УДК 517.9

ІТЕРАЦІЙНІ СХЕМИ ДЛЯ ПЕРІОДИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ІЗ ПЕРЕМИКАННЯМИ*

П. Беннер

Ін-т динаміки склад. техн. систем ім. Макса Планка, Магдебург, Німеччина
e-mail: benner@mpi-magdeburg.mpg.de

С. М. Чуйко

Ін-т динаміки склад. техн. систем ім. Макса Планка, Магдебург, Німеччина

Донбас. держ. пед. ун-т
вул. Генерала Батюка, 19, Слов'янськ, Україна
e-mail: chuiko@mpi-magdeburg.mpg.de

О. Л. Зуєв

Ін-т динаміки склад. техн. систем ім. Макса Планка, Магдебург, Німеччина

Ун-т Отто фон Ґеріке, Магдебург, Німеччина

Ін-т прикл. математики і механіки НАН України
вул. Добровольського, 1, Слов'янськ, 84100, Україна
e-mail: alexander.zuyev@gmail.com, zuyev@mpi-magdeburg.mpg.de

We investigate the weakly nonlinear boundary-value problem for a system of nonlinear ordinary differential equations with discontinuous right-hand side and periodic boundary conditions. A modified iterative scheme is proposed for constructing approximate solutions of this problem. In contrast to our previous results, this scheme is based on a refined expansion of the right-hand side of the differential equation under consideration and a new choice of the initial approximation. The proposed iterative procedure is applied to a mathematical model of non-isothermal chemical reaction with periodic switching of control functions. In the considered example, the convergence of our iterative scheme to the required solution is illustrated by analysis of discrepancies in the boundary-value problem. We compute estimates of the range of a small parameter for which the operator used for the construction of required solutions is contractive. The simulation results confirm that the proposed computational scheme guarantees the better accuracy in comparison to the simple iteration method.

Розглянуто слабку нелінійну крайову задачу для системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь із розривною правою частиною за періодичних крайових умов. Для побудови наближених розв'язків цієї задачі запропоновано модифіковану ітераційну схему. На відміну від попередніх результатів ця схема ґрунтується на уточненому розкладі правої частини розглянутого диференціального рівняння та новому виборі початкового наближення. Запропоновану ітераційну процедуру застосовано до математичної моделі неізотермічної хімічної реакції з періодичним перемиканням керуючих функцій. У розглянутому прикладі збіжність ітераційної схеми до шуканого розв'язку проілюстровано аналізом нев'язок у крайовій задачі. Обчислено оцінки діапазону малого параметра, для якого оператор, що використовується при побудові шуканих розв'язків, є стискаючим. Результати чисельного моделювання підтверджують, що запропонована схема забезпечує кращу точність порівняно з методом простих ітерацій.

* Частково підтримано Німецьким науково-дослідним фондом у рамках гранту ZU 359/2-1.

1. Постановка задачі. У цій статті досліджено задачу [1–3] про побудову розв'язку

$$z(t,\varepsilon)\colon z(\cdot,\varepsilon)\in \mathbb{C}^1\{[a,b]\backslash\{\tau_i\}_I\}\cap \mathbb{C}[a,b], \quad z(t,\cdot)\in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

нелінійної періодичної крайової задачі

$$\frac{dz}{dt} = A\,z + \varepsilon\, f(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(z,\varepsilon), \qquad \ell z(\cdot,\varepsilon) := z(a,\varepsilon) - z(b,\varepsilon) = 0 \tag{1}$$

у малому околі розв'язку

$$z_0(t)\in \mathbb{C}^1\{[a,b]\backslash\{\tau_i\}_I\}\cap \mathbb{C}[a,b]$$

породжуючої задачі

$$\frac{dz_0}{dt} = A\,z_0, \quad \ell z_0(\cdot) := z_0(a) - z_0(b) = 0. \tag{2}$$

Тут A — стала $(n\times n)$-вимірна матриця, $Z(z,\varepsilon)$ — нелінійна вектор-функція, неперервно-диференційовна за аргументом z у малому околі розв'язку породжуючої задачі (2) та неперервно-диференційовна за малим параметром ε на відрізку $[0,\varepsilon_0]$. Крім того, функція

$$f(t,\varepsilon) := \begin{cases} \lambda_0(\varepsilon), & t\in [a,\tau_1[,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \\ \lambda_p(\varepsilon), & t\in[\tau_p,b], \end{cases}$$

є кусково-неперервною за малим параметром ε на відрізку $[0,\varepsilon_0]$. Шуканий розв'язок $z(t,\varepsilon)$ крайової задачі (1) припускаємо неперервно-диференційовним за незалежною змінною $t\in[a,b]$ за винятком фіксованих точок перемикання [3]:

$$a<\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_p<b, \quad a:=\tau_0.$$

У цих точках розв'язок $z(t,\varepsilon)$ крайової задачі (1) можливо зазнає обмеженого розриву похідної. Актуальність вивчення крайової задачі (1) із перемиканнями пов'язано з широким застосуванням подібних задач при вивченні неізотермічних хімічних реакцій. Приклади моделювання таких реакцій наведено у [4–6]. Наприкінці цієї роботи наведено приклад знаходження наближень до періодичного розв'язку цієї задачі з використанням побудованої авторами ітераційної схеми.

