

## **СИЛОВІ ТА ЖОРСТКІСНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВІБРОЗАХИСНИХ СИСТЕМ ІЗ КВАЗІНУЛЬОВОЮ ЖОРСТКІСТЮ**

**Олександр Архипов, Олександр Мариношенко, Тарас Стефурак, Володимир Бакун**

*Національний технічний університет України  
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”  
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна  
e-mail: arkhyrov@gmail.com, відповідальний за листування,  
a\_marin@ukr.net,  
stefuraktaras0@gmail.com,  
I.volodia.bakun@gmail.com*

The operation of modern vehicles, especially in aviation and rocketry, is associated with significant static and dynamic loads. During a long-term operation, shock and vibration loads, especially low-frequency loads, are the most dangerous. This is explained by the lack of unified vibration protection devices for this frequency range and the need for the solution of a difficult engineering problem in each specific case. One of the interesting areas of vibration protection, especially in the most complex low-frequency range, is a vibration protection system with quasi-zero stiffness (QZS). Its characteristic feature is the elimination of the contradiction between the carrying capacity and the natural frequency of the anti-vibration system, the latter can theoretically approach zero. The nonlinearity of vibration protection systems with QZS characteristics also provides the possibility of protection against shocks in a wide frequency range including low frequencies. The purpose of the work is a comparative analysis of the strength and stiffness characteristics of the vibration protection systems with QZS of two structural types.

Експлуатація сучасних транспортних засобів (особливо це стосується авіації та ракетобудування), пов'язана зі значними статичними й динамічними навантаженнями. За тривалої експлуатації найбільш небезпечними є ударні та вібраційні навантаження, особливо низькочастотні. Це пояснюється відсутністю на цей час уніфікованих віброзахисних пристроїв для цього діапазону частот і необхідністю розв'язання для кожного конкретного випадку непрості інженерної задачі. Одним із цікавих напрямів віброзахисту, особливо в найбільш складному низькочастотному діапазоні, є віброзахисні системи з квазінульовою жорсткістю (ВСКЖ). Їхньою характерною особливістю є усунення протиріччя між несучою здатністю й власною частотою віброзахисної системи; остання теоретично може наближатися до нуля. Нелінійність характеристик ВСКЖ забезпечує і можливість захисту від ударів у широкому діапазоні частот, включаючи низькочастотні. Метою роботи є порівняльний аналіз силових і жорсткісних характеристик ВСКЖ двох конструктивних типів.

Швидкісні транспортні засоби характеризуються високою навантаженістю. Однією з важливих складових навантаження є вібрація. Її появу обумовлено дією силових установок, впливом зовнішнього середовища, нерівноваженістю рухомих елементів тощо. Актуальність захисту обладнання й апаратури, що знаходиться у складі транспорту, від вібрацій постійно зростає внаслідок збільшення швидкостей руху, зростання технологічної складності конструкції і вимог до точності приладів і механізмів. З метою забезпечення захисту

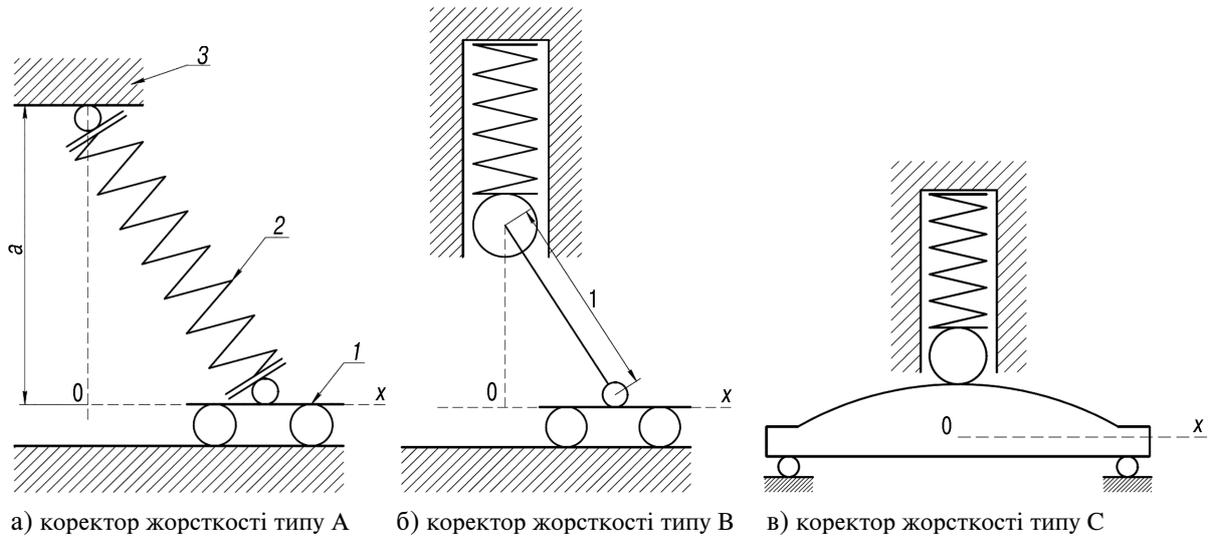


Рис. 1. Приклади конструктивних схем коректорів жорсткості трьох типів.

