УДК 517.9

ОБМЕЖЕНІ НА R РОЗВ'ЯЗКИ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

А. О. Бойчук

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, ул. Терещенківська, 3
e-mail: aboichuk@imath.kiev.u

Conditions for existence of solutions bounded on the whole line R are obtained for a weakly nonlinear systems of ordinary differential equations with the assumption that the corresponding unpertubed homodeneous linear differential system has an exponential dichotomy on both half-lines R_+ and R_-.

Отримано умови існування обмежених на всій осі R розв'язків слабконелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь у випадку, коли відповідна незбурена однорідна лінійна диференціальна система є експоненціально-дихотомічною на півосях R_+ та R_-.

1. Основний результат. Для нелінійної системи

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) + \varepsilon Z(x, t, \varepsilon) \tag{1}$$

знайдемо умови існування обмежених на $R = (-\infty, +\infty)$ розв'язків $x = x(t, \varepsilon)$,

$$x(\cdot, \varepsilon) : R \to R^n, \quad x(\cdot, \varepsilon) \in BC^1(R), \quad x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0],$$

які при $\varepsilon = 0$ перетворюються в один з породжуючих розв'язків $x_0(t, c_r)$, $c_r \in R^r$, системи

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \tag{2}$$

де $A(t)$ — матриця розмірності $n \times n$, компоненти якої належать банаховому простору $BC(R)$ дійсних, неперервних та обмежених на R функцій; $BC^1(R)$ — банаховий простір неперервно диференційовних на R функцій, обмежених разом зі своєю похідною. Вектор-функції $f(t)$ та $Z(x, t, \varepsilon)$ є такими, що

$$Z(\cdot, t, \varepsilon) \in C^1[\, \|x - x_0\| \leq q \,], \quad Z(x, \cdot, \varepsilon), \;\; f(\cdot) \in BC(R), \quad Z(x, t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0],$$

де q та ε_0 — достатньо малі константи, які характеризують величину околу породжуючого розв'язку.

Теорема 1 (*необхідна умова*). *Припустимо, що система*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(\cdot) \in BC(R), \tag{3}$$

є е-дихотомічною [1–3] на $R_+ = [0, +\infty)$ та $R_- = (-\infty, 0]$ з проекторами P та Q відповідно. Нехай система (1) має обмежений на R розв'язок

$$x(t, \varepsilon) : \quad x(\cdot, \varepsilon) : R \to R^n, \quad x(\cdot, \varepsilon) \in BC^1(R), \quad x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється в один з породжуючих розв'язків $x_0(t, c_r)$ системи (2) з векторною константою $c_r = c_r^0 \in R^r$:

$$x(t, 0) = x_0(t, c_r^0) = X_r(t)c_r^0 + (G(f))(t). \tag{4}$$

Тоді векторна константа c_r^0 задовольняє рівняння

$$F(c_r^0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_d^*(s)Z(x_0(s, c_r^0), s, 0)ds = 0. \tag{5}$$

Доведення. Умова існування породжуючих обмежених на R розв'язків $x_0(t, c_r)$ системи (2) припускається виконаною. Відомо [4], що

$$f \in \operatorname{Im}[L_0 \overset{\text{df}}{=} \dot{x} - A(t)x]$$

тоді й тільки тоді, коли

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_d^*(s)f(s)ds = 0, \tag{6}$$

$H_d^*(t) = [X^{*-1}(t)[Q^*P_{N(D^*)}]_d]^*$ — матриця розмірності $d \times n$, рядки якої є повною системою d лінійно незалежних обмежених на R розв'язків системи, спряженої до (3); $X_r(t) = X(t)[PP_{N(D)}]_r = X(t)[(I-Q)P_{N(D)}]_r$ — матриця розмірності $n \times r$, стовпці якої є повною системою r лінійно незалежних обмежених на R розв'язків системи (3); $X(t)$ — нормальна $(X(0) = I)$ фундаментальна матриця системи (3); $(G(f))(t)$ — узагальнений оператор Гріна задачі про обмежені на R розв'язки системи (2); $P_{N(D)}$ та $P_{N(D^*)}$ — матриці розмірності $n \times n$ (ортопроектори: $P_{N(D)}^2 = P_{N(D)} = P_{N(D)}^*$, $P_{N(D^*)}^2 = P_{N(D^*)} = P_{N(D^*)}^*$), які проектують R^n на ядро $\ker D = N(D)$ та коядро $\operatorname{coker} D = \ker D^* = N(D^*)$ матриці $D = P - (I - Q)$.

