УДК 517.9

ПРО ТОЧКОВИЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА З δ-ПОТЕНЦІАЛАМИ У ВЕРШИНАХ ПРАВИЛЬНИХ БАГАТОГРАННИКІВ*

М. Є. Дудкін

Нац. тех. ун-т України „КПІ”
Україна, 02057, Київ, пр. Перемоги, 37

In the case where the Laplace operator in $\mathbb{R}^3$ is perturbed with δ-potentials located at vertices of a regular polygon, we find exact criteria, which include the distances between the perturbation centers and the link constant, for the Laplace operator to have point spectrum.

Обчислено точні критерії існування точкового спектра оператора Лапласа в $\mathbb{R}^3$, збуреного δ-потенціалами, що зосереджені у вершинах правильних багатогранників, у залежності від відстані між центрами збурень і константою зв'язку.

Вступ. Майже століття відомі фізичні моделі, в яких розглядались потенціали нульового радіуса (див., наприклад, роботи Є. Фермі (1933)). Точний математичний сенс оператора Лапласа, збуреного δ-потенціалами, вперше визначили Ф. А. Березін, Р. А. Мінлос, Л. Д. Фаддєєв (1961, 1962). З того часу наука про збурення оператора сингулярними потенціалами набула широкого розвитку. До 1991 року найбільш повну бібліографію із зазначеної тематики можна знайти в монографії С. Альбеверіо (зі співавторами) [1]. В абстрактному вигляді цю науку розвинув і детально дослідив В. Д. Кошманенко [2].

Дана робота торкається проблеми дослідження точкового спектра оператора Лапласа, збуреного δ-функціями, що зосереджені у вершинах правильних багатогранників. Виявляється, що у такому випадку можна отримати деякі загальні властивості спектра збуреного оператора.

Попередні відомості. Будемо використовувати позначення, введені в [1].

Розглянемо модель, задану формальним виразом

$$-\tilde{\Delta}_{\mathbf{a},\mathbf{Y}} = -\Delta + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \delta(x - y_j),\ N < \infty, \tag{1}$$

де через $-\Delta$ позначено оператор Лапласа, визначений у $L_2(\mathbb{R}^3, dx)$, $\delta(x - y_j)$ – δ-функції Дірака, зосереджені на точковій множині $\mathbf{Y} := \{y_j\}_{j=1}^N$, $y_j \in \mathbb{R}^3$, і $\mathbf{a} := \{\alpha_j\}_{j=1}^N$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, – відповідні константи зв'язку [1].

Формальний вираз (1) можна записати за допомогою резольвент [1]:

$$(-\tilde{\Delta}_{\mathbf{a},\mathbf{Y}} - k^2)^{-1} = (-\Delta - k^2)^{-1} + \sum_{j,j'=1}^{N} [\Gamma_{\mathbf{a},\mathbf{Y}}(k)]^{-1}_{j,j'} (G_k(\cdot - y_{j'}), \cdot) G_k(\cdot - y_j), \tag{2}$$

* Частково підтримано проектами INTAS N 00-257, DFG 436 UKR 113/53, DFG 436 UKR 113/67.

де $\mathrm{Im}(k) > 0$, $G_k(x-x') = \dfrac{e^{ik|x-x'|}}{4\pi|x-x'|}$, $x, x' \in \mathbb{R}^3$, $\Gamma_{\mathbf{a},\mathbf{Y}}(k) = \Big[\Big(\alpha_j - \dfrac{ik}{4\pi}\Big)\delta_{j,j'} - \tilde{G}_k(y_j - -y_{j'})\Big]_{j,j'=1}^{N}$ — матриця, в якій $\tilde{G}_k(d) = \begin{cases} G_k(d), & d \neq 0; \\ 0, & d = 0, \end{cases}$ $\delta_{j,j'}$ — символ Кронекера.

У цій роботі досліджується задача на власні значення для збуреного оператора $-\tilde{\Delta}_{\mathbf{a},\mathbf{Y}}$, тобто

$$-\tilde{\Delta}_{\mathbf{a},\mathbf{Y}}\psi = \lambda\psi, \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \psi \in L_2(\mathbb{R}^3, dx). \tag{3}$$

Під дослідженням розуміється встановлення існування, кількості та кратності від'ємних власних значень збуреного оператора. Оскільки власні значення оператора $-\tilde{\Delta}_{\mathbf{a},\mathbf{Y}}$ є полюсами його резольвенти і, відповідно, нулями визначника матриці $\Gamma_{\mathbf{a},\mathbf{Y}}(k)$, то задача (3) зводиться до задачі

$$\det|\Gamma_{\mathbf{a},\mathbf{Y}}(\lambda)| = 0, \ \lambda < 0, \tag{4}$$

де $\lambda = k^2$.

