УДК 517.948

ПРО ЗЛІЧЕННОТОЧКОВУ НЕЛІНІЙНУ КРАЙОВУ ЗАДАЧУ НА ПІВОСІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРІ ОБМЕЖЕНИХ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Ю. В. Теплінський, В. А. Недокіс

Кам'янець-Поділ. пед. ун-т
Україна, 32300, Кам'янець-Подільський
Хмельницької обл., вул. Огієнка, 61
e-mail: teplin@kp.rel.com.ua

The numerical-analytical method of A. M. Samoilenko is used to study a nonlinear boundary-value problem with an unbounded countable set of boundary moments on the positive half-line in the case where the differential equation and the boundary conditions are given in the Banach space of bounded number sequences.

Ідею чисельно-аналітичного методу А. М. Самойленка застосовано до дослідження нелінійної крайової задачі з необмеженою зчисленною множиною крайових моментів на додатній півосі у випадку, коли диференціальне рівняння і крайові умови визначено у банаховому просторі обмежених числових послідовностей.

Відомо, що чисельно-аналітичний метод А. М. Самойленка протягом останніх років плідно застосовувався до дослідження різного виду крайових задач. Відмітимо тут лише відомі монографії А. М. Самойленка та М. Й. Ронто [1–3], в яких викладено загальну теорію цього методу та вказано на можливості його застосування. Досить повну бібліографію, що стосується історії розвитку цього методу, можна відшукати у серії статей М. Й. Ронто, А. М. Самойленка та С. І. Трофимчука в „Українському математичному журналі", перша з яких [4] опублікована в 1998 році.

У цій роботі, що є логічним продовженням статей [5, 6], ми розглядаємо крайову задачу з необмеженою зліченною множиною крайових моментів на додатній півосі у випадку, коли і саме рівняння, і крайові умови визначено у банаховому просторі обмежених числових послідовностей.

Позначимо через $\mathfrak{M}$ простір обмежених числових послідовностей $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ дійсних чисел з нормою $\|x\| = \sup\limits_{i \in N}\{|x_i|\}$, де N — множина натуральних чисел, а через $\mathfrak{M}^\infty$ простір послідовностей $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots)$, $\psi_i \in \mathfrak{M}\ \ \forall\, i \in N$, обмежених за нормою $\|\psi\| = \sup\limits_{i \in N}\{\, \|\psi_i\|\,\}$, де $\|\psi_i\|$ — норма у просторі $\mathfrak{M}$. Норму нескінченної матриці $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$, узгоджену з нормою вектора $x \in \mathfrak{M}$, визначимо рівністю $\|A\| = \sup\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$. Нехай $D = \{x |\, x \in \mathfrak{M},\ \|x\| \le M_0 = \mathrm{const} > 0\}$ і $D^\infty = \{\psi \in \mathfrak{M}^\infty |\ \|\psi\| \le M_0\}$.

Поставимо задачу: знайти розв'язок рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

який задовольняє умову

$$A_0x(0) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i x(t_i) = \varphi(x(0); x(t_1), x(t_2), \ldots), \tag{2}$$

де

$$0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots, \ \sup_i \{t_i\} = +\infty,$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in D; f(t,x) = \{f_1(t,x), f_2(t,x), f_3(t,x), \ldots\} : [0, +\infty) \times D = \overline{D}_0 \to \mathfrak{M};$$

$A_i, \ i = 0, 1, 2, \ldots,$ — обмежені за нормою нескінченні матриці, такі, що $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|A_i\| < \infty$; під похідною $\dfrac{dx(t)}{dt}$ розуміємо вектор $\left(\dfrac{dx_1(t)}{dt}, \dfrac{dx_2(t)}{dt}, \dfrac{dx_3(t)}{dt}, \ldots\right)$; функція $\varphi(\psi_1, \psi_2, \ldots) = \{\varphi_1(\psi_1, \psi_2, \ldots), \varphi_2(\psi_1, \psi_2, \ldots), \ldots\} : D^{\infty} \to \mathfrak{M}$.

Через $h(t)$ позначимо функцію $h : [0, +\infty) \to [0, T), T = \mathrm{const} > 0$, що має такі властивості:

1^*) $h(0) = 0, h(+\infty) = \lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = T$;

2^*) на півосі $[0, +\infty)$ існує неперервна, невід'ємна похідна $h'(t)$, обмежена сталою $\overline{h'} = \sup\limits_{t \geq 0} h'(t)$.

Наступні умови назвемо умовами (A):

1) для будь-яких $\{\psi, \psi_*\} \subset D^{\infty}$ справджуються нерівності

$$\|\varphi(\psi)\| \leq M, \qquad \|\varphi(\psi) - \varphi(\psi_*)\| \leq K \|\psi - \psi_*\|, \tag{3}$$

де M та K — додатні сталі;

2) функція $f(t,x)$ неперервна на $\overline{D}_0$ відносно t, x і існує така функція $h(t)$ з властивостями $1^*, 2^*$, що

$$\|f(t,x)\| \leq M_h h'(t), \qquad \left\|f(t,x) - f(t,x')\right\| \leq K_h h'(t) \left\|x - x'\right\|, \tag{4}$$

де x, x' — довільні точки з D, а M_h і K_h — додатні сталі, що не залежать від точок (t,x) і (t,x') з $\overline{D}_0$;

3) матриця $\sum\limits_{i=1}^{\infty} h(t_i) A_i$ оборотна і обернена до неї матриця $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} h(t_i) A_i\right)^{-1}$ обмежена за нормою.

Легко помітити, що тоді оборотною є матриця $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{h(t_i)}{T} A_i$ і обернена до неї матриця

$$H = T \left(\sum_{i=1}^{\infty} h(t_i) A_i\right)^{-1}$$

теж обмежена за нормою.

Через D_β позначимо підмножину з D, кожен елемент x_0 якої входить у множину D разом зі своїм β-околом, де

$$\beta(x_0) = \frac{T}{2}M_h + \beta_1(x_0), \qquad \beta_1(x_0) = \|H\| \left\| d - \sum_{i=0}^{\infty} A_i x_0 \right\| + \sum_{i=1}^{\infty} \|HA_i\| \, \alpha_1(t_i) M_h,$$

$$\alpha_1(t) = 2h(t)\left(1 - \frac{h(t)}{T}\right),$$

а вектор $d = (d_1, d_2, \ldots)$ узято так, що $|d_i| = M$, $\operatorname{sgn} d_i = -\operatorname{sgn} d_i^0$, причому $d^0 = \operatorname{colon}\left(d_1^{/0}, d_2^0, \ldots\right) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} A_j x_0, i \in N$. Неважко перевірити, що $0 \le \alpha_1(t) \le \dfrac{T}{2}$.