від шкідливого впливу вібраційних навантажень використовують різні способи та методи. Вибір конкретного способу залежить від діапазону частот, за якого відбувається експлуатація, масогабаритних характеристик, температури тощо.

На сьогоднішній день проектувальники мають доволі широкий вибір можливих конструктивних рішень: від тривіального підвищення жорсткості конструкції до використання досить складних активних віброзахисних систем. Надалі зупинимося на пасивних вібраційних захисних системах, які встановлюють між джерелом вібрації та об'єктом, що захищається. Ідея пасивних систем віброзахисту полягає у використанні власних стабільних параметрів конструкції, без залучення додаткового джерела енергії, тобто, для прикладу, використання пружних елементів, ресор тощо. Їхньою важливою перевагою є простота конструкцій і мінімальна або повністю відсутня енерговитрата, що суттєво зменшує вартість експлуатації та виготовлення. До недоліків більшості пасивних систем можна віднести те, що віброзахист для їхньої переважної більшості проводять на частотах більше ніж 20 Гц.

Окреме місце серед пасивних систем посідають віброзахисні системи з квазінульовою жорсткістю (ВСКЖ). Вони є синтезом несучого елемента і коректора жорсткості. Несучий елемент має забезпечувати сприйняття заданого статичного навантаження і можливість переміщення в заданому інтервалі амплітуд. Коректор жорсткості призначений для зменшення сумарної жорсткості віброзахисної системи до заданих наперед значень за певним законом. Детально класифікацію існуючих схем ВСКЖ і методи розрахунків викладено в роботі П. М. Алабужева [1].

У цій роботі метою є порівняльний аналіз силових і жорсткісних характеристик ВСКЖ двох конструктивних типів. Згідно з класифікацією, запропонованою Алабужевим, коректори жорсткості і, відповідно, ВСКЖ поділяють на три типи (рис. 1).

На всіх наведених схемах вертикально розташований несучий пружний елемент сприймає статичне навантаження, обумовлене дією об'єкту, що підлягає захисту. Пружні еле-

менти коректора жорсткості в положенні статичної рівноваги розташовані вертикально, а для коректора типу  $C$  це відповідає положенню, коли центри профілюючої поверхні і котка коректора лежать на одній лінії.

Враховуючи багато в чому тотожність характеристик коректорів типу  $B$  і  $C$ , в подальшому аналізі обмежимося порівняльним аналізом лише коректорів типу  $A$  і  $C$ .

Для дослідження силових і жорсткісних характеристик коректора типу  $A$  за початок координат обрано положення, в якому пружина коректора знаходиться у вертикальному положенні. Її попередньо підтискають, і при  $x = 0$  її попередньо здеформовано на величину  $\delta_0$ .

Силу та жорсткісну характеристику коректора типу  $A$  (рис. 1а) описують функції [1]:

$$F_k = c_2 x - \frac{c_2 L_0 x}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad c_k = c_2 \left( 1 - \frac{a^2 L_0}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}} \right),$$

де  $c_2$  — жорсткість пружного елемента коректора,  $L_0$  — довжина пружного елемента коректора в недеформованому стані,  $a$  — найкоротша відстань між шарнірами пружини коректора.

Ввівши безрозмірні величини, можна переписати рівняння у вигляді

$$F_{kc} = x_c - \frac{(1 + \delta_c) * x_c}{\sqrt{1 + x_c^2}}, \quad c_{kc} = 1 - \frac{1 + \delta_c}{\sqrt{(1 + x_c^2)^3}},$$

де  $F_{kc} = \frac{F_k}{c_2 a}$ ,  $c_{kc} = \frac{c_k}{c_2}$ ,  $x_c = \frac{x}{a}$ ,  $\delta_c = \frac{\delta_0}{a}$ .

На рис. 2, 3 зображено функцію силової та жорсткісної характеристики від переміщення  $x_c$ . Криві 1–5 побудовано при значеннях  $\delta_c = 0, 0,3, 0,7, 1,0, 1,2$  відповідно.

Коректори типу  $B$  (рис. 1б) відрізняються від коректорів типу  $A$  тим, що пружний елемент діє на шток через шатун довжиною  $l$ . Коректори типу  $C$  мають такі самі силові та жорсткісні характеристики, що й коректори типу  $B$ , лише роль шатуна довжиною  $l$  тут виконує круговий профіль із радіусом  $r_1 + r_2$ . Силова й жорсткісна характеристики коректора типу  $B$  мають вигляд

$$F_k = c_2 x \left( \frac{l - \delta_0}{\sqrt{l^2 - x^2}} - 1 \right), \quad c_k = c_2 \left( \frac{1 - \delta_0}{\sqrt{(l^2 - x^2)^3}} - 1 \right),$$

Ввівши безрозмірні величини, можна переписати рівняння у вигляді

$$F_{kc} = x_c \left( \frac{1 - \delta_c}{\sqrt{1 - x_c^2}} - 1 \right), \quad c_{kc} = \frac{1 - \delta_c}{\sqrt{(1 - x_c^2)^3}} - 1,$$

де  $F_{kc} = \frac{F_k}{c_2 l}$ ,  $c_{kc} = \frac{c_k}{c_2}$ ,  $x_c = \frac{x}{l}$ ,  $\delta_c = \frac{\delta_0}{l}$ .

