathbf{k} \frac{\partial \chi}{\partial x_1} + x_2 \operatorname{rot} \mathbf{k} \frac{\partial \chi}{\partial x_2} + x_3 \operatorname{rot} \mathbf{k} \frac{\partial \chi}{\partial x_3} \tag{26}$$

для функції χ. Зазначимо, що поля переміщень (25), (26) задають нові розв'язки рівнянь Ляме. Ці гармонічні вектори переміщень мають нульову дивергенцію, отже, згідно з теоремою 1, їх (після перепозначення) можна записати у вигляді (4).

Тільки функція A задає бігармонічний вектор переміщень у вигляді

$$\mathbf{u} = \frac{x_3}{3-4\nu} \operatorname{grad} \frac{\partial A}{\partial x_3} + x_1 \operatorname{rot} \left(\mathbf{k} \frac{\partial A}{\partial x_2} \right) - x_2 \operatorname{rot} \left(\mathbf{k} \frac{\partial A}{\partial x_1} \right), \tag{27}$$

і його об'ємне розширення є відмінним від нуля. Вектор переміщень (27) з точністю до гармонічних розв'язків рівнянь Ляме можна записати у вигляді

$$\mathbf{u} = \frac{x_3}{3-4\nu} \operatorname{grad} \frac{\partial A}{\partial x_3} - \frac{\partial A}{\partial x_3} \mathbf{k}, \tag{28}$$

і після введення позначення $R = \dfrac{1}{3-4\nu} \dfrac{\partial A}{\partial x_3}$ він набере вигляду (8). Розв'язок (8) циклічною заміною змінних можна виразити ще у двох симетричних формах:

$$\mathbf{v} = x_2 \operatorname{grad} H - (3-4\nu) H \,\mathbf{j}, \tag{29}$$

$$\mathbf{w} = x_1 \operatorname{grad} G - (3-4\nu) G \,\mathbf{i}, \tag{30}$$

де H, G — довільні гармонічні вектори. Вектор переміщень (29) переходить із точністю до гармонічного вектора (4) у розв'язок (8), якщо вибрати функцію H з умови $\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = \dfrac{\partial R}{\partial x_3}$. Отже, вони є взаємозамінними з точністю до гармонічного вектора. Аналогічно, для розв'язку (30) потрібно покласти $\dfrac{\partial G}{\partial x_1} = \dfrac{\partial R}{\partial x_3}$.

Для подання (8) знайдемо об'ємне розширення

$$e = \operatorname{div} \mathbf{u} = -2(1-2\nu) \frac{\partial R}{\partial x_3}.$$

Зауважимо, що частинний поліномний розв'язок системи (3) задається формулою (8), де $R = -Cx_3/((1-2\nu)2)$.

Розглянемо довільний розв'язок рівнянь Ляме $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)$ з об'ємним розширенням e. Для цього розв'язку завжди можна підібрати гармонічну функцію

$$R = -\frac{1}{2(1-2\nu)} \int e(x_1, x_2, x_3)\, dx_3, \tag{31}$$

для якої вектор пружних переміщень, заданий формулою (8), має об'ємне розширення e. Віднімемо від вектора $\mathbf{v}$ переміщення, задані формулами (8), (31), і одержимо вектор пружних переміщень, який є розв'язком рівнянь Ляме і має нульову дивергенцію. Згідно з теоремою 1, його можна подати у вигляді (4).

Теорему доведено.

На підставі теорем 1 та 2 можна сформулювати загальну теорему.

Теорема 3. *Загальний розв'язок рівнянь Ляме має вигляд*

$$\mathbf{u} = x_3 \operatorname{grad} R - (3-4\nu) R\, \mathbf{k} + \operatorname{grad} \Psi + \operatorname{rot} Q\, \mathbf{k}, \tag{32}$$

де три гармонічні функції R, Ψ, Q є незалежними.