Наступні умови назвемо умовами (B):

а) множина D_β є непорожньою;

б) справджується нерівність

$$Q = \frac{K_h T}{2}\left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \|HA_i\|\right] + K\,\|H\| < 1.$$

Надалі для вектор-функції $f(\tau) = \{f_1(\tau), f_2(\tau), \ldots\}$, $\tau \in R^1$, через $\int_a^b f(\tau)d\tau$ позначатимемо вектор $\left(\int_a^b f_1(\tau)d\tau, \int_a^b f_2(\tau)d\tau, \ldots\right)$.

Запишемо формально рекурентну послідовність вектор-функцій $\{x_m(t, x_0)\}_{m=0}^{\infty}$ таким чином:

$$x_0(t, x_0) = x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots) \in D_\beta,$$

$$x_m(t, x_0) = x_0 + \int\limits_0^t \left[f(\tau, x_{m-1}(\tau, x_0)) - \frac{h'(\tau)}{T} \int\limits_0^\infty f(s, x_{m-1}(s, x_0))ds \right] d\tau +$$

$$+ \frac{h(t)}{T} H \left\{ \varphi(x_{m-1}(0); x_{m-1}(t_1), x_{m-1}(t_2), \ldots) - \sum_{i=0}^{\infty} A_i x_0 - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{\infty} A_i \int\limits_0^{t_i} \left[f(\tau, x_{m-1}(\tau, x_0)) - \frac{h'(\tau)}{T} \int\limits_0^\infty f(s, x_{m-1}(s, x_0))ds \right] d\tau \right\}, m \in N. \tag{5}$$

Для існування такої послідовності достатньо, щоб при всіх $i \in N$ функції $x_i(t, x_0)$ були неперервними за нормою відносно змінної t на додатній півосі та обмеженими за нормою числом M (не виходили за межі множини D). Тоді збіжність невласного інтеграла

$\int_0^\infty f(\tau, x_{m-1}(\tau, x_0))d\tau$ (покоординатна) буде забезпечена першою з умов (4) та властивостями 1^*, 2^* функції $h(t)$.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови (A) і (B). Тоді*:

1) *послідовність* $\{x_m(t, x_0)\}_{m=0}^\infty$, *визначена рівностями (5), рівномірно збігається при* $m \to \infty$ *відносно* $(t, x_0) \in [0, +\infty) \times D_\beta$ *до функції* $x^*(t, x_0)$, *причому*

$$\|x_m(t, x_0) - x^*(t, x_0)\| \leq \frac{Q^m}{1-Q}\beta(x_0) \qquad \forall\, m \in N; \tag{6}$$

2) *функція* $x^*(t, x_0)$ *задовольняє крайову умову (2) і є розв'язком рівняння*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \mu \cdot h'(t), \tag{7}$$

де

$$\mu = \Delta(x_0) = \frac{1}{T} H \left\{ \varphi(x^*(0); x^*(t_1), x^*(t_2), \dots) - \sum_{i=0}^\infty A_i x_0 - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^\infty A_i \int_0^{t_i} \left[f(\tau, x^*(\tau, x_0)) - \frac{h'(\tau)}{T} \int_0^\infty f(s, x^*(s, x_0))ds \right] d\tau \right\} -$$

$$- \frac{1}{T} \int_0^\infty f(\tau, x^*(\tau, x_0))d\tau; \tag{8}$$

3) *якщо*

$$\Delta(x_0) = 0 \tag{9}$$

то функція $x^*(t, x_0)$ *є розв'язком крайової задачі (1), (2).*

Доведення. При $m = 1$ з (5) одержуємо

$$x_1(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \left[f(\tau, x_0) - \frac{h'(\tau)}{T} \int_0^\infty f(s, x_0)ds \right] d\tau +$$

$$+ \ \frac{h(t)}{T} H \left\{ \varphi(x_0; x_0, x_0, \dots) - \sum_{i=0}^{\infty} A_i x_0 - \right.$$

$$\left. - \ \sum_{i=1}^{\infty} A_i \int_0^{t_i} \left[f(\tau, x_0) - \frac{h'(\tau)}{T} \int_0^{\infty} f(s, x_0) ds \right] d\tau \right\}.$$

При всіх $i \in N$ $\int_0^{\infty} f_i(s, x_0) ds$ збігається, оскільки $f_i(s, x_0)$ є неперервною відносно s на проміжку $[0, +\infty)$ функцією і

$$\int_0^{\infty} |f_i(s, x_0)| \, ds \leq \int_0^{\infty} M_h h'(s) ds = \lim_{A \to +\infty} M_h \int_0^{A} h'(s) ds = M_h T.$$

Для довільних $\{t', t''\} \subset [0, +\infty)$ маємо

$$\left\| x_1(t'', x_0) - x_1(t', x_0) \right\| \leq \left\| \int_{t'}^{t''} \left[f(\tau, x_0) - \frac{h'(\tau)}{T} \int_0^{\infty} f(s, x_0) ds \right] d\tau \right\| +$$

$$+ \ \frac{|h(t'') - h(t')|}{T} \, \|H\| \left\| \left\{ \varphi(x_0; x_0, x_0, \dots) - \sum_{i=0}^{\infty} A_i x_0 - \sum_{i=1}^{\infty} A_i \int_0^{t_i} \left[f(\tau, x_0) - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. - \ \frac{h'(\tau)}{T} \int_0^{\infty} f(s, x_0) ds \right] d\tau \right\} \right\| \leq 2 M_h \overline{h'} \left| t'' - t' \right| + \frac{|h(t'') - h(t')|}{T} \, \|H\| \, \gamma,$$

де $\gamma = M_\varphi + \|x_0\| \sum\limits_{i=0}^{\infty} \|A_i\| + 2 M_h T \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|A_i\| = \mathrm{const} > 0.$

Оскільки функція $h(t)$ неперервна на $[0, +\infty)$, то останні нерівності гарантують неперервність функції $x_1(t, x_0)$ за нормою на цьому проміжку.

Оцінимо тепер за нормою різницю $x_1(t, x_0) - x_0$, використавши нерівності

$$\left\| \varphi(x_0, x_0, \dots) - \sum_{i=0}^{\infty} A_i x_0 \right\| \leq \left\| d - \sum_{i=0}^{\infty} A_i x_0 \right\|,$$

$$\left\| \int_0^{t} \left[f(\tau, x_0) - \frac{h'(\tau)}{T} \int_{\infty}^{0} f(s, x_0) ds \right] d\tau \right\| \leq M_h \alpha_1(t).$$

Доведення першої з цих нерівностей не викликає труднощів. Доведемо другу. Для будь-якого $A \in R^+$ маємо

$$\int_0^t \left[f(\tau, x_0) - \frac{h'(\tau)}{T} \int_0^A f(s, x_0) ds \right] d\tau =$$

$$= \int_0^t f(\tau, x_0) d\tau - \int_0^t \frac{h'(\tau)}{T} \left(\int_0^t f(s, x_0) ds + \int_t^A f(s, x_0) ds \right) d\tau =$$

$$= \int_0^t f(\tau, x_0) d\tau - \frac{h(t)}{T} \int_0^t f(s, x_0) ds - \frac{h(t)}{T} \int_t^A f(s, x_0) ds =$$

$$= \left(1 - \frac{h(t)}{T} \right) \int_0^t f(s, x_0) ds - \frac{h(t)}{T} \int_t^A f(s, x_0) ds.$$

Беручи до уваги першу з нерівностей (4), приходимо до співвідношення

$$\left\| \int_0^t \left[f(\tau, x_0) - \frac{h'(\tau)}{T} \int_0^A f(s, x_0) ds \right] d\tau \right\| \leq M_h \left[\left(1 - \frac{h(t)}{T} \right) h(t) + \frac{h(t)}{T} \left(h(A) - h(t) \right) \right],$$

переходячи в якому до границі при $A \to \infty$ і враховуючи при цьому умову 1^*, одержуємо потрібну нерівність.