Розглядаючи збурюючий доданок в (1) як неоднорідність та застосовуючи необхідну й достатню умову (6) існування обмеженого на R розв'язку до системи (1), отримуємо таку умову:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_d^*(s)[f(s) + \varepsilon Z(x(s, \varepsilon), s, \varepsilon)]ds = 0.$$

Переходячи в останній рівності до границі при $\varepsilon \to 0$ та враховуючи (6), отримуємо умову (5), справедливість якої й необхідно було довести.

За аналогією з періодичним випадком [5, 6] природно рівняння (5) називати рівнянням для породжуючих амплітуд задачі про обмежені на всій осі розв'язки системи (1). Якщо рівняння (5) має розв'язки, то вектор констант $c_r^0 \in R^r$ визначає той породжуючий розв'язок $x_0(t, c_r^0)$, до якого буде прямувати шуканий обмежений на R розв'язок $x = x(t, \varepsilon)$:

$$x(\cdot, \varepsilon) : R \to R^n, \quad x(\cdot, \varepsilon) \in BC^1(R), \quad x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \quad x(t, 0) = x_0(t, c_r^0),$$

початкової задачі (1), коли ε буде прямувати до нуля. Однак, якщо рівняння (5) не має розв'язку, то задача (1) не буде мати обмеженого на R розв'язку в просторах, що розглядаються. Зауважимо, що всі вирази розглядаються в дійсних просторах, тому мова йде про дійсні корені рівняння (5).

Виконуючи заміну змінних в (1) згідно зі співвідношенням

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t,c_r^0) + y(t,\varepsilon),$$

приходимо до задачі про знаходження достатніх умов існування обмеженого на R розв'язку $y = y(t,\varepsilon)$:

$$y(\cdot,\varepsilon):\ R \to R^n,\ \ y(\cdot,\varepsilon) \in BC^1(R),\ \ y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],\ \ y(t,0) = 0,$$

системи

$$\dot{y} = A(t)y + \varepsilon Z(x_0(t,c_r^0) + y, t, \varepsilon). \tag{7}$$

Беручи до уваги неперервну диференційовність вектор-функції $Z(x,t,\varepsilon)$ за змінною x та її неперервність за змінною ε в околі точки

$$x_0(t,c_r^0), \quad \varepsilon = 0,$$

можна виділити доданки лінійні по y та доданки нульового степеня по ε :

$$Z(x_0(t,c_r^0) + y, t, \varepsilon) = f_0(t,c_r^0) + A_1(t)y + R(y(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \tag{8}$$

де

$$f_0(t,c_r^0) = Z(x_0(t,c_r^0),t,0), \quad f_0(\cdot,c_r^0) \in BC(R),$$

$$A_1(t) = A_1(t,c_r^0) = \frac{\partial Z(x,t,0)}{\partial x}\Big|_{x=x_0(t,c_r^0)}, \quad A_1(\cdot) \in BC(R),$$

$$R(0,t,0) = 0, \frac{\partial R(0,t,0)}{\partial y} = 0, \quad R(y,\cdot,\varepsilon) \in BC(R).$$

Розглядаючи формально вектор-функцію $Z(x_0+y,t,\varepsilon)$ в системі (7) як неоднорідність та застосовуючи умову (6) існування обмеженого на R розв'язку до системи (7), отримуємо таке зображення обмеженого на R розв'язку (7):

$$y(t,\varepsilon) = X_r(t)c + y^{(1)}(t,\varepsilon).$$

У цьому зображенні невідомий вектор констант $c = c(\varepsilon) \in R^r$ визначається з умови типу (6)

$$B_0 c = -\int_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau)[A_1(\tau)y^{(1)}(\tau,\varepsilon) + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)]d\tau \tag{9}$$

існування такого розв'язку системи (7), де

$$B_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau) A_1(\tau) X_r(\tau) d\tau$$

є матрицею розмірності $d \times r$,

$$r = \operatorname{rank}[PP_{N(D)}] = \operatorname{rank}[(I-Q)P_{N(D)}],$$

$$d = \operatorname{rank}[P_{N(D^*)}(I-P)] = \operatorname{rank}[P_{N(D^*)}Q].$$

Невідома вектор-функція $y^{(1)}(t,\varepsilon)$ визначається за допомогою узагальненого оператора Гріна [4] зі співвідношення

$$y^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon \left(G\left[Z(x_0(\tau, c_r^0) + y, \tau, \varepsilon) \right] \right)(t).$$

