

УДК 517.946

МЕТОД ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ В ЗАДАЧЕ
О ФОРМАХ НАГРУЖЕННОГО ТОНКОГО СТЕРЖНЯ*

А.Д. Мышкис

Моск. ин-т инженеров ж.-д. трансп.,
Россия, 103055, Москва, ул. Образцова, 15
e-mail: anatol.myshkis@miemsti.msk.su

Plane equal-weight forms of a thin bar under various external loadings have been studied by the phase-area method as well as the conditions of their stability have been obtained.

Методом фазової площини досліджені плоскі рівноважні форми тонкого стрижня при різних зовнішніх навантаженнях і знайдені умови їх стійкості.

Введение. В настоящей статье рассматриваются плоские равновесные формы предварительно искривленного стержня, жестко закрепленного в одном из концов либо замкнутого, под действием внешней силы. Стержень считается тонким, т. е. работающим только на изгиб и допускающим истолкование как материальная линия. Изменения формы стержня, вызванные нагрузкой, вообще говоря, не малы, но изгибная жесткость в каждой его точке считается постоянной (выполнен „изгибный закон Гука”).

Отдельные задачи такого рода решались аналитически и численно в курсах теории упругости и строительной механики (см., например, [1], §19 и [2], §10.2). Задача о малых плоских изгибных колебаниях стержня, изогнутого по дуге круга, рассмотрена в работе [3]; общая задача о немалых и малых плоских изгибных колебаниях предварительно изогнутого стержня исследуется в работе [4].

Здесь мы покажем, как при нагрузке простого вида можно в отдельных случаях применить к описанию равновесных форм и выяснению их устойчивости метод фазовой плоскости на основе энергетического подхода. Некоторые ситуации (следящая нагрузка, изгиб спирали Корню и др.), по-видимому, рассматриваются впервые.

1. Разомкнутый стержень. Общий случай. Рассмотрим сначала общий случай произвольного предварительного искривления стержня и произвольного потенциального поля внешних сил.

Пусть конец $s = 0$ стержня жестко зажат, а другой конец $s = l$ свободен (s — длина дуги стержня). Выберем начало координат в закрепленном конце, ось Ox по направлению стержня в этом конце, ось Oy — в плоскости стержня. Обозначим через $\alpha(s)$ угол поворота касательной к стержню в его свободном равновесном положении от точки $s = 0$ до точки с любым значением s , через $\bar{\alpha}(s)$ — аналогичный угол при нагруженном равновесии, через $\mu(s) > 0$ — изгибную жесткость стержня в точке s . Тогда координаты

*Выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95-01-00731а) и Внебюджетного фонда НИОКР МПС РФ.

точки s стержня при нагруженном равновесии равны

$$x(s) = \int_0^s \cos \alpha(\sigma) d\sigma, \quad y(s) = \int_0^s \sin \alpha(\sigma) d\sigma. \quad (1)$$

Все задаваемые функции будем считать дважды непрерывно дифференцируемыми. У стержня допускаются точки самопересечения, в которых его гладкие пересекающиеся дуги не взаимодействуют.

Пусть на точку s_i , $i = 1, \dots, N$, стержня действует внешняя сила $-\text{grad } U_i(x, y)$ и, кроме того, на элемент $(s, s+ds)$ стержня действует элемент распределенной силы, равный $-\text{grad } u(x, y, s) ds$. Записывая выражение для потенциальной энергии U нагруженного стержня и вычисляя δU , после простых преобразований получаем условия стационарности U , т.е. условия равновесия нагруженного стержня в виде интегро-дифференциального уравнения

$$-\{\mu(s)[\alpha'(s) - \bar{\alpha}'(s)]\}' + \sum_i [-U'_{ix}(x(s_i), y(s_i)) \sin \alpha(s) + U'_{iy}(\dots) \cos \alpha(s)] H(s_i - s) + \\ + \int_s^l [-u'_x(x(\sigma), y(\sigma), \sigma) \sin \alpha(s) + u'_y(\dots) \cos \alpha(s)] d\sigma = 0, \quad 0 \leq s \leq l, \quad (2)$$

и соответствующих краевых условий

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha'(l) = \bar{\alpha}'(l); \quad (3)$$