Тепер легко перевірити, що справджується співвідношення

$$\|x_1(t, x_0) - x_0)\| \leq M_h \alpha_1(t) + \|H\| \left\| d - \sum_{i=0}^{\infty} A_i x_0 \right\| + M_h \sum_{i=1}^{\infty} \|HA_i\| \, \alpha_1(t_i) \leq$$

$$\leq \frac{T}{2} M_h + \beta_1(x_0) = \beta(x_0),$$

тобто при $x_0 \in D_\beta$

$$x_1(t, x_0) \in D \quad \forall \, t \in [0, +\infty) \, .$$

Припустивши, що для всіх $i \leq k \in N$ функції $x_i(t, x_0)$ неперервні за нормою на $[0, +\infty)$ і не виходять за межі множини D, після проведення аналогічних міркувань переконуємось, що ці властивості при $x_0 \in D_\beta$ має функція $x_{k+1}(t, x_0)$. Згідно з принципом повної математичної індукції ці властивості має функція $x_i(t, x_0) \quad \forall \, i \in N$, тобто співвідношення (5) визначають функціональну послідовність $\{x_m(t, x_0)\}_{m=0}^{\infty}$.

Простою підстановкою легко перевірити, що елементи цієї послідовності задовольняють рекурентну умову

$$A_0 x_m(0) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i x_m(t_i) = \varphi(x_{m-1}(0); x_{m-1}(t_1), x_{m-1}(t_2), \dots) \tag{10}$$

при кожному $m \in N$.

Доведемо, що вказана послідовність є збіжною за нормою при $m \to \infty$. Оскільки простір $\mathfrak{M}$ повний, то досить довести її фундаментальність. Використовуючи (3)–(5), отримуємо

$$\begin{aligned}\big\|x_{m+1}(t,x_0) - x_m(t,x_0)\big\| \le & K_h \left[\left(1 - \frac{h(t)}{T}\right) \int_0^t h'(s)\, \|x_m(s,x_0) - x_{m-1}(s,x_0)\|\, ds + \right.\\ & \left. + \frac{h(t)}{T} \int_t^{\infty} h'(s)\, \|x_m(s,x_0) - x_{m-1}(s,x_0)\|\, ds \right] + \\ & + K_h \frac{h(t)}{T} \sum_{i=1}^{\infty} \|HA_i\| \left[\left(1 - \frac{h(t_i)}{T}\right) \times \right.\\ & \times \int_0^{t_i} h'(s)\, \|x_m(s,x_0) - x_{m-1}(s,x_0)\|\, ds + \\ & \left. + \frac{h(t_i)}{T} \int_{t_i}^{\infty} h'(s)\, \|x_m(s,x_0) - x_{m-1}(s,x_0)\|\, ds \right] + \\ & + K\, \|H\|\, \frac{h(t)}{T} \sup_i \big\{ \|x_m(t_i,x_0) - x_{m-1}(t_i,x_0)\| \big\}.\end{aligned}$$

Ввівши позначення $\overline{r}_{m+1} = \sup\limits_{t \in [0,+\infty)} \|x_{m+1}(t,x_0) - x_m(t,x_0)\|$, з останньої нерівності одержимо

$$\begin{aligned}\overline{r}_{m+1} \le & \left\{ K_h \left[\left(1 - \frac{h(t)}{T}\right) h(t) + \frac{h(t)}{T}(T - h(t)) \right] + \right.\\ & + K_h \frac{h(t)}{T} \sum_{i=1}^{\infty} \|HA_i\| \left[\left(1 - \frac{h(t_i)}{T}\right) h(t_i) + \right.\end{aligned}$$

$$+ \quad \frac{h(t_i)}{T}(T - h(t_i))\Bigg] + K\|H\|\Bigg\}\,\overline{r}_m \le$$

$$\le \left\{\frac{K_h T}{2}\left[1 + \sum_{i=1}^{\infty}\|HA_i\|\right] + K\|H\|\right\}\overline{r}_m = Q\overline{r}_m.$$

Згідно з принципом математичної індукції неважко переконатися, що для довільного натурального m

$$\bar{r}_{m+1} \le Q^m \bar{r}_1 \le Q^m \beta(x_0).$$

Для довільних натуральних $m,\ j > m$ справджується тотожність

$$x_{m+j}(t, x_0) - x_m(t, x_0) = \sum_{i=1}^{j}\left(x_{m+i}(t, x_0) - x_{m+i-1}(t, x_0)\right),$$

з якої, оцінюючи праву частину зверху, одержуємо

$$\left\|x_{m+j}(t, x_0) - x_m(t, x_0)\right\| \le \sum_{i=1}^{j}\bar{r}_{m+i} \le \sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i}\beta(x_0) \le$$

$$\le Q^m \beta_{\varphi_h}(x_0)\sum_{i=0}^{j-1} Q^i < \frac{Q^m}{1-Q}\beta(x_0).$$

Оскільки $\beta(x_0) \le M_0$ і $Q < 1$, то при $m \to \infty$ рівномірно відносно $(t, x_0) \in [0, +\infty) \times \times D_\beta$ за нормою простору $\mathfrak{M}$

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t, x_0) = x^*(t, x_0),$$

і виконується нерівність (6). Послідовність $\{f(\tau, x_m(\tau, x_0))\}_{m=1}^{\infty}$ збігається до $f(\tau, x^*(\tau, x_0))$ рівномірно відносно $\tau \in [0, +\infty)$ і $x_0 \in D_\beta$. Це очевидним чином випливає з нерівності

$$\|f(\tau, x_m(\tau, x_0)) - f(\tau, x^*(\tau, x_0))\| \le K_h\overline{h'}\,\|x_m(\tau, x_0) - x^*(\tau, x_0)\|.$$

Крім того, послідовність $\left\{\frac{h'(\tau)}{T}\int\limits_0^{\infty} f(s, x_m(s, x_0))ds\right\}_{m=1}^{\infty}$ збігається до

$$\frac{h'(\tau)}{T}\int\limits_0^{\infty} f(s, x^*(s, x_0))ds$$

рівномірно відносно $\tau \in [0, +\infty)$, що випливає з нерівностей

$$\left\| \frac{h'(\tau)}{T} \int_0^\infty f(s, x^*(s, x_0)) ds - \frac{h'(\tau)}{T} \int_0^\infty f(s, x_m(s, x_0)) ds \right\| \le$$

$$\le \frac{h'(\tau)}{T} \int_0^\infty K_h h'(s) \left\| x^*(s, x_0) - x_m(s, x_0) \right\| ds \le$$

$$\le K_h \frac{h'(\tau)}{T} \int_0^\infty \frac{Q^m}{1-Q} \beta(x_0) h'(s) ds \le$$

$$\le \frac{K_h \overline{h'} Q^m}{1-Q} \left(\frac{T}{2} M_h + \|H\| \left\| d - \sum_{i=0}^\infty A_i x_0 \right\| + \sum_{i=1}^\infty \|H A_i\| \frac{T}{2} M_h \right) =$$

$$= Q^m \gamma_1 \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

де γ_1 — додатна стала при фіксованому x_0.