Нехай $P_{N(B_0)}$ — $(r \times r)$-вимірна матриця-ортопроектор: $R^r \to N(B_0)$, $P_{N(B_0^*)}$ — $(d \times d)$-вимірна матриця-ортопроектор: $R^d \to N(B_0^*)$. Рівняння (7) є розв'язним відносно $c \in R^r$ тоді й тільки тоді, коли

$$P_{N(B_0^*)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau)[A_1(\tau) y^{(1)}(\tau,\varepsilon) + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)] d\tau = 0. \tag{10}$$

Якщо

$$\operatorname{rank} B_0 = d,$$

то $P_{N(B_0^*)} = 0$, а отже, умова (10) завжди виконується. У цьому випадку рівняння (9) розв'язне відносно $c \in R^r$ з точністю до довільної векторної константи $P_{N(B_0)}c$ $(\forall c \in R^r)$ з нуль-простору матриці B_0 :

$$c = -B_0^+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau)[A_1(\tau) y^{(1)}(\tau,\varepsilon) + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)] d\tau + P_{N(B_0)}c. \tag{11}$$

Для знаходження одного з обмежених на R розв'язків $y = y(t,\varepsilon)$ задачі (7)

$$y(\cdot,\varepsilon) : R \to R^n, \quad y(\cdot,\varepsilon) \in BC^1(R), \quad y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad y(t,0) = 0$$

приходимо до наступної операторної системи:

$$y(t,\varepsilon) = X_r(t)c + y^{(1)}(t,\varepsilon), \tag{12}$$

$$c = -B_0^+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau)[A_1(\tau) y^{(1)}(\tau,\varepsilon) + R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)] d\tau,$$

$$y^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon \left(G\left[Z(x_0(\tau, c_r^0) + y, \tau, \varepsilon) \right] \right)(t).$$

Операторна система (12) належить до класу систем [7, с. 188], для розв'язування яких можна застосувати метод простих ітерацій, який збігається для всіх достатньо малих $\varepsilon \in \in [0, \varepsilon_*] \subseteq [0, \varepsilon_0]$.

Справді, систему (12) можна записати у вигляді

$$z = L^{(1)} z + Fz, \tag{13}$$

де $z = \mathrm{col}\,(y(t,\varepsilon), c(\varepsilon), y^{(1)}(t,\varepsilon))$ — $(2n+r)$-вимірний вектор-стовпець; $L^{(1)}$ та F є лінійним та нелінійним операторами, обмеженими на R:

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & X_r & I_n \\ 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L_1 * = -B_0^+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau) A_1(\tau) * d\tau,$$

$$Fz = \mathrm{col}\left[0, \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau) R(y(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon) d\tau, \varepsilon G\left[Z(x_0(\tau, c_r^0) + y, \tau, \varepsilon)\right]\right].$$

На підставі структури оператора $L^{(1)}$ з нульовими блоками на головній діагоналі та нижче неї існує оператор $(I_s - L^{(1)})^{-1}$. Отже, систему (13) можна перетворити до вигляду

$$z = Sz, \quad S := (I_s - L^{(1)})^{-1} F, \;\; s = 2n + r, \tag{14}$$

з стискуючим оператором S в достатньо малому околі точки

$$x_0(t, c_r^0), \quad \varepsilon = 0.$$

Для розв'язання операторної системи (14) при достатньо малих $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$ можна застосувати один з варіантів методу нерухомої точки [8]. Використовуючи метод простих ітерацій для знаходження розв'язку операторної системи (9), а отже, і для знаходження обмеженого на R розв'язку вихідної системи (1), отримуємо такий результат.

Теорема 2 (*достатня умова*). *Припустимо, що для слабконелінійної системи (1) виконуються умови, зазначені вище, а також відповідна породжуюча лінійна система (2) має r-параметричну множину (4) породжуючих розв'язків $x_0(t, c_r)$, обмежених на R. Тоді для будь-якого вектора $c_r = c_r^0 \in R^r$, який задовольняє рівняння для породжуючих амплітуд (5), за припущення, що виконується умова*

$$\mathrm{rank}\, B_0 \;=\; d, \tag{15}$$

існує принаймні один обмежений на R розв'язок системи (1).