Криві силових характеристик при  $0 < \delta_c < 1$  мають точку перегину в початку координат і по два екстремуми в точках:

$$x_c = \pm \sqrt{1 - \sqrt[3]{(1 - \delta_c)^2}}.$$

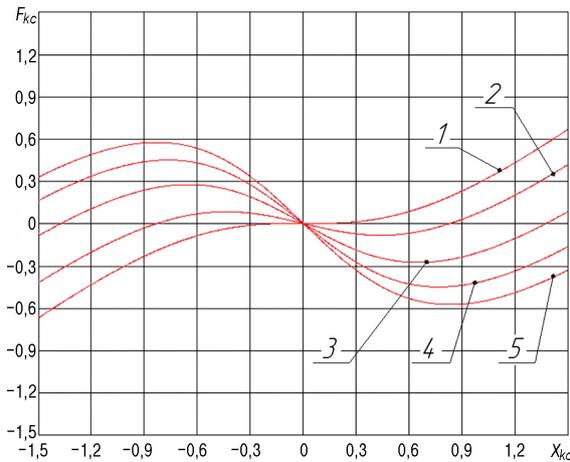


Рис. 2. Силова характеристика коректора типу А.

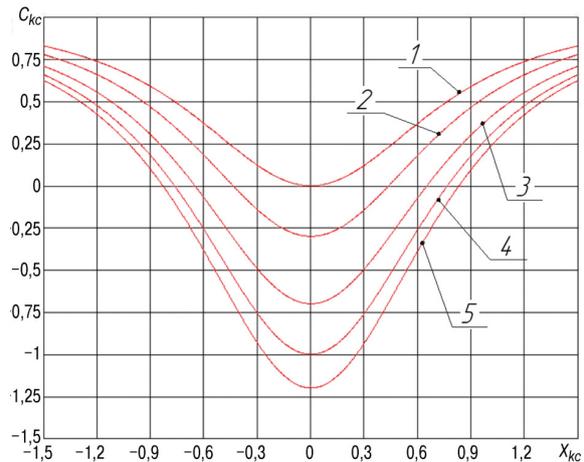


Рис. 3. Жорсткісна характеристика коректора типу А.

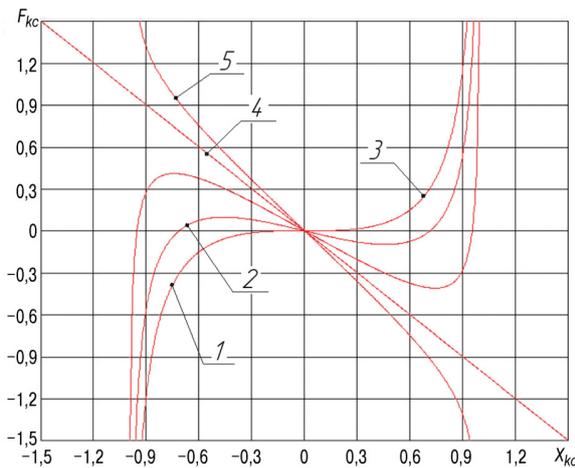


Рис. 4. Силова характеристика коректора типу В та С.

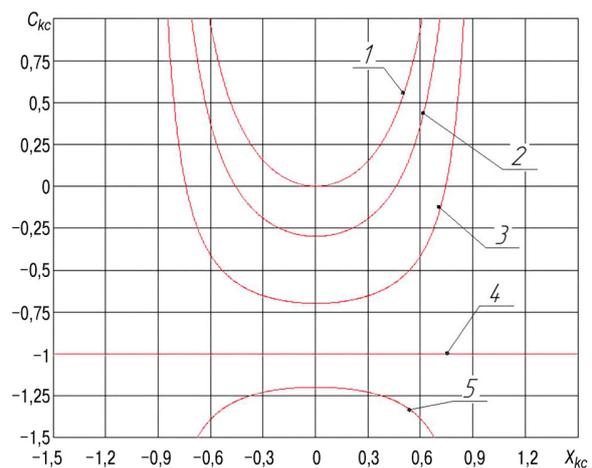


Рис. 5. Жорсткісна характеристика коректора типу В та С.

Інтервал переміщення, на якому жорсткість від'ємна, дорівнює  $2x_c$ .

На рис. 4, 5 зображено залежність силової та жорсткісної характеристики від  $x_c$ . Графіки 1–5 побудовано при різних значеннях параметра  $\delta_c = 0, 0,3, 0,7, 1,0, 1,2$  відповідно.