здесь штрих означает дифференцирование, $x(s_i)$ и $y(s_i)$ определены формулами (1), H — единичная функция Хевисайда, а аргументы, очевидные из контекста, заменены многоточиями. Из уравнения (2) видно, в частности, что в точке $s_i \in (0, l)$ функция α'' имеет скачок:

$$\alpha''(s_i^+) - \alpha''(s_i^-) = [U'_{ix}(x(s_i), y(s_i)) \sin \alpha(s_i) - U'_{iy}(\dots) \cos \alpha(s_i)] / \mu(s_i). \quad (4)$$

Считаем равенства (2) и (3) выполненными, после элементарных преобразований получаем

$$\delta^2 U = \int_0^l \mu(s) [\delta \alpha'(s)]^2 ds + \sum_l \left\{ U''_{ixx}(x(s_i), y(s_i)) \left[\int_0^{s_i} \sin \alpha(s) \delta \alpha(s) ds \right]^2 - \right. \\ \left. - 2U''_{ixy}(\dots) \int_0^{s_i} \sin \alpha(s) \delta \alpha(s) ds \int_0^{s_i} \cos \alpha(s) \delta \alpha(s) ds + U''_{iyy}(\dots) \left[\int_0^{s_i} \cos \alpha(s) \delta \alpha(s) ds \right]^2 - \right. \\ \left. - \int_0^{s_i} [U'_{ix}(x(s_i), y(s_i)) \cos \alpha(s) + U'_{iy}(\dots) \sin \alpha(s)] [\delta \alpha(s)]^2 ds \right\} + \\ + \int_0^l \int_0^l \left[\int_{\max\{s, \sigma\}}^l u''_{xx}(x(\sigma_1), y(\sigma_1), \sigma_1) d\sigma_1 \right] \sin \alpha(s) \sin \alpha(\sigma) \delta \alpha(s) \delta \alpha(\sigma) ds d\sigma -$$

$$\begin{aligned}
& -2 \int_0^l \int_0^l \left[\int_{\max\{s,\sigma\}}^l u''_{xy}(\dots) d\sigma_1 \right] \sin \alpha(s) \cos \alpha(\sigma) \delta \alpha(s) \delta \alpha(\sigma) ds d\sigma + \\
& + \int_0^l \int_0^l \left[\int_{\max\{s,\sigma\}}^l u''_{yy}(\dots) d\sigma_1 \right] \cos \alpha(s) \cos \alpha(\sigma) \delta \alpha(s) \delta \alpha(\sigma) ds d\sigma - \\
& - \int_0^l \left[\cos \alpha(s) \int_s^l u'_x(x(\sigma), y(\sigma), \sigma) d\sigma + \sin \alpha(s) \int_s^l u'_y(\dots) d\sigma \right] [\delta \alpha(s)]^2 ds. \quad (5)
\end{aligned}$$

Эта формула существенно упрощается, если внешние силовые поля однородны, т.е. при любом положении стержня на точку s_i действует постоянная сила (F_{x_i}, F_{y_i}) , а на его элемент ds — сила $(p_x(s), p_y(s)) ds$. Тогда уравнение (2) и равенства (4), (5) принимают соответственно вид

$$\begin{aligned}
& -\{\mu(s)[\alpha'(s) - \bar{\alpha}'(s)]\}' + \sum_i [F_{x_i} \sin \alpha(s) - F_{y_i} \cos \alpha(s)] H(s_i - s) + \int_s^l [p_x(\sigma) \sin \alpha(s) - \\
& - p_y(\sigma) \cos \alpha(s)] d\sigma = 0, \quad \alpha''(s_i^+) - \alpha''(s_i^-) = [F_{y_i} \cos \alpha(s_i) - F_{x_i} \sin \alpha(s_i)] / \mu(s_i), \\
& \delta^2 U = \int_0^l \mu(s) [\delta \alpha'(s)]^2 ds + \sum_i \int_0^{s_i} [F_{x_i} \cos \alpha(s) + F_{y_i} \sin \alpha(s)] [\delta \alpha(s)]^2 ds + \\
& + \int_0^l \left[\cos \alpha(s) \int_0^l p_x(\sigma) d\sigma + \sin \alpha(s) \int_0^l p_y(\sigma) d\sigma \right] [\delta \alpha(s)]^2 ds. \quad (6)
\end{aligned}$$