Це дає можливість перейти у (5) покоординатно до границі при $m \to \infty$ і одержати рівність

$$x^*(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \left[f(\tau, x^*(\tau, x_0)) - \frac{h'(\tau)}{T} \int_0^\infty f(s, x^*(s, x_0)) ds \right] d\tau +$$

$$+ \frac{h(t)}{T} H \left\{ \varphi(x^*(0); x^*(t_1), x^*(t_2), \ldots) - \sum_{i=0}^\infty A_i x_0 - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^\infty A_i \int_0^{t_i} \left[f(\tau, x^*(\tau, x_0)) - \frac{h'(\tau)}{T} \int_0^\infty f(s, x^*(s, x_0)) ds \right] d\tau \right\}.$$

Легко бачити, що

$$\varphi(x_m(0); x_m(t_1), x_m(t_2), \ldots) \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} \varphi(x^*(0); x^*(t_1), x^*(t_2), \ldots)$$

за нормою простору $\mathfrak{M}$, і, крім того,

$$\left\| \left(A_0 x_m(0) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i x_m(t_i) \right) - \left(A_0 x^*(0) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i x^*(t_i) \right) \right\| \leq$$

$$\leq M_0 \frac{Q^m}{1-Q} \sum_{i=0}^{\infty} \|A_i\| \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \forall\, m \in N.$$

Із цих співвідношень випливає, що в рекурентних умовах (10) можна здійснити граничний перехід за нормою при $m \to \infty$, який показує, що $x^*(t, x_0)$ задовольняє крайову умову (2). Це завершує доведення перших двох тверджень теореми 1. Доведення третього її твердження є очевидним.

Умовами (B^0) назвемо умови (B), в яких нерівність $Q < 1$ замінено сильнішою оцінкою

$$K_h T \left[1 + \|H\| \sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\| \right] + K \|H\| < 1.$$

Наслідок 1. *Якщо функцію $h(t)$ обрано, то при умовах (A) і (B^0) не існує іншого значення μ такого, при якому розв'язок рівняння (7) з початковою умовою $x(0) = x_0$ задовольняв би крайову умову (2).*

Доведення. Припустимо, що існують $\{\mu_1, \mu_2\} \subset M$ і функції $x_1(t, x_0)$ та $x_2(t, x_0)$ такі, що $x_1(0, x_0) = x_2(0, x_0) = x_0 \in D_\beta$, $\dfrac{dx_i(t, x_0)}{dt} = f(t, x_i(t, x_0)) + \mu_i h'(t)$, $i \in \{1, 2\}$, причому ці функції задовольняють рівність (2).

Тоді

$$x_j(t,\, x_0) = x_0 + \int\limits_0^t f(\tau, x_j(\tau, x_0)) d\tau + \mu_j h(t), \qquad j \in \{1, 2\},$$

і

$$A_0 x(0) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left\{ x_0 + \int\limits_0^{t_i} f(\tau,\, x_j(\tau, x_0)) d\tau + \mu_j h(t) \right\} = \tilde{\varphi}_j, \qquad j \in \{1, 2\},$$

де

$$\tilde{\varphi}_j = \varphi \left(x_0;\, x_0 + \int\limits_0^{t_1} f(\tau,\, x_j(\tau, x_0)) d\tau + \mu_j h(t_1), x_0 + \int\limits_0^{t_2} f(\tau,\, x_j(\tau, x_0)) d\tau + \mu_j h(t_2), \ldots \right).$$

Зауважимо, що обидві функції $x_1(t, x_0)$, $x_2(t, x_0)$ вважаються обмеженими на $[0, +\infty)$ за нормою сталою M_0. Позначимо $\sup\limits_{t \in [0, +\infty)} \|x_1(t, x_0) - x_2(t, x_0)\|$ через r. Із вказаних вище рівностей випливають співвідношення

$$\|x_1(t,x_0)-x_2(t,x_0)\| \le \int\limits_0^t K_h h'(\tau) r d\tau + \|\mu_1-\mu_2\| h(t),$$

$$r \le K_h r T + \|\mu_1-\mu_2\|\, T,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \left\{ \int\limits_0^{t_i} \left(f(\tau,x_1(\tau)) - f(\tau,x_2(\tau)) \right) d\tau + h(t_i)\,(\mu_1-\mu_2) \right\} = \tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2,$$

$$\|\mu_1-\mu_2\| \le \frac{\|H\|}{T} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\| \int\limits_0^{t_i} K_h h'(\tau) r d\tau + \right.$$

$$\left. + \ K \sup_{i\in N} \left\{ \int\limits_0^{t_i} K_h h'(\tau) r d\tau + \|\mu_1-\mu_2\| h(t_i) \right\} \right) \le$$

$$\le \frac{\|H\|}{T} \left(K_h r T \sum_{i=1}^{\infty} \|A_i\| + K K_h r T + K T \|\mu_1-\mu_2\| \right),$$

з яких, у свою чергу, випливають оцінки

$$\|\mu_1-\mu_2\| \le \frac{\|H\| K_h \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|A_i\| + K \right)}{1-K\|H\|} r,$$

$$r \le \left(K_h T + \frac{T\,\|H\|\, K_h \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|A_i\| + K \right)}{1-K\,\|H\|} \right) r =$$

$$= \frac{T K_h \left(1 + \|H\| \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|A_i\| \right)}{1-K\,\|H_h\|} r,$$

а коефіцієнт, що стоїть перед r у правій частині останньої нерівності, строго менший за одиницю.

Звідси випливає, що $r = 0$, тобто $x_1(t, x_0) \equiv x_2(t, x_0)$ $\forall\, t \in [0, +\infty)$. При цьому, звичайно, $\mu_1 = \mu_2$, що завершує доведення.