Взагалі задача (4) не є розв'язною. Зауважимо, що у визначнику в (4) на діагоналі розташована функція, залежна від константи зв'язку відповідної точки, а поза діагоналями — функція, залежна від відстані між точками. Отже, якщо модель (1) має „достатню кількість" рівних відстаней між центрами збурень та рівних між собою констант зв'язку, то задача (4) значно спрощується. Отже, надалі припустимо, що $\alpha_j = \alpha, \ j = \overline{1, N}$.

Зауважимо, що випадок двох точок і трьох, які утворюють правильний трикутник, розглянуто в [1, 3], випадок правильних багатокутників — у [4]. Зазначимо, що випадок оператора Шредінгера, збуреного точковими потенціалами на прямій $(L_2(\mathbb{R}^1, dx))$, розглянуто в [5] із довільними константами зв'язку і відстанями між центрами збурень.

Оскільки правильних багатогранників в $\mathbb{R}^3$ лише п'ять, то дослідимо окремо кожний випадок.

Збурення потенціалами, зосередженими у вершинах тетраедра. У цьому випадку $N = = 4$. Розглянемо його детально. Якщо покласти $|y_i - y_j| = b$, $i \neq j = \overline{1, 4}$, то задача (4) набере вигляду

$$\begin{vmatrix} a & \tilde{b} & \tilde{b} & \tilde{b} \\ \tilde{b} & a & \tilde{b} & \tilde{b} \\ \tilde{b} & \tilde{b} & a & \tilde{b} \\ \tilde{b} & \tilde{b} & \tilde{b} & a \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

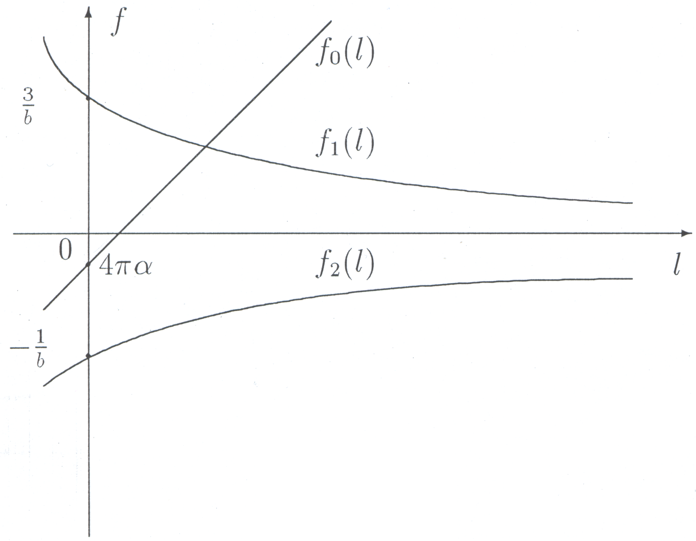
де $a = \alpha - \dfrac{ik}{4\pi}$, $\tilde{b} = -G_k(b)$.

Визначник у (5) має простий розклад:

$$(a - \tilde{b})^3(a + 3\tilde{b}) = 0.$$

З останньої рівності отримуємо сукупність

$$\begin{aligned} 4\pi\alpha + l &= -\frac{e^{-lb}}{b}, \\ 4\pi\alpha + l &= \frac{3e^{-lb}}{b}, \end{aligned} \tag{6}$$



де враховано, що $k = il$. Відомості про існування розв'язків трансцендентних рівнянь сукупності (6) (для $l > 0$) можна отримати з рисунка, де $f_0(l) = 4\pi\alpha + l$, $f_1(l) = \dfrac{3e^{-lb}}{b}$, $f_2(l) = -\dfrac{e^{-l\sqrt{2}b}}{\sqrt{2}b}$.

Переміщаючи на рисунку пряму $f_0(l)$ вздовж осі $(0, f)$ та враховуючи, що $f_2'(l)|_{l=0} = 1$, $f_2'(l) > 0$ для $l \in [0, \infty)$, отримуємо всі можливі перетини $f_0(l)$ з f_i, $i = 1, 2$. Результат сформулюємо у вигляді твердження.

Твердження 1. *Нехай в $L_2(\mathbb{R}^3, dx)$ задано оператор Лапласа, збурений δ-потенціалами, які розташовані у вершинах тетраедра зі стороною b і мають однакову константу зв'язку α.* (*Збурення розуміється в сенсі (2).*)

Якщо

$$4\pi\alpha b < -1,$$

то збурений оператор має дві різні від'ємні точки спектра, серед яких одна має кратність три, а друга – один.