Один з цих розв'язків $x(t,\varepsilon) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k(t,\varepsilon) \;:\; x(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0]$, що перетворюється при $\varepsilon = 0$ в породжуючий розв'язок $x(t,0) = x_0(t, c_r^0)$ (4), можна визначити за допомо-

гою ітераційного процесу

$$y_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\left(G\left[Z(x_0(\tau,c_r^0)+y_k,\tau,\varepsilon)\right]\right)(t),$$

$$c_k = -B_0^+\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau)[A_1(\tau)y_k^{(1)}(\tau,\varepsilon)+R(y_k(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)]d\tau,$$

$$y_{k+1}(t,\varepsilon) = X_r(t)c_k + y_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon), \tag{16}$$

$$x_k(t,\varepsilon) = x_0(t,c_r^0)+y_k(t,\varepsilon),\ \ k=0,1,2,...;\ \ y_0(t,\varepsilon)=0,$$

який буде збігатися для всіх $t\in R$ та достатньо малих $\varepsilon\in[0,\varepsilon_*]\subseteq[0,\varepsilon_0]$.

Враховуючи те, що константа $c\in R^r$ в рівнянні (11) знаходилась з точністю до довільної константи $P_{N(B_0)\rho}c_\rho$, можна стверджувати, що існує множина обмежених на R розв'язків системи (1), які залежать від константи

$$P_{N(B_0)\rho}c_\rho\quad \forall c_\rho\in R^\rho, c_\rho=c_\rho(\varepsilon), c_\rho(0)=0,$$

де $P_{N(B_0)\rho}$ — $(r\times\rho)$-вимірна матриця, стовпці якої складаються з повної системи ρ лінійно незалежних стовпців $(r\times r)$-вимірної матриці $P_{N(B_0)}$, $\rho=\operatorname{rank}P_{N(B_0)}=r-\operatorname{rank}B_0=r-d$. У випадку лінійного збурення система (1) в умовах теореми 2 буде мати ρ-параметричну множину обмежених на R розв'язків.

У випадку, коли число $r=\operatorname{rank}[PP_{N(D)}=(I-Q)P_{N(D)}]$ лінійно незалежних обмежених на R розв'язків системи (3) дорівнює числу $d=\operatorname{rank}[P_{N(D^*)}(I-P)=P_{N(D^*)}Q]$ лінійно незалежних обмежених на R розв'язків системи, спряженої до системи (3), з умови $P_{N(B_0^*)}=0$ маємо умову $P_{N(B_0)}=0$, а отже, $\det B_0\neq 0$. У цьому випадку з теореми 2 отримуємо таке твердження [9].

Теорема 3 (*достатня умова*). *Припустимо, що для слабконелінійної системи (1) виконуються умови, зазначені вище, а також відповідна породжуюча лінійна система (2) має r-параметричну множину (4) породжуючих розв'язків $x_0(t,c_r)$, обмежених на R. Тоді для будь-якого вектора $c_r=c_r^0\in R^r$, який задовольняє рівняння для породжуючих амплітуд (5), за припущення, що виконується умова*

$$\det B_0\neq 0,\qquad r=d, \tag{17}$$

існує єдиний обмежений на R розв'язок системи (1). Цей розв'язок $x(t,\varepsilon)\colon x(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0]$ перетворюється при $\varepsilon=0$ в породжуючий розв'язок $x(t,0)=x_0(t,c_r^0)$ (4) та може бути визначений за допомогою ітераційної процедури (16), яка буде збігатися для всіх $t\in R$ та достатньо малих $\varepsilon\in[0,\varepsilon_*]\subseteq[0,\varepsilon_0]$.

Зауваження. Необхідну оцінку для ε_* та оцінку апроксимації ітераційного процесу можна визначити за допомогою стандартної процедури [8].

Умова (17) означає [7], що векторна константа $c_r^0 \in R^r$ є простим коренем рівняння (5) для породжуючих амплітуд задачі про обмежені на всій осі R розв'язки системи (1). Використовуючи техніку з [7, с. 193], за допомогою деяких додаткових припущень метод, використаний вище, можна розповсюдити на випадок кратних коренів рівняння (5).

Якщо оператор L_0 є фредгольмовим оператором $(\operatorname{ind} L_0 = 0)$ та до того ж маємо випадок $r = 1$, то з теореми 3 отримуємо відомий результат K. Palmer [2, c. 248]. Якщо ж L_0 є фредгольмовим оператором та, на додаток, він має властивість експоненціальної трихотомії на R, то з теореми 2 отримуємо відомий результат S. Elaidy та O. Hajek [10].