Для выяснения знака $\delta^2 U$, т.е. характера стационарного значения U для найденной равновесной формы, необходимо рассмотреть решение φ задачи Коши

$$\begin{aligned}
& [\mu(s)\varphi'(s)]' - \left\{ \sum_i [F_{x_i} \cos \alpha(s) + F_{y_i} \sin \alpha(s)] H(s_i - s) + \cos \alpha(s) \int_0^l p_x(\sigma) d\sigma + \right. \\
& \left. + \sin \alpha(s) \int_s^l p_y(\sigma) d\sigma \right\} \varphi(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq l, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) > 0, \quad (7)
\end{aligned}$$

где α — решение задачи (6), (3). Если $\min_{[0,l]} \{\varphi'(s)\} > 0$ (< 0), то U для этой формы имеет сильный минимум (соответственно максимум), т.е. она устойчивая (соответственно неустойчивая). Отсюда, в частности, следует, что если

$$\begin{aligned}
& \sum_i [F_{x_i} \cos \alpha(s) + F_{y_i} \sin \alpha(s)] H(s_i - s) + \cos \alpha(s) \int_0^l p_x(\sigma) d\sigma + \\
& + \sin \alpha(s) \int_s^l p_y(\sigma) d\sigma \geq 0, \quad 0 \leq s \leq l,
\end{aligned}$$

то рассматриваемое положение равновесия устойчивое.

2. Применение фазовой плоскости. Для возможности изображения всех решений уравнения (6) на фазовой плоскости (α, α') (s играет роль времени) необходимо и достаточно, чтобы оно было автономным, т.е. $\mu(s) = \mu = \text{const}$, $\bar{\mu}''(s) = \text{const}$, а внешняя сила (F_x, F_y) была приложена только к концу $s = l$ стержня. Обозначая $(\gamma_x, \gamma_y) := (F_x, F_y)/\mu$, видим, что такое изображение возможно в следующих случаях (и только в них):

1) $\bar{\alpha}(s) = 0$ (изгибание прямолинейного отрезка); краевая задача (6), (3) имеет вид

$$\alpha''(s) + \gamma \sin[\alpha(s) - \psi] = 0, \quad 0 \leq s \leq l, \quad \alpha(0) = 0, \quad \alpha'(l) = 0, \quad (8)$$

где

$$\gamma := (\gamma_x^2 + \gamma_y^2)^{1/2}, \quad \cos \psi = -\gamma_x/\gamma, \quad \sin \psi = -\gamma_y/\gamma, \quad -\pi < \psi \leq \pi;$$

2) $\bar{\alpha}'(s) = k \neq 0$ (изгибание дуги окружности); получаем задачу

$$\alpha''(s) + \gamma \sin[\alpha(s) - \psi] = 0, \quad 0 \leq s \leq l, \quad \alpha(0) = 0, \quad \alpha'(l) = k; \quad (9)$$

3) $\bar{\alpha}''(s) = h \neq 0$ (изгибание дуги спирали Корню); здесь

$$\alpha''(s) + \gamma \sin[\alpha(s) - \psi] = h, \quad 0 \leq s \leq l, \quad \alpha(0) = 0, \quad \alpha'(l) = hl + \bar{\alpha}'(0). \quad (10)$$

Задача Коши (7) во всех этих случаях имеет вид

$$\varphi''(s) + \gamma \{ \cos[\alpha(s) - \psi] \} \varphi(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq l, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) > 0. \quad (11)$$

Для упрощения дальнейших выкладок перейдем к безразмерной длине дуги стержня $\xi := \gamma^{1/2}s$ и будем рассматривать α и φ как функции от ξ ; введем также обозначения $\lambda := \gamma^{1/2}l$ (безразмерная длина стержня), $\kappa := \gamma^{-1/2}k$ (безразмерная кривизна окружности), $\eta := h/\gamma$. Тогда задачи (8) – (11) примут соответственно вид

$$\alpha''(\xi) + \sin[\alpha(\xi) - \psi] = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \lambda, \quad \alpha(0) = 0, \quad \alpha'(\lambda) = 0, \quad (12)$$

$$\alpha''(\xi) + \sin[\alpha(\xi) - \psi] = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \lambda, \quad \alpha(0) = 0, \quad \alpha'(\lambda) = \kappa, \quad (13)$$

$$\alpha''(\xi) + \sin[\alpha(\xi) - \psi] = \eta, \quad 0 \leq \xi \leq \lambda, \quad \alpha(0) = 0, \quad \alpha(\lambda) = \eta\lambda + \gamma^{-1/2}\bar{\alpha}'(0), \quad (14)$$

$$\varphi''(\xi) + \{ \cos[\alpha(\xi) - \psi] \} \varphi(\xi) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \lambda, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) > 0. \quad (15)$$