Ці коректори мають ділянки переміщення з від'ємною жорсткістю, і величина цієї ділянки залежить від жорсткості пружного елемента, параметрів конструкції та величини  $\delta_c$ . Можна зробити висновок, що в коректорах типу А, на відміну від коректорів типу В і С, при будь-яких параметрах є ділянки з квазінульовою жорсткістю.

Силкові характеристики в коректорах типу А завжди нелінійні, навіть при  $\delta_c = 1$ . У системах В та С ділянки з квазінульовою жорсткістю є лише при  $\delta_c < 1$ . При  $\delta_c = 1$  силкові та жорсткісні характеристики коректорів типу В та С стають лінійними.

Віброзахисні системи з квазінульовою жорсткістю — це синтез пружин, які мають постійну жорсткість, і коректорів із від'ємною жорсткістю, які підключають паралельно.

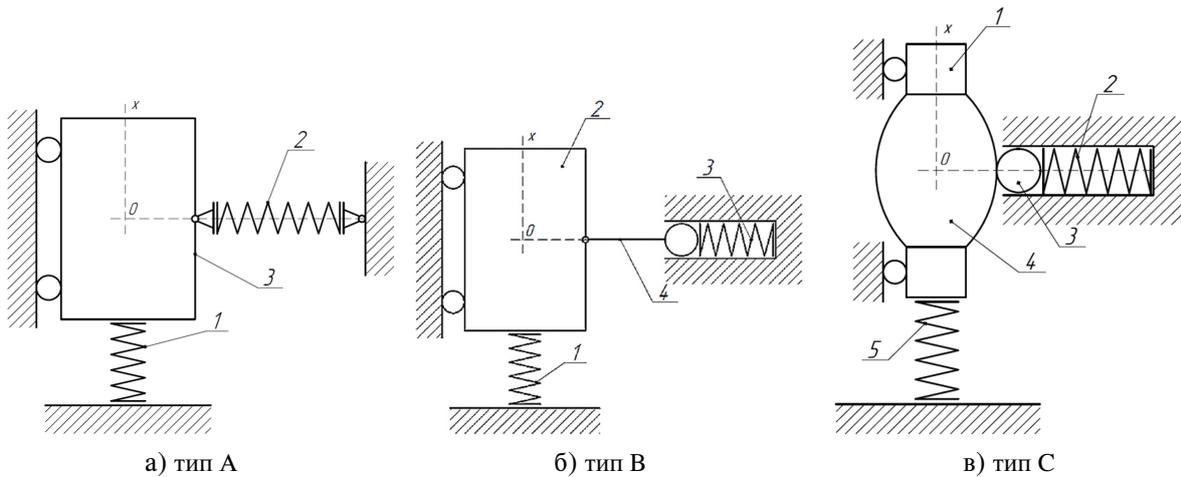


Рис. 6. Приклади конструктивних схем ВСКЖ трьох типів.

ВСКЖ теж ділять на три типи згідно з коректором, який використано у системі — тип А, В та С (рис. 6). На рис. 6а наведено принципову схему ВСКЖ типу А. Система складається з несучої основної пружини 1 з жорсткістю  $c_1$ , об'єкта віброізоляції з масою  $m$  і коректора 2 із жорсткістю  $c_2$ . Жорсткісні та силові характеристики ВСКЖ типу А визначають за формулами [1]:

$$c = nc_2 \left( 1 - \frac{(\delta_0 + a) * a^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}} \right) + c_1,$$

$$F = nc_2 x \left( 1 - \frac{\delta_0 + a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) + c_1 x + c_1 \lambda_0,$$

де  $n$  — кількість однакових пружних елементів, які використовують як коректори жорсткості,  $\lambda_0$  — початкова деформація основної несучої пружини під вагою об'єкта віброізоляції у стані статичної рівноваги.

Ввівши безрозмірні величини, можна записати силову та жорсткісну характеристики в такому вигляді:

$$c_c = nc_{2c} \left( 1 - \frac{1 + \delta_c}{\sqrt{(1 + x_c^2)^3}} \right) + 1, \quad (1)$$

$$F_c = nc_{2c} x_c \left( 1 - \frac{1 + \delta_c}{\sqrt{1 + x_c^2}} \right) + x_c + \lambda_c, \quad (2)$$

де  $F_c = \frac{F}{c_1 a}$ ,  $c_c = \frac{c}{c_1}$ ,  $x_c = \frac{x}{a}$ ,  $\delta_c = \frac{\delta_0}{a}$ ,  $c_{2c} = \frac{c_2}{c_1}$ ,  $\lambda_c = \frac{\lambda_0}{a}$ .