Якщо

$$-1 \leq 4\pi\alpha b < 3,$$

то збурений оператор має єдину від'ємну точку спектра кратності один.

Якщо

$$3 \leq 4\pi\alpha b,$$

то збурений оператор не має жодної від'ємної точки спектра.

Нагадаємо, що неперервний спектр оператора Лапласа, розташований на додатній півосі, не змінюється при збуренні скінченною кількістю δ-функцій.

Зауваження 1. При розгляді збурення у трьох точках, зосереджених у вершинах рівностороннього трикутника [3], також з'являється кратна точка спектра.

Зауваження 2. Якщо у твердженні (1) замість тетраедра розглядати правильну піраміду, то відповідний визначник типу (5) також розкладається на прості множники, і тому можливо повністю описати точковий спектр оператора Лапласа, збуреного δ-потенціалами, зосередженими у вершинах правильної піраміди.

Розгляд інших багатогранників проведемо скорочено за схемою, проілюстрованою на тетраедрі.

Збурення потенціалами, зосередженими у вершинах октаедра. У цьому випадку $N = 6$. Якщо b — сторона октаедра а $d = \sqrt{2}b$ — діагональ, то задача (4) після спрощення відповідного визначника (низки елементарних перетворень) набере вигляду

$$(a - \tilde{b})^3(a - 2\tilde{b} + \tilde{d})^2(a + 4\tilde{b} + \tilde{d}) = 0, \tag{7}$$

де, як і раніше, $a = \alpha - \dfrac{ik}{4\pi}$, $\tilde{b} = -G_k(b)$, $\tilde{d} = -G_k(d)$.

Із рівняння (7) отримуємо сукупність

$$\begin{aligned} 4\pi\alpha + l &= -\frac{e^{-l\sqrt{2}b}}{\sqrt{2}b}, \\ 4\pi\alpha + l &= \frac{4e^{-lb}}{b} + \frac{e^{-l\sqrt{2}b}}{\sqrt{2}b}, \\ 4\pi\alpha + l &= \frac{e^{-l\sqrt{2}b}}{\sqrt{2}b} - \frac{2e^{-lb}}{b}, \end{aligned} \tag{8}$$

де враховано, що $k = il$. Існування розв'язків трансцендентних рівнянь сукупності (8) (для $l > 0$) та їх характер також встановлюються графічно. Результат сформулюємо у вигляді твердження.

Твердження 2. *Нехай в $L_2(\mathbb{R}^3, dx)$ задано оператор Лапласа, збурений δ-потенціалами, які розташовані у вершинах октаедра зі стороною b і мають однакову константу зв'язку α.* (*Збурення розуміється в сенсі (2).*)

Якщо

$$4\pi\alpha b < -1,$$

то збурений оператор має три різні від'ємні точки спектра, серед яких одна має кратність три, одна — два і одна — один.

Якщо

$$-1 \le 4\pi\alpha b < \frac{\sqrt{2}}{2} - 2,$$

то збурений оператор має дві різні від'ємні точки спектра, серед яких одна має кратність два і одна — один.

Якщо

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \le 4\pi\alpha b < \frac{\sqrt{2}}{4} + 2,$$

то збурений оператор має одну від'ємну точку спектра кратності один.

Якщо

$$\frac{\sqrt{2}}{4} + 2 \le 4\pi\alpha b,$$

то збурений оператор не має жодної від'ємної точки спектра.

Збурення потенціалами, зосередженими у вершинах куба. У цьому випадку $N = 8$. Якщо b — сторона куба, $c = \sqrt{2}b$ — діагональ грані, а $d = \sqrt{3}b$ — велика діагональ, то задача (4) після спрощення відповідного визначника (низки елементарних перетворень) набере вигляду

$$(a - \tilde{b} - \tilde{c} + \tilde{d})^3(a + \tilde{b} - \tilde{c} - \tilde{d})^3(a - 3\tilde{b} + 3\tilde{c} - \tilde{d})(a + 3\tilde{b} + 3\tilde{c} + \tilde{d}) = 0, \tag{9}$$

де, як і раніше, $a = \alpha - \frac{ik}{4\pi}, \tilde{b} = -G_k(b), \tilde{c} = -G_k(c), \tilde{d} = -G_k(d)$.