3. Изгибание прямолинейного отрезка. Уравнение в задаче (12), с точностью до изменившегося смысла аргумента и сдвига по оси α , это хорошо известное уравнение колебаний маятника (см., например, [5]). Его фазовый портрет показан на рис. 1; сепаратриса имеет уравнение: $\alpha' = \pm 2 \cos [(\alpha - \psi)/2]$. Фазовые траектории, расположенные внутри (вне) сепаратрисы, назовем имеющими колебательный (соответственно вращательный) тип. Дугам фазовых траекторий этих типов достаточно большой протяженности отвечают равновесные формы стержня с многими перегибами или, соответственно, с многими витками, как у укороченной и удлиненной циклоид.

Для выбора фазовой траектории, изображающей равновесную форму, заметим, что, согласно краевым условиям из (12), она должна начинаться на оси α' и заканчиваться на оси α . Поэтому при рассмотрении изгибания прямолинейного стержня применяются

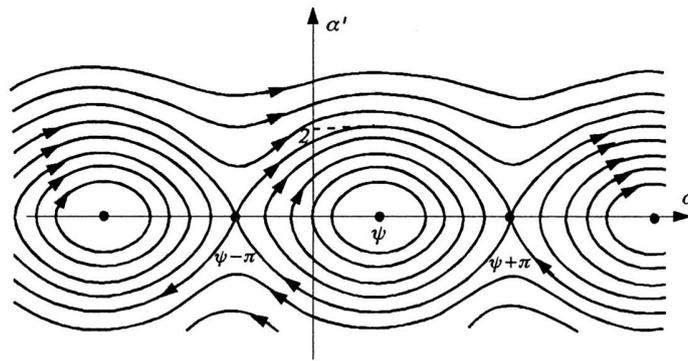


Рис. 1

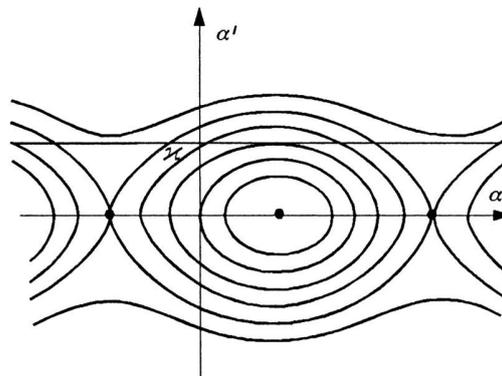


Рис. 2

только фазовые траектории вращательного типа. Наиболее прост случай $\psi = \pi$ (растяжение стержня): здесь траекторией при любом λ может быть только точка покоя, т. е. $\alpha(\xi) \equiv 0$, стержень не изгибается. Нетрудно проверить, что такое положение всегда устойчивое.

Большее разнообразие представляет случай $\psi = 0$ (сжатие стержня). Здесь, прежде всего, при любом λ траекторией может быть точка покоя (стержень не изогнут); из (15) легко следует, что такая равновесная форма единственна и устойчива, только если $\lambda < \pi/2$ (это известный критерий Эйлера). Если λ , возрастая, переходит через значение $\pi/2$, то от прямолинейной формы ответвляются две равновесные формы, для которых имеются точки перегиба, а траектории на фазовой плоскости делают $1/4$ оборота вокруг начала координат и с ростом λ безгранично монотонно приближаются к сепаратрисе. Если λ переходит через значение $3\pi/2$, то от прямолинейной формы ответвляются еще две равновесные формы, для которых имеется одна точка перегиба, а фазовые траектории делают $3/4$ оборота вокруг начала координат и с ростом λ также уходят к сепаратрисе и т. д. Критические значения $\lambda = \lambda_k = (2k - 1) \pi/2, k = 1, 2, \dots$, так что при $\lambda_k < \lambda \leq \lambda_{k+1}$ имеется $2k + 1$ равновесных форм; ответвляющиеся формы, соответствующие значению $\lambda = \lambda_k(1 + \varepsilon^2), 0 < \varepsilon \leq 1$, имеют уравнение

$$\alpha = \pm[4\varepsilon \sin \xi + \varepsilon^3(3^{-1} \sin 3\xi - 4\xi \cos \xi) + O(\varepsilon^5)].$$

Разложение решения задачи (15) по степеням ε показывает, что ответвляющиеся решения

при $k = 1$ устойчивы, а при $k > 1$ неустойчивы.