При  $x = 0$  система матиме найменшу жорсткість:

$$c|_{x=0} = c_1 - \frac{nc_2 \delta_0}{a}$$

або при застосуванні безрозмірних величин:

$$c_c|_{x=0} = 1 - nc_{2c}\delta_c.$$

Умова, за якої система має нульову жорсткість у точці  $x = 0$ :

$$c_1 a = nc_2 \delta_0$$

або при застосуванні безрозмірних величин:

$$nc_{2c}\delta_c = 1. \quad (3)$$

Ділянку переміщення  $s$  для системи типу  $A$ , на якій спостерігається квазінульова жорсткість, визначаємо за формулою

$$s = 2\sqrt{\sqrt[3]{[a^2(a + \delta_0)]^2} - a^2}$$

або, при застосуванні безрозмірних величин,

$$s_c = 2\sqrt{\sqrt[3]{(1 + \delta_c)^2} - 1},$$

де  $s_c = \frac{s}{a}$ .

Таким чином, у ВСКЖ типу  $A$  можна отримати практично скільки завгодно малу жорсткість на заданій ділянці переміщення.

На рис. 6б зображено принципову схему ВСКЖ типу  $B$ . Система складається з несучої основної пружини  $1$  з жорсткістю  $c_1$ , об'єкта віброізоляції  $2$  масою  $m$ , пружини коректора  $3$  з жорсткістю  $c_2$  і стержня  $4$  довжиною  $l$ . Жорсткісні та силові характеристики ВСКЖ типу  $B$  визначають формули

$$c = nc_2 \left( \frac{(l - \delta_0) * l^2}{\sqrt{(l^2 - x^2)^3}} - 1 \right) + c_1, \quad (4)$$

$$F = nc_2 x \left( \frac{l - \delta_0}{\sqrt{l^2 - x^2}} - 1 \right) + c_1 x + c_1 \lambda_0. \quad (5)$$

Увівши безрозмірні параметри, їх можна переписати у вигляді

$$c_c = nc_{2c} \left( \frac{1 - \delta_c}{\sqrt{(1 - x_c^2)^3}} - 1 \right) + 1, \quad (6)$$

$$F_c = nc_{2c} x_c \left( \frac{1 - \delta_c}{\sqrt{1 - x_c^2}} - 1 \right) + x_c + \lambda_c, \quad (7)$$

де  $F_c = \frac{F}{c_1 l}$ ,  $c_c = \frac{c}{c_1}$ ,  $x_c = \frac{x}{l}$ ,  $\delta_c = \frac{\delta_0}{l}$ ,  $c_{2c} = \frac{c_2}{c_1}$ ,  $\lambda_c = \frac{\lambda_0}{l}$ .

Умова, при якій система  $B$  матиме нульову жорсткість у точці  $x = 0$ :

$$c_1 l = nc_2 \delta_0. \quad (8)$$

Ділянку переміщення  $s$  для систем типу  $B$ , на якій жорсткість ВСКЖ квазінульова, можна визначити за формулою

$$s = 2\sqrt{l^2 - \sqrt[3]{[l^2(l - \delta_0)]^2}} \quad (9)$$

або, ввівши безрозмірні параметри:

$$s_c = 2\sqrt{1 - \sqrt[3]{(1 - \delta_c)^2}}, \quad (10)$$

де  $s_c = \frac{s}{l}$ .

На рис. 6в зображено принципову схему ВСКЖ типу  $C$ . Система складається з об'єкта віброізоляції  $1$ , пружини коректора  $2$  з жорсткістю  $c_2$ , ролика  $3$ , кулачка  $4$  і несучої основної пружини  $5$  з жорсткістю  $c_1$ . Властивості системи повністю співпадають із властивостями ВСКЖ типу  $B$ , тому формули (4)–(10) також діють для даного типу систем. Різниця в тому, що замість параметра  $l$  в системі введено параметр  $r_1 + r_2$ , який є сумою радіусів кривини кулачка  $4$  та ролика  $3$ . Рівняння (4), (5) для системи типу  $C$  набувають вигляду

$$c = nc_2 \left( \frac{[(r_1 + r_2) - \delta_0] * (r_1 + r_2)^2}{\sqrt{((r_1 + r_2)^2 - x^2)^3}} - 1 \right) + c_1,$$

$$F = nc_2 x \left( \frac{(r_1 + r_2) - \delta_0}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - x^2}} - 1 \right) + c_1 x + c_1 \lambda_0.$$

У рівняннях (6), (7) безрозмірні параметри дорівнюють

$$F_c = \frac{F}{c_1(r_1 + r_2)}, \quad c_c = \frac{c}{c_1}, \quad x_c = \frac{x}{r_1 + r_2}, \quad \delta_c = \frac{\delta_0}{r_1 + r_2}, \quad c_{2c} = \frac{c_2}{c_1}, \quad \lambda_c = \frac{\lambda_0}{r_1 + r_2}.$$

Рівняння (8) для систем типу  $C$  можна переписати у вигляді

$$c_1(r_1 + r_2) = nc_2\delta_0.$$

Рівняння (3) справедливе для всіх типів систем, лише для кожного типу  $\delta_c$  буде мати своє розшифрування.