Домовимось надалі функцію $\Delta(x_0)$ вигляду (8) називати точною визначальною функцією, її значення μ при фіксованому x_0 — керуючим параметром або керуванням, а рівняння (9) — точним визначальним рівнянням і розглядатимемо поряд з точним визначальним рівнянням наближене визначальне рівняння

$$\Delta_m(x_0) = 0,$$

де

$$\Delta_m(x_0) = \frac{1}{T} H \Bigg\{ \varphi(x_m(0); x_m(t_1), x_m(t_2), \ldots) - \sum_{i=0}^{\infty} A_i x_0 -$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} A_i \int_0^{t_i} \left[f(\tau, x_m(\tau, x_0)) - \frac{h'(\tau)}{T} \int_0^{\infty} f(s, x_m(s, x_0)) ds \right] d\tau \Bigg\} -$$

$$- \frac{1}{T} \int_0^{\infty} f(\tau, x_m(\tau, x_0)) d\tau \tag{11}$$

— наближена визначальна функція.

Під топологічним відображенням $\mathfrak{I}$ замкненої множини $D \subset \mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}$ розумітимемо гомеоморфізм $\mathfrak{I} : D \mapsto \mathfrak{I}(D)$, що переводить межу множини D в межу її образу $\mathfrak{I}(D)$.

Наслідок 2. *Справджуються наступні твердження*:

1) якщо при умовах (A) та (B) існує замкнена підмножина $D_1 \subset D_\beta$ така, що для деякого $m \in N$ функція Δ_m топологічно відображає D_1 на $\Delta_m D_1$, рівняння $\Delta_m(x_0) = 0$ має в D_1 єдиний розв'язок x^0 і на межі Γ_{D_1} множини D_1 виконується нерівність

$$\inf_{x \in \Gamma_{D_1}} \|\Delta_m(x)\| \geq \left(\frac{1}{T} K \|H\| + \frac{1}{2} K_h \sum_{i=1}^{\infty} \|H A_i\| + K_h \right) \frac{Q^m}{1 - Q} M_0 = \sigma(m), \tag{12}$$

то крайова задача (1), (2) має розв'язок $x = x^*(t)$ з початковою умовою $x^*(0) = x_0^* \in \in D_1$;

2) якою б не була функція $h(t)$, при якій виконуються умови (A) та (B^0), для того, щоб деяка підмножина $D_2 \subset D_\beta$ містила початкове значення $x^*(0) = x_0^*$ розв'язку цієї крайової задачі, необхідно, щоб для будь-яких $m \in N$ і $\overline{x}_0 \in D_2$ виконувалась нерівність

$$\|\Delta_m(\overline{x}_0)\| \leq \sup_{x_0 \in D_2} \Bigg\{ \frac{1}{T} \|R\| + \Bigg(\frac{1}{T} K \|H\| +$$

$$+ K_h \Big(\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \|H A_i\| + 1 \Big) \Bigg) \Bigg\} \frac{1 + \|R\|}{1 - Q} \|\overline{x}_0 - x_0\| + \sigma(m, \overline{x}_0), \tag{13}$$

де через R позначено вираз $H\sum\limits_{i=0}^{\infty}A_i$, а через $\sigma(m,\overline{x}_0)$ — вираз

$$\left(\frac{1}{T}K\left\|H\right\|+\frac{1}{2}K_h\sum_{i=1}^{\infty}\left\|HA_i\right\|+K_h\right)\frac{Q^m}{1-Q}\beta(\overline{x}_0).$$

Доведення. Враховуючи умови (3), (4) та нерівність (6), для будь-якого $m\in N$ з (8) та (11) одержуємо

$$\left\|\Delta(x_0)-\Delta_m(x_0)\right\|\leq\frac{1}{T}\left\|H\right\|\left\|\varphi(x^*(0);x^*(t_1),x^*(t_2),\ldots)\right.-$$

$$-\left.\varphi(x_m(0);x_m(t_1),x_m(t_2),\ldots)\right\|+\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{\infty}\left\|HA_i\right\|\left\{\left(1-\frac{h(t_i)}{T}\right)\int_0^{t_i}\left\|f(\tau,x^*(\tau,x_0))\right.-\right.$$

$$-\left.\left. f(\tau,x_m(\tau,x_0))\right\|d\tau+\frac{h(t_i)}{T}\int_{t_i}^{\infty}\left\|f(\tau,x^*(\tau,x_0))-f(\tau,x_m(\tau,x_0))\right\|d\tau\right\}+$$

$$+\frac{1}{T}\int_0^{\infty}\left\|f(\tau,x^*(\tau,x_0))-f(\tau,x_m(\tau,x_0))\right\|d\tau\leq\frac{1}{T}\left\|H\right\|K\frac{Q^m}{1-Q}\beta(x_0)+$$

$$+\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{\infty}\|HA_i\|K_h\alpha_1(t_i)\frac{Q^m}{1-Q}\beta(x_0)+\frac{1}{T}K_h\int_0^{\infty}h'(\tau)d\tau\frac{Q^m}{1-Q}\beta(x_0)\leq$$

$$\leq\left(\frac{1}{T}K\left\|H\right\|+\frac{1}{2}K_h\sum_{i=1}^{\infty}\left\|HA_i\right\|+K_h\right)\frac{Q^m}{1-Q}\beta(x_0)=\sigma(m,x_0),\tag{14}$$

де $\sigma(m,x_0)\to 0$ при $m\to\infty$, $x_0\in D_\beta$.

Враховуючи (8), запишемо оцінку

$$\left\|\Delta(x_0')-\Delta(x_0'')\right\|\leq\left\{\frac{1}{T}\|R\|+\left(\frac{1}{T}K\|H\|+\right.\right.$$

$$\left.\left.+K_h\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\|HA_i\|+1\Big)\right)\frac{1+\|R\|}{1-Q}\right\}\left\|x_0'-x_0''\right\|\quad\forall\ \left\{x_0',x_0''\right\}\subset D_\beta,\tag{15}$$

з якої випливає рівномірна неперервність відображення Δ на множині D_1.

Згідно з лемою 13.1 з [1] множина

$$\Delta_mD_1-\sigma(m)=\{x\in\Delta_mD_1|\ \|x-y\|\leq\sigma(m)\Rightarrow y\in\Delta_mD_1\}\subset\Delta D_1.$$

Оскільки за умовою $0 \in \Delta_m D_1$, то для включення $0 \in \Delta_m D_1 - \sigma(m)$ достатньо, щоб нуль входив до множини $\Delta_m D_1$ разом зі своїм $\sigma(m)$-околом. Це забезпечується нерівністю (12).

Отже,

$$0 \in \Delta_m D_1 - \sigma(m) \subset \Delta D_1,$$

що доводить перше твердження наслідку.

Обґрунтуємо тепер друге його твердження. З (14) та (15) для всіх $m \in N$ та $\bar{x}_0 \in D_2$ випливає нерівність

$$\|\Delta_m(\bar{x}_0)\| \leq \left\{ \frac{1}{T}\|R\| + \left(\frac{1}{T} K\|H\| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \; K_h\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\|HA_i\| + 1\Big)\right) \frac{1+\|R\|}{1-Q} \right\} \|\bar{x}_0 - x_0^*\| + \sigma\left(m, \bar{x}_0\right),$$

яка забезпечує правильність нерівності (13), що й завершує доведення.