Если $\psi \neq 0$, т.е. $F_y \neq 0$, то прямолинейная равновесная форма невозможна. Пусть, например, $\psi \in (0, \pi/2)$ (см. рис. 1), т.е. сила F направлена „налево вниз”. В этом случае траектории, изображающие равновесные формы, могут быть вида ab , cd , $abcd$, $cdab$, $abcdab$ и т. д. Формы первого вида возможны при любых значениях λ , тогда как формы остальных видов — с повторяющимися перегибами — только при всех достаточно больших значениях λ . По аналогии со случаем $\psi = 0$ можно предполагать, что формы первого и второго вида устойчивы, а остальных видов — неустойчивы, однако доказательством этого мы не располагаем.

4. Изгибание дуги окружности. Это изгибание отличается от изгибания прямолинейного стержня тем, что в силу (13) отрезок траектории на той же фазовой плоскости, что и в п. 3, начинаясь на оси α' , должен заканчиваться на прямой $\alpha' = \kappa$ (рис. 2). Для определенности будем считать, что $\kappa > 0$ (случай $\kappa < 0$ сводится к рассматриваемому с помощью зеркального отражения). Отметим, что недеформированная дуга окружности может иметь любой центральный угол, в том числе и больший 2π .

Как и в п. 3, наиболее проста ситуация при $\psi = \pi$, поскольку она описывается только фазовыми траекториями вращательного типа. Если при этом $\kappa \leq 2$, то, прежде всего, при любом λ возможна равновесная форма с кривизной, возрастающей вдоль стержня; по-видимому, такие формы устойчивы. (В частности, при достаточно большом λ такая форма получается, если стержень, первоначально обернутый многократно вокруг кольца как нить на катушке, под действием внешней силы почти полностью развернулся.) Имеются также формы, отвечающие продолженным участкам фазовых траекторий; для этих форм кривизна положительна, но не монотонна, тогда как направление стержня меняется монотонно, так что стержень может иметь какое угодно большое число витков. Если же $\kappa > 2$, то ситуация в целом такая же, но значения λ для равновесных форм с монотонно изменяющейся кривизной ограничены сверху; это справедливо и при любом ψ , но тогда монотонность изменения кривизны не обязательно означает ее возрастание.

Если $k < 2$ и $\varphi \neq \pi$, то равновесные формы описываются фазовыми траекториями обоих типов, а также сепаратрисой. Можно проверить, что при $0 \leq \psi < \pi$ равновесные формы с монотонно изменяющейся кривизной существуют для любого λ , тогда как при $-\pi < \psi < 0$ множество значений λ , для которых такие формы существуют, ограничено сверху. При продолжении фазовых траекторий возникают как равновесные формы с перегибами (п. 3), так и формы с витками (см. выше).

5. Изгибание дуги спирали Корню. Без ограничения общности будем считать, что $\eta > 0$, причем сначала примем $\eta < 1$. Соответствующий фазовый портрет изображен на рис. 3; он периодичен по α с периодом 2π . Как видим, здесь имеются замкнутые траектории колебательного типа, расположенные внутри петли сепаратрисы. Нетрудно проверить, что наибольшее значение α' для этой петли таково:

$$\alpha'_{\max} = 2[(1 - \eta^2)^{1/2} - \eta \arccos \eta]^{1/2}.$$

Имеются и траектории вращательного типа, симметричные относительно оси α ; для них $\alpha \rightarrow \infty$ и $\alpha' \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow \infty$. Наконец, имеются точки покоя на оси α , определяемые уравнением $\sin(\alpha - \psi) = \eta$.

Согласно краевым условиям из (14), дуга фазовой траектории, изображающая равновесную форму, должна начинаться на оси α и заканчиваться на прямой $\alpha' = \eta\lambda + \gamma^{-1/2} \times \alpha'(0)$ ($= \gamma^{-1/2} \bar{\alpha}'(l)$). Отсюда, в частности, следует, что если внешняя сила приложена к