Ділянку переміщення  $s$  для систем типу  $C$ , на якій жорсткість ВСКЖ квазінульова, можна визначити за формулою

$$s = 2\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - \sqrt[3]{[(r_1 + r_2)^2(r_1 + r_2) - \delta_0]^2}}.$$

Формула (10) актуальна також і для системи типу  $C$ , але при цьому  $s_c = \frac{s}{r_1 + r_2}$ .

З рівнянь (1), (2) видно, що на жорсткісні та силові характеристики ВСКЖ впливає багато параметрів, серед яких  $c_{2c}$ ,  $\delta_c$ ,  $\lambda_c$  і  $n$ . У роботі досліджено вплив параметрів  $c_{2c}$  і  $\delta_c$  для ВСКЖ різних типів. Сім'ї графіків силових характеристик ВСКЖ типу  $A$  і характеристик жорсткості наведено на рис. 7–10.

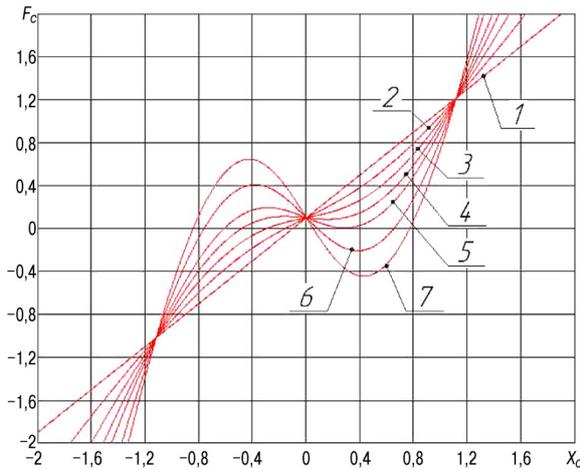


Рис. 7. Силлові характеристики ВСКЖ типу А залежно від  $c_{2c}$ . Криві 1–7 побудовано для  $c_{2c} = 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1,0, 1,5, 2,0$  відповідно.

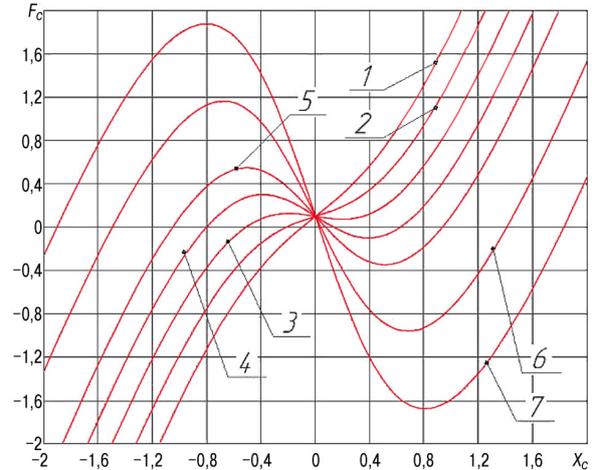


Рис. 8. Силлові характеристики ВСКЖ типу А залежно від  $\delta_c$ . Криві 1–7 побудовано для  $\delta_c = 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1,0, 1,5, 2,0$  відповідно.

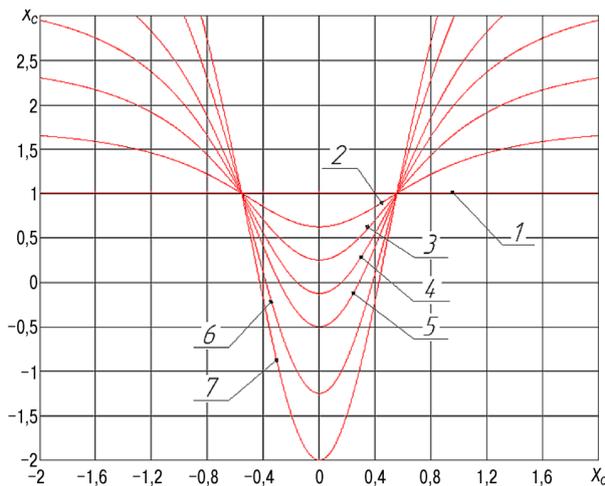


Рис. 9. Жорсткісні характеристики ВСКЖ типу А залежно від  $c_{2c}$ . Криві 1–7 побудовано для  $c_{2c} = 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1,0, 1,5, 2,0$  відповідно.

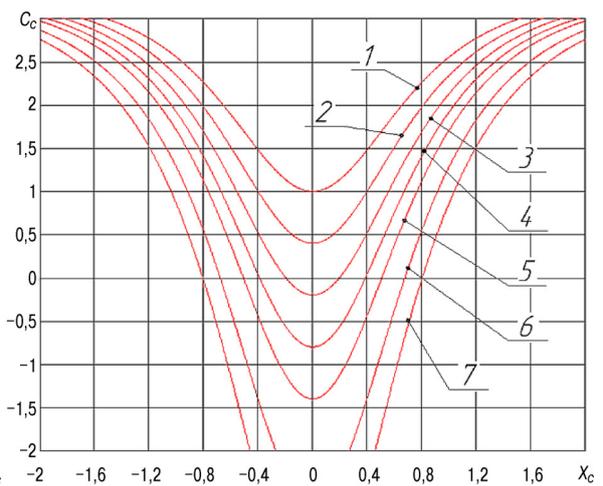


Рис. 10. Жорсткісні характеристики ВСКЖ типу А залежно від  $\delta_c$ . Криві 1–7 побудовано для  $\delta_c = 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1,0, 1,5, 2,0$  відповідно.