Для виконання умов теореми 1 суттєвим є існування функції $h(t)$ з вказаними вище властивостями. Розглянемо це питання докладніше. Множину точок $\big\{x \in \mathfrak{M} \,\big|\, \|x\| < M_0 + \rho\big\}$, де ρ — як завгодно мала додатна стала, позначимо через D_ρ, декартовий добуток $[0, +\infty) \times D_\rho$ — через $\bar{D}_\rho$, а похідну від функції $F(x)$ відносно x у сенсі Фреше – через $\dfrac{d_\Phi F(x)}{d_\Phi x}$. Справджується наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай для будь-якого* $t \in [0, +\infty)$ *функція* $f(t, x)$ *диференційовна в сенсі Фреше відносно* $x \in D_\rho$*, рівномірно відносно* $x \in D_\rho$ *неперервна по* $t \in [0, +\infty)$*, причому*

$$\|f(t,x)\| \leq M^*, \qquad \left\| \frac{\partial_\Phi f(t,x)}{\partial_\Phi x} \right\| \leq P^*(t),$$

де $M^* = \mathrm{const} > 0$*, а функція* $P^*(t)$ *набуває невід'ємних значень і не залежить від* $x \in D_\rho$*. Якщо при цьому* $\int_0^t \sup\limits_{x\in D} \|f(t,x)\|\, dt$ *є збіжним і*

$$\sup_{t \geq 0} \left\{ \frac{\sup\limits_{x \in D_\rho} \left\| \frac{\partial_\Phi f(t,x)}{\partial_\Phi x} \right\|}{\sup\limits_{x\in D} \|f(t,x)\|} \right\} = \xi < \infty, \tag{16}$$

то для функції $\tilde{h}(t) = \int_0^t \sup\limits_{x\in D} \|f(s,x)\|\, ds$:

1) виконуються умови 1, 2* при* $T = \int_0^\infty \sup\limits_{x\in D} \|f(t,x)\|\, dt$;

2) виконуються нерівності (4) при $M_h = 1, K_h \geq \xi$.

Доведення. Позначимо $\sup\limits_{x\in D}\|f(t,x)\|$ через $\tilde f(t)$ і покажемо, що $\tilde f(t)$ неперервна відносно t на $[0,+\infty)$. Очевидно, що для будь-яких $i\in N$, $\{t_1,t_2\}\subset[0,+\infty), x\in D_\rho$ виконується нерівність

$$\left|\,|f_i(t_1,x)|-|f_i(t_2,x)|\,\right|\le|f_i(t_1,x)-f_i(t_2,x)|\,,$$

з якої випливають співвідношення

$$\sup_{i\in N}\left|\,|f_i(t_1,x)|-|f_i(t_2,x)|\,\right|\le\sup_{i\in N}|f_i(t_1,x)-f_i(t_2,x)|=\|f(t_1,x)-f(t_2,x)\|\,.$$

Але

$$\sup_{i\in N}\left|\,|f_i(t_1,x)|-|f_i(t_2,x)|\,\right|\ge\left|\sup_{i\in N}|f_i(t_1,x)|-\sup_{i\in N}|f_i(t_2,x)|\right|,$$

тобто

$$\left|\,\|f(t_1,x)\|-\|f(t_2,x)\|\,\right|\le\|f(t_1,x)-f(t_2,x)\|\,.$$

Тоді $\sup\limits_{x\in D}\left|\,\|f(t_1,x)\|-\|f(t_2,x)\|\,\right|\le\sup\limits_{x\in D}\|f(t_1,x)-f(t_2,x)\|$, звідки одержуємо

$$\left|\tilde f(t_1)-\tilde f(t_2)\right|=\left|\sup_{x\in D}\|f(t_1,x)\|-\sup_{x\in D}\|f(t_2,x)\|\right|\le$$

$$\le\sup_{x\in D}\left|\,\|f(t_1,x)\|-\|f(t_2,x)\|\,\right|\le\sup_{x\in D}\|f(t_1,x)-f(t_2,x)\|\,.$$

Нехай t_0 — довільна точка з $[0,+\infty)$. За умовою теореми для будь-якого $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$ таке, що з нерівності $|t-t_0|<\delta$ випливає нерівність $\|f(t,x)-f(t_0,x)\|<\varepsilon\ \forall\, x\in D$. Зрозуміло, що при вказаних t $\sup\limits_{x\in D}\|f(t,x)-f(t_0,x)\|\le\varepsilon$, тобто $\left|\tilde f(t)-\tilde f(t_0)\right|\le\varepsilon$ при $|t-t_0|<\delta$, що й доводить неперервність функції $\tilde f(t)$ в точці t_0, а отже, і на проміжку $[0,+\infty)$.

У цьому випадку при будь-якому скінченному $t\ge 0$ існує інтеграл $\tilde h(t)$ і $\tilde h'(t)=\tilde f(t)$. Тоді

$$\|f(t,x)\|\le\sup_{x\in D}\|f(t,x)\|=\tilde f(t)=\tilde h'(t)=1\tilde h'(t),$$

тобто має місце перша з нерівностей (4), в якій $M_h=1$.

Оскільки множина опукла і відкрита, то

$$\left\|f(t,x')-f(t,x'')\right\|\le\sup_{x\in D_\rho}\left\|\frac{\partial_\Phi f(t,x)}{\partial_\Phi x}\right\|\left\|x'-x''\right\|\qquad\forall\,\left\{(t,x'),(t,x'')\right\}\subset\overline{D}_\rho.$$

Отже, сталу K_h у другій з нерівностей (4) слід обирати з умови, що нерівність

$$K_h \geq \frac{\sup\limits_{x \in D_\rho} \left\| \dfrac{\partial_\Phi f(t,x)}{\partial_\Phi x} \right\|}{\sup\limits_{x \in D} \| f(t,x) \|}$$

справджується для будь-якого $t \geq 0$. Тому досить покласти $K_h \geq \xi$.

Виконання умов $1^*,\ 2^*$ для функції $\tilde{h}(t)$ є очевидним.

Теорему доведено.

Зауваження. Умову (16) можна замінити умовою відділеності функції $\tilde{f}(t)$ від нуля, тобто нерівністю $\inf\limits_{t \geq 0} \tilde{f}(t) = \ell = \text{const} > 0$, вважаючи функцію $P^*(t)$ додатною сталою P^*. Тоді K_h можна обирати з нерівності $K_h \geq \dfrac{P^*}{\inf\limits_{t \geq 0} \tilde{f}(t)}$. Остання оцінка більш груба, ніж вказана в теоремі.