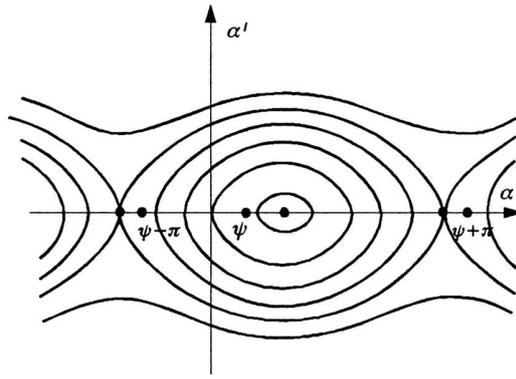


Рис. 3

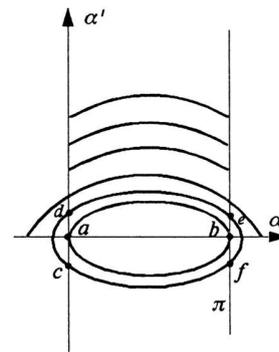


Рис. 4

точке перегиба спирали (т.е. $\bar{\alpha}'(l) = 0$) и подобрана так, что $\sin \psi = -\eta$, то упомянутая дуга может вырождаться в точку покоя, т.е. равновесная форма окажется прямолинейной — дуга спирали полностью разогнется. Исследование задачи (15) показывает, что при $F_x > 0$ эта форма всегда устойчива, а при $F_x < 0$ — устойчива (неустойчива), если $\lambda < \pi/[2(1-\eta^2)^{1/2}]$ (соответственно $\lambda > \pi/[2(1-\eta^2)^{1/2}]$).

Из рис. 3 видно, что при изгибании дуги спирали Корню могут появиться равновесные формы всех видов, указанных в пп. 3, 4. Отличие заключается в том, что у форм, порожденных достаточно длинными дугами траекторий вращательного типа, кривизна, по крайней мере, у одного конца становится как угодно большой, как у длинной дуги спирали Корню; кроме того, в отличие от изложенного в п. 4, такая форма может иметь точку перегиба.

Если $\eta > 1$, т.е. внешняя сила сравнительно мала, то все фазовые траектории — вращательного типа. В этом случае кривизна нагруженного стержня является возрастающей функцией s и равновесные формы таковы, как указано выше.

6. Следящая нагрузка. Рассмотрим задачу, в которой внешняя нагрузка, как и выше, приложена к свободному концу зажатого стержня, но не задана заранее, а определяется формой нагруженного стержня. Такая система, вообще говоря, не является потенциальной и потому рассмотрения п. 1 к ней неприменимы. Однако каждое ее положение равновесия (если оно имеется), при котором внешняя сила равна некоторому значению F_0 , одновременно является положением равновесия системы с заданным значением F_0 . Поэтому, если обозначить через $N(F_0)$ множество равновесных форм стержня при заданном значении F_0 внешней силы, а через $f(m)$ следящую нагрузку, отвечающую форме m стержня, отыскание равновесных форм при следящей нагрузке равносильно решению включения $F_0 \in f(N(F_0))$. Мы не будем рассматривать его в общем виде, а ограничимся двумя примерами.

Пусть стержень, имеющий в ненагруженном состоянии вид прямолинейного отрезка или дуги окружности, изгибается под действием внешней силы, заданной по модулю и направленной под углом 90° к концу стержня. Здесь построение равновесной формы сводится к решению краевой задачи

$$\alpha''(\xi) + \sin[\alpha(\xi) - \psi] = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \lambda, \quad \alpha(0) = 0, \quad \alpha'(\lambda) = \kappa(\geq 0), \quad \psi = \alpha(\lambda) - (\pi/2)$$

(т.е. ψ заранее не задана). Ее можно решить итерациями, положив

$$\alpha''_{k+1}(\xi) + \sin[\alpha_{k+1}(\xi) - \alpha_k(\lambda) + (\pi/2)] = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \lambda,$$

$$\alpha_{k+1}(0) = 0, \quad \alpha'_{k+1}(\lambda) = \varkappa, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $\alpha_0(\lambda) = \bar{\alpha}(l)$. Этот итерационный процесс имеет простую физическую интерпретацию (последовательное подгибание стержня).

Естественно ожидать, что процесс является сходящимся, а полученное решение устойчиво (во всяком случае, если λ не слишком велико), хотя понятие устойчивости и ее признаки требуют уточнения.