Відповідна до (9) сукупність має вигляд

$$\begin{aligned} 4\pi\alpha + l &= -\frac{e^{-lb}}{b} - \frac{e^{-l\sqrt{2}b}}{\sqrt{2}b} + \frac{e^{-l\sqrt{3}b}}{\sqrt{3}b}, \\ 4\pi\alpha + l &= \frac{e^{-lb}}{b} - \frac{e^{-l\sqrt{2}b}}{\sqrt{2}b} - \frac{e^{-l\sqrt{3}b}}{\sqrt{3}b}, \\ 4\pi\alpha + l &= -3\frac{e^{-lb}}{b} + 3\frac{e^{-l\sqrt{2}b}}{\sqrt{2}b} - \frac{e^{-l\sqrt{3}b}}{\sqrt{3}b}, \\ 4\pi\alpha + l &= 3\frac{e^{-lb}}{b} + 3\frac{e^{-l\sqrt{2}b}}{\sqrt{2}b} + \frac{e^{-l\sqrt{3}b}}{\sqrt{3}b}, \end{aligned} \tag{10}$$

де враховано, що $k = il$. Існування розв'язків трансцендентних рівнянь сукупності (10) (для $l > 0$) та їх характер також встановлюються графічним методом. Результат запишемо у вигляді твердження.

Твердження 3. *Нехай в $L_2(\mathbb{R}^3, dx)$ задано оператор Лапласа, збурений δ-потенціалами, які розташовані у вершинах куба зі стороною b і мають однакову константу зв'язку α.* (*Збурення розуміється в сенсі (2).*)

Якщо

$$4\pi\alpha b < \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - 3,$$

то збурений оператор має чотири різні від'ємні точки спектра, серед яких дві мають кратність три і дві — один.

Якщо

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - 3 \le 4\pi\alpha b < \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1,$$

то збурений оператор має три різні від'ємні точки спектра, серед яких дві мають кратність три і одна — один.

Якщо

$$\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \le 4\pi\alpha b < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3},$$

то збурений оператор має дві від'ємні точки спектра, серед яких одна має кратність три, а одна — один.

Якщо

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \le 4\pi\alpha b < 3 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3},$$

то збурений оператор має одну від'ємну точку спектра кратності один.

Якщо

$$3 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \le 4\pi\alpha b,$$

то збурений оператор не має жодної від'ємної точки спектра.

Збурення потенціалами, зосередженими у вершинах ікосаедра. У цьому випадку $N = 12$. Якщо b — сторона ікосаедра, $c = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}b$ і $d = \sqrt{\frac{13-\sqrt{5}}{8}}$ — відповідно менша і більша діагоналі, то задача (4) після спрощення відповідного визначника (низки елементарних перетворень) набере вигляду

$$(a-b-c+d)^5(a-d-\sqrt{5}c+\sqrt{5}b)^3(a-d+\sqrt{5}c-\sqrt{5}b)^3(a+d+5b+5c) = 0, \qquad (11)$$

де, як і раніше, $a = \alpha - \frac{ik}{4\pi}$, $\tilde{b} = -G_k(b)$, $\tilde{c} = -G_k(c)$, $\tilde{d} = -G_k(d)$.

Відповідна до (11) сукупність має вигляд

$$\begin{aligned}
4\pi\alpha + l &= -\frac{e^{-lb}}{b} - \frac{e^{-lc}}{c} + \frac{e^{-ld}}{d},\\
4\pi\alpha + l &= \frac{5e^{-lb}}{b} + \frac{5e^{-lc}}{c} + \frac{e^{-ld}}{d},\\
4\pi\alpha + l &= \frac{\sqrt{5}e^{-lb}}{b} - \frac{\sqrt{5}e^{-lc}}{c} - \frac{e^{-ld}}{d},\\
4\pi\alpha + l &= -\frac{\sqrt{5}e^{-lb}}{b} + \frac{\sqrt{5}e^{-lc}}{c} - \frac{e^{-ld}}{d},
\end{aligned} \qquad (12)$$

де враховано, що $k = il$. Існування розв'язків трансцендентних рівнянь сукупності (12) (для $l > 0$) та їх характер також встановлюються графічним методом. Результат досліджень запишемо у вигляді твердження.

Твердження 4. *Нехай в* $L_2(\mathbb{R}^3, dx)$ *задано оператор Лапласа, збурений* δ*-потенціалами, які розташовані у вершинах ікосаедра зі стороною* b *і мають однакову константу зв'язку* α. (*Збурення розуміється в сенсі (2).*)

Якщо

$$4\pi\alpha b < \sqrt{5} - \sqrt{2(5+\sqrt{5})} - \frac{\sqrt{81(13+\sqrt{5})}}{41},$$

то збурений оператор має чотири різні від'ємні точки спектра, серед яких дві мають кратність три, одна — один і одна — п'ять.