2. *Приклад.* Розглянемо систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) + \varepsilon A_1(t)x, \tag{18}$$

в якій

$$A(t) = \text{diag}\,\{-\tanh\,t, -\tanh\,t, \tanh\,t\}, \quad A_1(t) = \{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^3 \in BC(R).$$

Легко пересвідчитись, що

$$X(t) = \text{diag}\,\{2/(e^t + e^{-t}), 2/(e^t + e^{-t}), (e^t + e^{-t})/2\}.$$

Однорідна система

$$\dot{x} = A(t)x$$

є е-дихотомічною на обох півосях R_+ та R_- з проекторами $P = \text{diag}\,\{1, 1, 0\}$ та $Q = \text{diag}\,\{0, 0, 1\}$ відповідно. Тоді

$$D = 0, D^+ = 0, P_{N(D)} = P_{N(D^*)} = I_3,$$

$$r = \text{rank}\,PP_{N(D)} = 2, d = \text{rank}\,P_{N(D^*)}Q = 1,$$

$$X_r(t) = \begin{pmatrix} 2/(e^t + e^{-t}) & 0 \\ 0 & 2/(e^t + e^{-t}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_d(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/(e^t + e^{-t}) \end{pmatrix}.$$

Неоднорідна система

$$\dot{x} = A(t)x + f(t)$$

має двопараметричну множину

$$x_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + (G[f])(t) \quad \forall c_r \in R^2$$

обмежених на R розв'язків тоді й лише тоді, коли неоднорідність $f(t) = \text{col}\,\{f_1(t), f_2(t), f_3(t)\} \in BC(R)$ задовольняє умови

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_3(s)/(e^s + e^{-s})ds = 0 \quad \forall\, f_1(t) \in BC(R), \quad \forall\, f_2(t) \in BC(R).$$

Згідно з теоремами 1 та 2 отримуємо наступний результат для системи (18). Для кожної векторної константи $c_r = c_r^0 \in R^2$, яка задовольняє рівняння для породжуючих амплітуд (5):

$$B_0 c_r^0 = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_d^*(s) A_1(s)(Gf)(s)ds,$$

при виконанні умови

$$\operatorname{rank} B_0 = 1 \tag{19}$$

існує однопараметрична множина обмежених на R розв'язків системи (18), де

$$B_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_d^*(t) A_1(t) X_r(t) dt = 4 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[a_{31}(t)/(e^t + e^{-t})^2, \;\; a_{32}(t)/(e^t + e^{-t})^2 \right] dt,$$

$$\rho = \operatorname{rank} P_{N(B_0)} = r - \operatorname{rank} B_0 = r - d = 1.$$

Ці розв'язки $x(t, \varepsilon) : \;\; x(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0]$ перетворюються при $\varepsilon = 0$ в породжуючий розв'язок $x(t, 0) = x_0(t, c_r^0)$.

Якщо $a_{31}(t)$ або $a_{32}(t) \in BC(R)$ задовольняють одну з умов

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} a_{31}(t)/(e^t + e^{-t})^2 dt \neq 0, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a_{32}(t)/(e^t + e^{-t})^2 dt \neq 0,$$

то умова (19) виконується. Наприклад, якщо $a_{31}(t) = \text{Const} \neq 0$ або $a_{32}(t) = \text{Const} \neq 0$, то одна з цих нерівностей завжди виконується й умова (19) має місце. У цьому випадку коефіцієнти $a_{11}(t)$, $a_{12}(t)$, $a_{13}(t)$, $a_{21}(t)$, $a_{22}(t)$, $a_{23}(t)$, $a_{33}(t)$ можуть бути довільними з простору $BC(R)$ й система (18) буде мати однопараметричну множину обмежених на R розв'язків.

1. *Coppel W. A.* Dichotomies in stability theory // Lect. Notes Math. — Berlin: Springer, 1978. — **629**. — 98 p.
2. *Palmer K. J.* Exponential dichotomies and transversal homoclinic points // J. Different. Equat. — 1984. — **55**. — P. 225 – 256.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. — Киев: Наук. думка, 1990. — 272 с.
4. *Самойленко А. М., Бойчук А. А., Бойчук Ан. А.* Ограниченные на всей оси решения линейных слабовозмущенных систем // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 11. — С. 1517 – 1530.
5. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.
6. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
7. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 320 с.

8. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М.,Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1968. — 455 с.

9. *Samoilenko A. M., Boichuk A. A., and Boichuk An. A.* Pseudo-inverse matrices and solutions bounded on R of linear and nonlinear systems // Proc. Fifth Int. Workshop on Computer Algebra in Sci. Computing (September 22 – 27, 2002, Yalta, Ukraine). — München: Inst. Informatik, Techn. Univ., 2002. — P. 269 – 278.

10. *Elaidy S., Hajek O.* Exponential trichotomy of differential systems // J. Math. Anal. and Appl. — 1988. — **123**, № 2. — P. 362 – 374.

Одержано 10.10.2002