В качестве другого примера рассмотрим следящую внешнюю силу, имеющую заданный модуль и направленную по внутренней касательной к стержню, первоначально прямолинейному. Здесь $\alpha'(\lambda) = 0$, $\alpha(\lambda) = \psi - \pi$. Из рис. 1 видно, что $\alpha(\xi) \equiv 0$, т.е. возможна только прямолинейная равновесная форма. Но в п. 3 мы показали, что при $\lambda > \pi/2$ эта форма неустойчива. Таким образом, при $\lambda > \pi/2$ устойчивое решение задачи с такой следящей нагрузкой, по-видимому, не существует.

7. Изгибание окружности. Пусть к однородному стержню, имеющему в недеформированном состоянии вид окружности длины $2l$, приложены в точке $s = 0$ сила $-F$, а в точке $s = l$ сила F . Будем рассматривать только его формы, симметричные относительно прямой Π , проходящей через эти точки.

В этом случае выражение для потенциальной энергии принимает вид

$$U = \mu \int_0^l [\alpha'(s) - k]^2 ds - F \left[\int_0^l \sin \alpha(s) ds - (2l/\pi) \right], \quad k := \pi/l. \quad (16)$$

При варьировании U надо иметь в виду, что помимо условий $\delta\alpha(0) = \delta\alpha(l) = 0$ должно также выполняться равенство $\int_0^l \cos \alpha(s) ds = 0$. Поэтому условие стационарности U приводит после перехода к безразмерным величинам к краевой задаче

$$\begin{aligned} \alpha''(\xi) + (\operatorname{sgn} F/2) \cos \alpha(\xi) + \nu \sin \alpha(\xi) &= 0, \quad 0 \leq \xi \leq \lambda, \quad \alpha(0) = 0, \quad \alpha(\lambda) = \pi, \\ \int_0^\lambda \cos \alpha(\xi) d\xi &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где ν — добавочная неизвестная постоянная (множитель Лагранжа).

Фазовый портрет для уравнения в (17) отличается от изображенного на рис. 1 только масштабом по оси α' ; положение начала координат (т. е. значение ψ) определяется значениями F и ν .

Пусть $F > 0$; тогда $-\pi < \psi < 0$. Из второго и третьего равенств из (17) следует, что дуга D траектории, определяющая равновесную форму, имеет вращательный тип, а потому для нее $\alpha'(\xi) > 0$. Переписывая последнее равенство из (17) в виде $\int_0^\pi \alpha' \cos \alpha d\alpha = 0$, получаем, что дуга D симметрична, т. е. $\psi = -\pi/2$. Нетрудно проверить, что при любом значении λ существует ровно одна дуга D , т.е. при любых заданных значениях внешней силы и параметров стержня существует ровно одна его равновесная форма; поэтому она устойчива.

Пусть теперь $F < 0$; тогда $0 < \psi < \pi$. Как и выше, получаем, что если λ достаточно мало, то $\psi = \pi/2$, т. е. дуга D симметрична и единственна, а значит, равновесная форма стержня единственна и имеет две оси симметрии. Эта дуга с ростом λ монотонно снижается, пока при

$$\lambda = \lambda_{кр} := \int_0^{\pi/2} \cos^{-1/2} \alpha d\alpha = \pi/2 (= 2, 221)$$

она не достигнет положения ab (рис. 4); для соответствующей равновесной формы стержня его кривизна в точках приложения сил равна нулю.

После перехода λ через $\lambda_{кр}$ наряду с дугой вида $cdef$ (см. рис. 4), которой соответствует равновесная форма стержня с двумя осями симметрии и отрицательной кривизной вблизи точек приложения сил, возникают две симметричные друг другу формы (им соответствуют дуги cde и def), имеющие единственную ось симметрии Π ; для этих форм стержень оказывается вогнутым лишь с одной стороны. Таким образом, при $\lambda = \lambda_{кр}$ происходит бифуркация — ветвление равновесных форм. На основании общих соображений (сохранение индекса) естественно ожидать, что при $\lambda > \lambda_{кр}$ форма с двумя осями симметрии неустойчива, тогда как обе ответвившиеся от нее формы устойчивы. При дальнейшем увеличении λ до ∞ все три дуги характеристик, соответствующие равновесным формам, монотонно стремятся к сепаратрисе.

Любопытно, что при больших значениях λ имеются и другие равновесные формы. Так, при $\lambda > 3\lambda_{кр}$ возникают три формы, определенные дугами вида $cdefcdef$, $cdefcde$ и $defcdef$, которые при $\lambda \rightarrow 3\lambda_{кр}^+$ сливаются и затем исчезают, а при $\lambda \rightarrow \infty$ также стремятся к сепаратрисе; при $\lambda > 5\lambda_{кр}$ возникают еще три формы и т. д. Ветви этих троек форм изолированы друг от друга и все эти формы неустойчивы.