Наведемо приклад функції $f(t,x) = (f_1(t,x), f_2(t,x), \ldots)$, для якої виконуються умови теореми 2. Нехай $f_i(t,x) = e^{-t}\left(\sin x_i + \cos x_{i+1}\right),\ i \in N,\ D = \left\{ x \in \mathfrak{M} \,\middle|\, \|x\| \leq \dfrac{\pi}{2} \right\}$. Тоді

$$\| f(t,x) \| = \sup_i \left\{ \left| e^{-t} \left(\sin x_i + \cos x_{i+1} \right) \right| \right\} = e^{-t} \sup_i \left\{ \left| \sin x_i + \cos x_{i+1} \right| \right\},$$

звідки $\tilde{f}(t) = e^{-t} \sup\limits_{x \in D} \left\{ \sup\limits_i \left\{ \left| \sin x_i + \cos x_{i+1} \right| \right\} \right\} = e^{-t} \cdot 2$. Інтеграл

$$\int\limits_0^\infty \sup_{x \in D} \| f(t,x) \| \, dt = \int\limits_0^\infty 2e^{-t} dt = -2e^{-t} \Big|_0^\infty = 2,$$

а отже, збігається.

Покажемо, що похідна Фреше по x від $f(t,x)$ при фіксованому $t \geq 0$ задається нескінченною матрицею $L_{t,x} = [\ell_{ij}]_{i,j=1}^\infty$, елементи якої визначаються співвідношенням

$$\ell_{ij} = \begin{cases} e^{-t} \cos x_i, & j = i; \\ -e^{-t} \sin x_{i+1}, & j = i+1; \\ 0, & j \neq i, j \neq i+1, \end{cases}$$

і яка діє на елемент з $\mathfrak{M}$ за допомогою операції множення матриці на вектор, здійснюючи відображення $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$. Згідно з означенням для цього досить встановити, що

$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \frac{\| \alpha(t,x,\Delta x) \|}{\| \Delta x \|} = 0 \qquad \forall\, t \in [0, +\infty),\ \{x, x + \Delta x\} \subset D_\rho,$$

де

$$\alpha(t,x,\Delta x) = f(t, x + \Delta x) - f(t,x) - L_{t,x} \Delta x,$$

$$\alpha(t,x,\Delta x) = \left\{ \alpha_1(t,x,\Delta x), \alpha_2(t,x,\Delta x), \ldots \right\}.$$

Для вказаних x і Δx, $\|\Delta x\| \neq 0$, маємо

$$\alpha_i(t,x,\Delta x) = f_i(t,x+\Delta x) - f_i(t,x) - \sum_{j=1}^{\infty} \ell_{ij}\Delta x_j =$$

$$= f_i(t,x+\Delta x) - f_i(t,x) - \sum_{j=i}^{i+1} \ell_{ij}\Delta x_j =$$

$$= e^{-t}\big\{(\sin(x_i+\Delta x_i) + \cos(x_{i+1}+\Delta x_{i+1})) - (\sin x_i + \cos x_{i+1}) -$$

$$- \ (\cos x_i \cdot \Delta x_i - \sin x_{i+1}\cdot \Delta x_{i+1})\big\} = e^{-t}\left\{2\sin\frac{\Delta x_i}{2}\cos\Big(x_i + \frac{\Delta x_i}{2}\Big) - \right.$$

$$\left. - \ 2\sin\Big(x_{i+1} + \frac{\Delta x_{i+1}}{2}\Big)\sin\frac{\Delta x_{i+1}}{2} - \cos x_i\cdot\Delta x_i + \sin x_{i+1}\cdot\Delta x_{i+1}\right\} =$$

$$= e^{-t}\big\{(\sin x_i\cos\Delta x_i + \cos x_i \sin\Delta x_i - \sin\Delta x_i - \cos x_i\cdot\Delta x_i) -$$

$$- \ (\cos x_{i+1}\cos\Delta x_{i+1} - \sin x_{i+1}\sin\Delta x_{i+1} - \cos x_{i+1} + \sin x_{i+1}\cdot\Delta x_{i+1})\big\},$$

звідки

$$|\alpha_i(t,x,\Delta x)| \leq e^{-t}\left\{|\sin x_i|\,|1-\cos\Delta x_i| + |\cos x_i|\,|\sin\Delta x_i - \Delta x_i| + \right.$$

$$\left. + \ |\cos x_{i+1}|\,|1-\cos\Delta x_{i+1}| + |\sin x_{i+1}|\,|\sin\Delta x_{i+1} - \Delta x_{i+1}|\right\} \leq$$

$$\leq e^{-t}\left\{\,(|1-\cos\Delta x_i| + |\sin\Delta x_i - \Delta x_i|) + \right.$$

$$\left. + \ (|1-\cos\Delta x_{i+1}| + |\sin\Delta x_{i+1} - \Delta x_{i+1}|)\,\right\}.$$

Оскільки при $\Delta x_i \in \Big(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\Big)$ $|\sin\Delta x_i| \leq |\Delta x_i| \leq |\mathrm{tg}\,\Delta x_i|$, то

$$|1-\cos\Delta x_i| + |\sin\Delta x_i - \Delta x_i| \leq |1-\cos\Delta x_i| + |\sin\Delta x_i - \mathrm{tg}\,\Delta x_i| =$$

$$= |1-\cos\Delta x_i|\,(1+|\mathrm{tg}\,\Delta x_i|) = 2\sin^2\frac{\Delta x_i}{2}\times$$

$$\times \ (1+|\mathrm{tg}\,\Delta x_i|) \leq \frac{(\Delta x_i)^2}{2}\,(1+|\mathrm{tg}\,\Delta x_i|),$$

і попередня нерівність набирає вигляду

$$|\alpha_i(t,x,\Delta x)| \le \frac{e^{-t}}{2}\Big\{ (\Delta x_i)^2 (1+|\operatorname{tg}\Delta x_i|) + (\Delta x_{i+1})^2 (1+|\operatorname{tg}\Delta x_{i+1}|) \Big\}.$$

Розглядаючи поведінку $\alpha_i(t,x,\Delta x)$ при $\|\Delta x\| \to 0$, досить обмежитись тими значеннями Δx, для яких $\|\Delta x\| \le \dfrac{\pi}{4}$; тоді $|\operatorname{tg}\Delta x_i| \le 1$, $|\operatorname{tg}\Delta x_{i+1}| \le 1$ і

$$\frac{\|\alpha(t,x,\Delta x)\|}{\|\Delta x\|} = \frac{\sup\limits_i \{\, |\alpha_i(t,x,\Delta x)|\,\}}{\|\Delta x\|} \le$$

$$\le \frac{\sup\limits_i \Big\{ \frac{e^{-t}}{2}\Big(2\,(\Delta x_i)^2 + 2\,(\Delta x_{i+1})^2\Big)\Big\}}{\|\Delta x\|} \le$$

$$\le \frac{2e^{-t}\,\|\Delta x\|^2}{\|\Delta x\|} = 2e^{-t}\,\|\Delta x\| \to 0$$

при $\|\Delta x\| \to 0$. А тому $\dfrac{\partial_\Phi f(t,x)}{\partial_\Phi x}$ дійсно задається матрицею $L_{t,x}$.