3. Криволінійна система координат. Знайдемо розв'язок рівнянь Ляме у криволінійній ортогональній системі координат $\xi_j(x_1, x_2, x_3)$, $j = \overline{1,3}$. Будемо вважати, що у введеній криволінійній і декартовій системах початок координат є спільним. Використаємо подання загального розв'язку рівнянь Ляме через гармонічні функції у декартовій системі координат. Оскільки вектор пружних переміщень знайдено у векторному інваріантному вигляді (32), то у криволінійній системі координат ξ_j його позначимо $\mathbf{u}_\xi$. Компоненти вектора пружних переміщень (32), згідно з формулами векторних перетворень [12], будуть мати вигляд

$$u_{\xi 1} = \frac{x_3}{h_1}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} - (3-4\nu)\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} h_1 \Phi + \frac{1}{h_1}\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_1} + \frac{1}{h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left[\frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} h_3^2 Q\right] - \frac{\partial}{\partial \xi_3}\left[\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} h_2^2 Q\right]\right\},$$

$$u_{\xi 2} = \frac{x_3}{h_2}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2} - (3-4\nu)\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} h_2 \Phi + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_2} + \frac{1}{h_1 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi_3}\left[\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} h_1^2 Q\right] - \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left[\frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} h_3^2 Q\right]\right\}, \tag{33}$$

$$u_{\xi 3} = \frac{x_3}{h_3}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_3} - (3-4\nu)\frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} h_3 \Phi + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_3} + \frac{1}{h_1 h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left[\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} h_2^2 Q\right] - \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left[\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} h_1^2 Q\right]\right\},$$

де $h_j = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \xi_j}\right)^2}$ — метричні коефіцієнти Ляме. Формули (33) явно задають розв'язок рівнянь Ляме у довільній ортогональній криволінійній системі координат через гармонічні функції. Зазначимо, що для побудови цього розв'язку не потрібно було записувати і розв'язувати рівняння Ляме у заданій криволінійній системі координат.

Висновки. Встановлено:

якщо вектор пружних переміщень має об'ємне розширення, що дорівнює нулю, то всі його компоненти залежать тільки від двох гармонічних функцій;

бігармонічний розв'язок рівнянь Ляме повністю визначається об'ємним розширенням;

існують тільки три незалежні функції у поданні розв'язку і вияснено їхню фізичну природу.

Знайдені подання вектора пружних переміщень дозволяють визначити напруження у пружному тілі. Наявність трьох незалежних гармонічних функцій дає змогу однозначно задовольнити три граничні умови на поверхні тривимірного тіла.

Одержано нові вирази для вектора пружних переміщень, які знайдуть застосування при розв'язуванні конкретних задач механіки деформівного твердого тіла у декартовій і криволінійній системах координат (циліндрична, еліптична, сферична та ін.).

1. *Новацкий В.* Теория упругости. — М.: Мир, 1975. — 872 с.
2. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. — М.: Наука, 1975. — 576 с.
3. *Папкович П. Ф.* Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции // Изв. АН СССР. Сер. мат. и естеств. наук. — 1932. — № 10. — С. 1425 – 1435.
4. *Neuber H.* Ein neuer Ansatz zur Lösung raämlicher Probleme der Elastizitätstheorie // Z. angew. Math. und Mech. — 1934. — **14**, № 4.
5. *Слободянский М. Г.* Общие формы решения уравнений упругости для односвязных и многосвязных областей, выраженные через гармонические функции // Прикл. математика и механика. — 1954. — **18**, № 1. — С. 55 – 74.
6. *Бородачев Н. М.* О построении точных решений трехмерных задач теории упругости в напряжениях // Прикл. механика. — 2002. — **37**, № 6. — С. 67 – 73.
7. *Крутков Ю. А.* Тензор функции напряжений и общие решения в статике теории упругости. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. — 200 с.
8. *Чуриков Ф. С.* Об одной форме общего решения уравнений равновесия теории упругости в перемещениях // Прикл. математика и механика. — 1953. — **17**, № 6. — С. 751 – 754.
9. *Березюк Т. Б., Григоренко А. Я., Дыяк И. И.* Решение задачи о напряженном состоянии цилиндра конечной длины методом Шварца с использованием гибридных аппроксимаций // Прикл. механика. — 2003. — **39**, № 10. — С. 69 – 74.
10. *Гузь А. Н.* О расчетных схемах в линеаризированной механике деформируемых тел // Там же. — 2004. — **40**, № 5. — С. 30 – 47.
11. *Улитко А. Ф.* Векторные разложения в пространственной теории упругости. — Киев: Академпериодика, 2002. — 342 с.
12. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. — М.: Наука, 1974. — 831 с.

Одержано 25.08.2004