В заключение отметим, что результаты настоящего пункта остаются справедливыми (хотя выражение (16) изменится), если кольцевой стержень в исходном состоянии имел некоторый постоянный „изгибный натяг” — например, если он был свернут в кольцо из первоначально прямолинейной формы.

8. Малые внешние силы. При малых внешних силах равновесную форму разомкнутого или замкнутого стержня можно получить методом малого параметра. Покажем это на примере изгиба стержня, имеющего первоначально вид дуги окружности и закрепленного с одного конца, с помощью малой силы, приложенной к другому концу, как в п. 4. Будем применять размерные величины, т.е. рассматривать краевую задачу (9), считая γ малым параметром. Исходя из разложения

$$\alpha(s) = ks + \gamma\alpha_1(s) + \gamma^2\alpha_2(s) + \dots, \quad 0 \leq s \leq l,$$

получаем краевые задачи для α_1 и α_2 :

$$\alpha_1''(s) + \sin(ks - \psi) = 0, \quad 0 \leq s \leq l, \quad \alpha_1(0) = 0, \quad \alpha_1'(l) = 0,$$

$$\alpha_2''(s) + \alpha_1(s) \cos(ks - \psi) = 0, \quad 0 \leq s \leq l, \quad \alpha_2(0) = 0, \quad \alpha_2'(l) = 0,$$

откуда легко найти эти функции. Ограничимся для простоты случаем $\psi = 0$ (т.е. сила направлена в точности налево). Тогда имеем

$$\alpha(s) = ks + (\gamma/k^2)(\sin ks - ks \cos kl) + (\gamma^2/8k^4)(\sin 2ks - 6ks \cos 2kl -$$

$$-8ks \cos kl \cos ks + 16 \cos kl \sin ks - 4k^2 l s \sin 2kl - 4ks) + O(\gamma^3). \quad (18)$$

Выясним направление перемещения точки приложения силы. Из первой формулы (1) и из (18) следует

$$\begin{aligned} \Delta x &= \int_0^l \cos \alpha(s) ds - \int_0^l \cos \alpha(s) ds = -\gamma \int_0^l \alpha_1(s) \sin ks ds + O(\gamma^2) = \\ &= -(\gamma/4k^3)(4p + 2p \cos 2p - 3 \sin 2p + O(\gamma^2)) \quad p := kl. \end{aligned}$$

Элементарное исследование функции от p , стоящей в скобках в правой части, показывает, что она положительна при всех $p > 0$. Таким образом, точка приложения малой силы смещается в левую сторону, что вполне естественно.

Аналогично получаем

$$\Delta y = (\gamma/4k^3)(4 \cos p - 1 - 3 \cos 2p - 2p \sin 2p) + O(\gamma^2).$$

Исследование функции от p , стоящей в скобках в правой части, показывает, что она имеет последовательность неотрицательных нулей $0 < p_1 < p_2 < \dots$, причем на первом интервале между нулями она положительна, а на последующих интервалах ее знаки чередуются. Таким образом, точка приложения малой силы при $0 < kl < p_1$ смещается вверх, при $p_1 < kl < p_2$ — вниз и т.д.; отметим, что kl — это угловая мера дуги, форму которой имел ненагруженный стержень. Нетрудно получить асимптотическую формулу для $k \rightarrow \infty$:

$$p_k = (\pi/2)(k+1) - (1/2k\pi)\{3 - (-1)^k - \cos[(k+1)(\pi/2)]\} + O(1/k^2).$$

При подсчете находим значения $p_1 = 2,4705$ и $p_2 = 4,6251$, что соответствует углам в 142° и 236° .

1. Ландау Л.Д. Теория упругости. — 3-е изд. — М.: Наука, 1965.
2. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. — 8-е изд. — М.: Высш. шк., 1986.
3. Демидович Б.П. Колебания стержня, изогнутого по дуге круга //Инж. сб. — 1949. — 5, №2. — С. 112–132.
4. Гиоргадзе М.Г., Мышкис А.Д. Плоские изгибные колебания искривленного стержня //Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1993. — 33, №9. — С. 1368–1376.
5. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. — 2-е изд. — М.: Наука, 1959.

Получено 25.01.98