Сім'ї графіків силкових і жорсткісних характеристик ВСКЖ типу  $B$  і  $C$  наведено на рис. 11 – 14. Аналіз наведених графіків доводить, що для ВСКЖ типу  $A$  лише за умови відсутності коректора, тобто  $c_{2c} = 0$ , силкові та жорсткісні характеристики стають лінійними (рис. 7, 9). Зі збільшенням співвідношення жорсткості коректора до жорсткості основної пружини силкові характеристики завжди є нелінійними.

Аналіз графіків, наведених на рис. 8, 10, дозволяє зробити висновок, що при будь-якому значенні  $\delta_c$  силкові характеристики є нелінійними.

При підборі параметрів, які задовольнятимуть рівняння (3), можна досягти ділянки квазінульової жорсткості при  $x = 0$ .

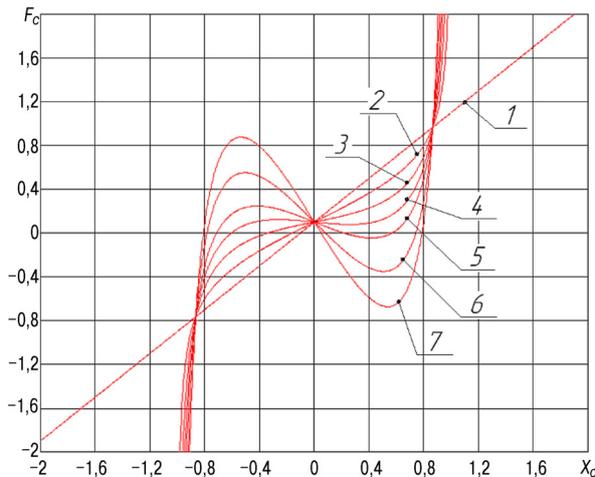


Рис. 11. Силлові характеристики ВСКЖ типу  $B$  та  $C$  залежно від  $c_{2c}$ . Криві 1–7 побудовано для  $c_{2c} = 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1,0, 1,5, 2,0$  відповідно.

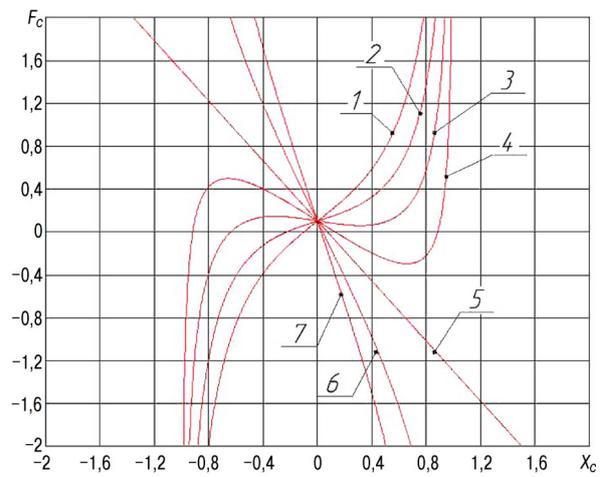


Рис. 12. Силлові характеристики ВСКЖ типу  $B$  та  $C$  залежно від  $\delta_c$ . Криві 1–7 побудовано для  $\delta_c = 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1,0, 1,5, 2,0$  відповідно.

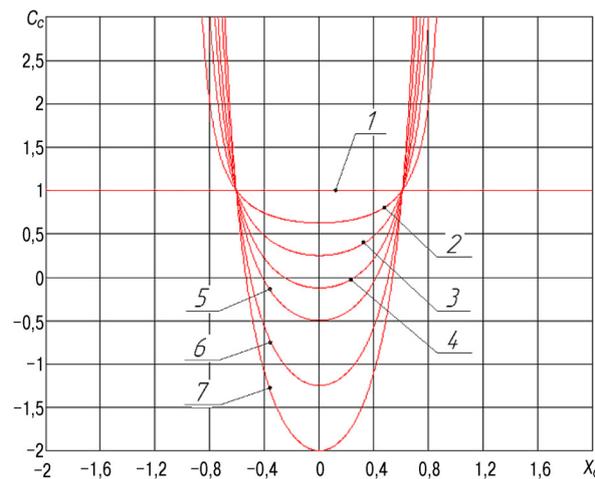


Рис. 13. Жорсткісні характеристики ВСКЖ типу  $B$  та  $C$  залежно від  $c_{2c}$ . Криві 1–7 побудовано для  $c_{2c} = 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1,0, 1,5, 2,0$  відповідно.