Далі,

$$\left\|\frac{\partial_\Phi f(t,x)}{\partial_\Phi x}\right\| = \sup_i \{\, |\ell_{ii}| + |\ell_{i,i+1}|\,\} = \sup_i \left\{ e^{-t}\,|\cos x_i| + e^{-t}\,|\sin x_i| \right\} \le 2e^{-t},$$

звідки $\xi = \sup\limits_{t\ge 0} \dfrac{2e^{-t}}{2e^{-t}} = 1$. При цьому умови зауваження не виконуються, оскільки $\inf\limits_{t\ge 0} \tilde f(t) = \inf\limits_{t\ge 0} 2e^{-t} = 0$.

Неважко помітити, що в наведеному прикладі при фіксованому t матриця $L_{t,x}$ для функції $f(t,x)$ будується за аналогією до побудови якобіана функції $z : R^m \to R^n$. Виникає питання: при яких умовах ця аналогія зберігається в загальному випадку?

Розглянемо функцію $f(x) = \{f_1(x), f_2(x), \ldots\}$, що визначена у відкритій кулі $S = S(0,\delta) = \{x \in \mathfrak{M} \mid \|x\| < \delta\}$ і набуває значень з простору $\mathfrak{M}$, тобто $f : S \to \mathfrak{M}$. Очевидно, що $\forall\, i \in N\ \ f_i : S \to R^1$. Припустимо, що числова функція $f_i(x)$ має в точці $x^0 \in S$ часткову похідну за Фреше відносно x_j, $j \in N$. Цю похідну позначимо через $\dfrac{\partial_\Phi f_i(x)}{\partial_\Phi x_j}\Big|_{x^0} = \ell^*_{ij}(x_0)$. Очевидно, що $\ell^*_{ij}(x_0) : R^1 \to R^1$, звідки випливає $\ell^*_{ij}(x_0)h = k^* h$, де k^* — число, що дорівнює $\ell^*_{ij}(x_0)$, h — довільне дійсне число.

Будемо говорити, що функція $f(x)$ належить множині $\hat{C}^1_{\mathrm{Lip}}(S)$, якщо:

1) $\forall\, x \in S\quad \|f(x)\| \le P = \mathrm{const} > 0$ і виконується нерівність

$$\left\| f(x') - f(x'')\right\| \le K\varepsilon(m)\left\|x' - x''\right\|,$$

де x', x'' — довільні точки кулі S, перші m координат яких збігаються, $K = \mathrm{const} > 0$, $\varepsilon(m) \to 0$ при $m \to \infty$;

2) для будь-яких $\{i, j\} \subset N$ існують похідні $\dfrac{\partial_\Phi f_i(x)}{\partial_\Phi x_j}$ в кожній точці $x \in S$ і матриця $\left[\dfrac{\partial_\Phi f_i(x)}{\partial_\Phi x_j}\right]_{i,j=1}^{\infty}$ обмежена за нормою сталою $M' > 0$, яка не залежить від $x \in S$;

3) для будь-якого $j \in N$ вектор-функція $\dfrac{\partial_\Phi f(x)}{\partial_\Phi x_j} = \left(\dfrac{\partial_\Phi f_1(x)}{\partial_\Phi x_j}, \dfrac{\partial_\Phi f_2(x)}{\partial_\Phi x_j}, \ldots\right)$ задовольняє посилену умову Гельдера, тобто

$$\left\| \frac{\partial_\Phi f(x')}{\partial_\Phi x_j} - \frac{\partial_\Phi f(x'')}{\partial_\Phi x_j} \right\| \leq K' \varepsilon'(m) \left\| x' - x'' \right\|^{\alpha},$$

де x', x'' — довільні точки з S, перші m координат яких збігаються, K', α — додатні сталі, ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \varepsilon'(m)$ є збіжним.

Справджується наступне твердження, що уточнює теорему 11 з [6].

Теорема 3. *Якщо функція $f(x) \in \hat{C}^1_{\mathrm{Lip}}(S)$, то в кожній точці $x \in S$ вона має похідну Фреше відносно x, яка діє на будь-який вектор $h \in \mathfrak{M}$ шляхом множення на цей вектор матриці*

$$\frac{\partial_\Phi f(x)}{\partial_\Phi x} = \left[\frac{\partial_\Phi f_i(x)}{\partial_\Phi x_j}\right]_{i,j=1}^{\infty}.$$

Припустимо тепер, що рівністю $t = h_*(s)$ визначено дифеоморфізм $h_* : [0, T) \to \to [0, \infty)$, $h_*(0) = 0$, $\lim\limits_{s \to T} h_*(s) = \infty$, і похідні $h'_*(s)$ та $(h_*^{-1}(t))'$ не перетворюються в нуль на відповідних множинах.

Легко помітити, що для довільного $T > 0$ такий дифеоморфізм можна задати рівністю $t = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2T} s\right)$. Тоді заміна змінних $y = x(h_*(s))$ приводить крайову задачу (1), (2) до задачі вигляду

$$\frac{dy}{ds} = g(s, y), \tag{17}$$

$$A_0 y(0) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i y(s_i) = \varphi(y(0); y(s_1), y(s_2), \ldots), \qquad s_i \in [0, T) \quad \forall\, i \in N, \tag{18}$$

де $g(s, y) = f(h_*(s), y) h'_*(s)$, $s_i = h_*^{-1}(t_i)$.

Якщо функція $y = \psi(s)$ є розв'язком крайової задачі (17), (18), то функція $x = = \psi(h_*^{-1}(t))$ визначає розв'язок задачі (1), (2).

Припустимо, що функцію $g(s, y)$ можна довизначити в точці $s = T$ так, щоб рівняння (17) з крайовою умовою

$$A_0 y(0) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i y(s_i) + C y(T) = \varphi_1(y(0), y(T); y(s_1), y(s_2), \ldots), \tag{19}$$

в якій $\varphi_1(y(0), y(T); y(s_1), y(s_2), \dots) = \varphi(y(0); y(s_1), y(s_2), \dots) + Cy(T), C = [c_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ — деяка стала нескінченна матриця, мало розв'язок $y = \psi(s)$ на відрізку $[0, T]$. Тоді функція $\psi(s)$ одночасно визначає розв'язок задачі (17), (18) на проміжку $[0, T)$. До розв'язування задачі (17), (19) можна застосувати метод укорочення К.П. Персидського [7] та редукувати її до багатоточкової крайової задачі у скінченновимірному просторі.

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. — Киев: Выща шк., 1976. — 180 с.
2. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1985. — 224 с.
3. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1992. — 224 с.
4. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. I // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 1. — С. 93 – 108.
5. *Теплинский Ю. В., Недокис В. А.* Предельные теоремы в теории многоточечных краевых задач // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 4. — С. 519 – 531.
6. *Теплінський Ю. В., Недокіс В. А.* Про зліченноточкові крайові задачі для зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 1999. — **2**, № 2. — С. 252 – 266.
7. *Персидский К. П.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения в нелинейных пространствах. — Алма-Ата: Наука, 1976. — 247 с.

Одержано 29.08.2003