Якщо

$$\sqrt{5} - \sqrt{2(5+\sqrt{5})} - \frac{\sqrt{81(13+\sqrt{5})}}{41} \le 4\pi\alpha b < -1 - \frac{\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{5} + \frac{\sqrt{81(13+\sqrt{5})}}{41},$$

то збурений оператор має три різні від'ємні точки спектра з кратностями один, три і п'five.

Якщо

$$-1 - \frac{\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{5} + \frac{\sqrt{81(13+\sqrt{5})}}{41} \le 4\pi\alpha b < -\sqrt{5} + \sqrt{2(5+\sqrt{5})} - \frac{\sqrt{81(13+\sqrt{5})}}{41},$$

то збурений оператор має дві різні від'ємні точки спектра із кратностями один і три.

Якщо

$$-\sqrt{5} + \sqrt{2(5+\sqrt{5})} - \frac{\sqrt{81(13+\sqrt{5})}}{41} \le 4\pi\alpha b < 5 + \sqrt{10(5+\sqrt{5})} + \frac{\sqrt{81(13+\sqrt{5})}}{41},$$

то збурений оператор має одну від'ємну точку спектра кратності один.

Якщо

$$5 + \sqrt{10(5+\sqrt{5})} + \frac{\sqrt{81(13+\sqrt{5})}}{41} \le 4\pi\alpha\tilde{b},$$

то збурений оператор не має жодної від'ємної точки спектру.

Збурення потенціалами, зосередженими у вершинах додекаедра. У цьому випадку $N = 20$. Якщо b — сторона додекаедра c, d, g і p — відстані від фіксованої точки до інших ($c < d < g < p$), то задача розкладу визначника матриці розмірності 20×20 типу (4) не є простою. Проте можна помітити, що цей визначник має дільник

$$(a + 3\tilde{b} + 6\tilde{c} + 6\tilde{d} + 3\tilde{g} + \tilde{p}), \tag{13}$$

де, як і раніше, $a = \alpha - \dfrac{ik}{4\pi}, \tilde{b} = -G_k(b), \tilde{c} = -G_k(c), \tilde{d} = -G_k(d), \tilde{g} = -G_k(g), \tilde{p} = -G_k(p)$. Це дійсно так, оскільки кожна вершина додекаедра віддалена від інших на відстані b і g тричі, c і d шість разів p один раз (p — головна діагональ).

Використовуючи прості міркування, наведені в [4], можна сформулювати таке твердження.

Твердження 5. *Нехай в $L_2(\mathbb{R}^3, dx)$ задано оператор Лапласа, збурений δ-потенціалами, які розташовані у вершинах додекаедра зі стороною b і мають однакову константу зв'язку α.* (*Збурення розуміється в сенсі (2).*)

Якщо

$$4\pi\alpha b < -3\frac{1}{b} - 6\frac{1}{c} - 6\frac{1}{d} - 3\frac{1}{g} - \frac{1}{p},$$

то збурений оператор має двадцять точок від'ємного спектра з урахуванням кратності.

Якщо

$$3\frac{1}{b} + 6\frac{1}{c} + 6\frac{1}{d} + 3\frac{1}{g} + \frac{1}{p} \leq 4\pi\alpha b,$$

то збурений оператор не має жодної від'ємної точки спектра.

Зауваження 3. У твердженні 5 оцінка повного набору точок від'ємного спектра не є точною. Проте оцінка відсутності точкового спектра є точною.

Зауваження 4. Твердження, аналогічні до 1 – 5, можна сформулювати і довести для деяких напівправильних багатогранників.

Зауваження 5. Власні значення, відповідні до власних чисел, обчислених у твердженнях 1 – 5, записуються у вигляді формули (1.1.54) [1].

1. *Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг-Крон Р., Хольден Х.* Решаемые модели в квантовой механике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. — 568 с.
2. *Кошманенко В. Д.* Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. — Киев: Наук. думка, 1993. — 176 с.
3. *Albeverio S., Høegh-Krohn R.* Perturbation of resonances in quantum mechanics // J. Math. Anal. and Appl. – 1984. – **101**. — P. 491 – 513.
4. *Дудкін М.Є.* Про точковий спектр оператора Лапласа, збуреного точковими потенціалами у вершинах правильних багатокутників // Наук. вісті НТУУ “КПІ”. — 2002. — № 6. — С. 128 – 132.
5. *Albeverio S., Nizhnik L.* Schrödinger operators with a number of negative eigenvalues equal to the number of point interactions. — Bonn, 2002. — 20 p. — Preprint № 49, SFB-611.

Одержано 15.07.2003