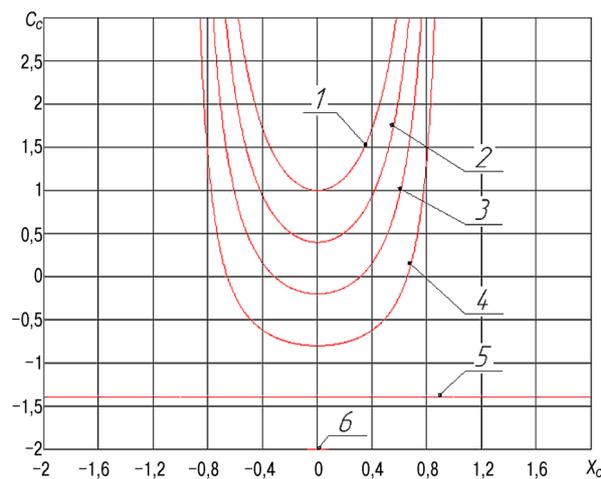


Рис. 14. Жорсткісні характеристики ВСКЖ типу  $B$  та  $C$  залежно від  $\delta_c$ . Криві 1–7 побудовано для  $\delta_c = 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1,0, 1,5, 2,0$  відповідно.

Дослідження силових і жорсткісних характеристик ВСКЖ типу  $B$  і  $C$  свідчать, що на відміну від ВСКЖ типу  $A$  силлові характеристики можуть бути як лінійними (при  $\delta_c = 1$ ), так і нелінійними. При  $\delta_c > 1$  крива силової характеристики перегинається в протилежну сторону (рис. 12). Це відрізняє системи типу  $B$  та  $C$  від систем типу  $A$ . При  $\delta_c < 1$  жорсткісні характеристики мають вигляд додатної параболи (рис. 14). Як і в системах типу  $A$ , при підборі параметрів, які задовольнятимуть рівняння (3), можна досягнути ділянку квазінульової жорсткості в точці  $x = 0$ . При  $\delta_c > 1$  крива стає схожою на перевернуту параболу і жорсткісні характеристики є тільки від'ємними.

Як видно з графіків на рис. 11, 13, при  $c_{2c} = 0$  силові та жорсткісні характеристики описано лінійною функцією, так само як системи типу  $A$ .

Керувати жорсткістю ВСКЖ можна завдяки зміні конструктивних параметрів ВСКЖ і параметра початкового підтискання пружини коректора  $\delta_0$ .

Слід зазначити, що з технологічної точки зору і надійності реалізація конструкції ВСКЖ типу  $C$  в окремих випадках має низку переваг. Деякі конструкції ВСКЖ і підходи до їхнього проектування висвітлено в роботах [2, 3].

Результатом проведеної роботи стала розробка ВСКЖ контейнерного типу [4]. Згадана конструкція дозволяє забезпечувати віброзахист від 5 Гц.

**Висновки.** Наведені результати свідчать, що ВСКЖ мають силові характеристики і характеристики жорсткості, що регулюється. Проектування “під конкретний об’єкт” можна проводити у широкому діапазоні частот, забезпечивши оптимальні віброзахисні параметри ВСКЖ. Забезпечення оптимальних характеристик досягають комбінацією жорсткостей несучого пружного елемента, геометричних характеристик і деформацією коректора. Суттєва нелінійність жорсткості при амплітудах вище заданих відіграє роль м’яких упорів і забезпечує безударне повернення у робочий діапазон амплітуд коливань.

Досвід експлуатації ряду конструкцій з корекцією жорсткості довів, що зменшення жорсткості до “практичного” нуля є нераціональним. Сумарна жорсткість має забезпечувати стійке повернення об’єкта, що захищається, в положення статичної рівноваги. При занадто малій жорсткості можливі удари об фізичні обмежувачі при розташування об’єкта, що захищається, в положенні поблизу крайніх точок переміщень на початку дії навантажень.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

## Література

1. P. Alabuzhev, A. Gritchyn, *Vibration protecting and measuring systems with quasi-zero stiffness*, Hemisphere Publishing Corporation, New York (1989).
2. О. Г. Архипов, В. В. Сухов, Я. С. Козей, О. П. Мариношенко, *Віброзахисні системи з корекцією жорсткості*, S. World J. Bulgaria, № 7, Pt 1, 85–92 (2021).
3. О. Arkhypov, V. Bakun, V. Sukhov, Y. Kozey, O. Marynoshenko, *Vibro protective systems of quasi zero rigidity, Theoretical aspects of modern engineering: collective monograph*, International Science Group, Boston (2020).
4. О. Г. Архипов, В. В. Сухов, Я. С. Козей, Г. М. Черняк, *Віброізолятор квазінульової жорсткості*, Патент України на корисну модель № 144624, бюл. № 19 від 29.05.2020.

Одержано 14.07.23