2. Побудова розв'язку методом простих ітерацій. Позначимо нормальну $(X(a) = I_n)$ фундаментальну матрицю породжуючої задачі (2) через $X(t)$. Внаслідок однорідності в некритичному випадку

$$\det Q \neq 0, \quad Q := \ell X(\cdot),$$

породжуюча задача (2) має лише тривіальний розв'язок: $z_0(t)\equiv 0$. Позначимо також оператор Гріна

$$K[g(s)](t) := X(t)\int\limits_a^t X^{-1}(s)\,g(s)\,ds, \quad t\in[a,b],$$

задачі Коші

$$\frac{dy}{dt} = A\,y + g(t), \quad y(a) = 0.$$

Тут $g(t) \in \mathbb{C}\{[a,b]\backslash\{\tau_i\}_I\}$ — кусково-неперервна (за винятком фіксованих точок τ_i) вектор-функція. Визначений оператор Гріна задачі Коші для фіксованої вектор-функції $g(t)$ є неперервним на відрізку $[a,b]$. Щоб пересвідчитись у цьому, достатньо обчислити розриви оператора Гріна задачі Коші в околі точок перемикання τ_i.

Як відомо [1], задача про побудову розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) у малому околі фредгольмової породжуючої задачі (2) у некритичному випадку є однозначно розв'язною для довільної неоднорідності $f(t,\varepsilon)$ і для довільної нелінійної вектор-функції $Z(z,\varepsilon)$.

За відсутності неоднорідності задача про побудову розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) стає автономною. Основна увага при дослідженні нелінійних автономних періодичних крайових задач традиційно [1, 7, 8] зосереджувалася на критичних випадках: $\det Q = 0$. Шуканий розв'язок нелінійної автономної періодичної крайової задачі зазвичай визначався на проміжку, довжина якого була невідомою і залежала від малого параметра. Тому основною задачею цієї статті є перенесення результатів [1, 7, 8] на нелінійну періодичну крайову задачу (1) з перемиканнями в некритичному випадку, зокрема, побудова збіжних ітераційних схем для знаходження розв'язку цієї задачі на проміжку фіксованої довжини.

Нелінійна вектор-функція $Z(z,\varepsilon)$ неперервно-диференційовна за невідомою z у малому околі тривіального розв'язку породжуючої задачі (2) і неперервно-диференційовна за малим параметром ε на відрізку $[0,\varepsilon_0]$, тому в зазначеному околі має місце розклад

$$Z(z_k(t,\varepsilon),\varepsilon) = Z(z_0(t),0) + A_1(t)\, z_k(t,\varepsilon) + \varepsilon A_2(t) + R(z_k(t,\varepsilon),\varepsilon), \tag{3}$$

де

$$A_1(t) = \left.\frac{\partial Z(z,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z=z_0(t),\\ \varepsilon=0}}, \qquad A_2(t) = \left.\frac{\partial Z(z,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{z=z_0(t),\\ \varepsilon=0}}.$$

Залишок $R(z_k(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$ розкладу функції $Z(z,\varepsilon)$ більш високого порядку малості за невідомою $z_k(t,\varepsilon)$ у малому околі нуля та за малим параметром ε в малому додатному околі нуля ніж перші три члени розкладу, тому [1, 9 – 11]

$$R(z,\varepsilon)\Big|_{\substack{z=z_k(t,\varepsilon),\\ \varepsilon=0}} \equiv 0, \qquad \left.\frac{\partial R(z,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z=z_k(t,\varepsilon),\\ \varepsilon=0}} \equiv 0, \qquad \left.\frac{\partial R(z,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{z=z_k(t,\varepsilon),\\ \varepsilon=0}} \equiv 0.$$

Перше наближення до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) у некритичному випадку

$$z_1(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G[f(s,\varepsilon) + Z(z_0(s),0)](t)$$

визначає оператор Гріна

$$G[g(s)](t) = K[g(s)](t) - X(t)Q^{-1}\ell K[g(s)](\cdot)$$

періодичної крайової задачі [1, 8]

$$\frac{dz}{dt} = A\, z + g(t), \qquad z(a) - z(b) = 0.$$

Позначимо оператор

$$\Phi(z(t,\varepsilon)) := \varepsilon\, G[f(s,\varepsilon) + Z(z(s,\varepsilon),\varepsilon)](t).$$

Наступні наближення до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) у некритичному випадку шукатимемо у вигляді

$$z_{k+1}(t,\varepsilon) = \Phi(z_k(t,\varepsilon)), \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{4}$$

Збіжність ітераційної схеми вигляду (4) до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) без перемикань у некритичному випадку доведено у монографіях [1, 9, 10]. Доведення збіжності ітераційної схеми (4) до шуканого розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) з перемиканнями у некритичному випадку повністю аналогічне. Область значень малого параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*],\ 0 < \varepsilon_* \le \varepsilon_0$, для яких зберігається збіжність ітераційної схеми (4) до розв'язку крайової задачі (1), можна знайти аналогічно [12] з умови стиснення

$$\left\| \frac{\varepsilon\, \partial \Phi(z_k(t,\varepsilon))}{\partial z} \right\| \le \lambda < 1, \quad \varepsilon \in [0; \varepsilon_*] \subseteq [0; \varepsilon_0], \tag{5}$$

оператора $\Phi(z_k(t,\varepsilon))$, а також за допомогою мажоруючих рівнянь Ляпунова [1, 9, 10].

Лема. *У некритичному випадку* $(\det Q_0 \neq 0)$ *породжуюча періодична крайова задача (1) має лише тривіальний розв'язок* $z_0(t) \equiv 0$. *При цьому задача про побудову розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) у малому околі розв'язку породжуючої задачі (2) у некритичному випадку однозначно розв'язна для довільної неоднорідності* $f(t,\varepsilon)$ *і для довільної нелінійної вектор-функції* $Z(z,\varepsilon)$. *За умови (5) наближення до розв'язку*

$$z(t,\varepsilon)\colon\ z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1\{[a,b]\backslash\{\tau_i\}_I\} \cap \mathbb{C}[a,b], \quad z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

нелінійної періодичної крайової задачі (1) у некритичному випадку визначає ітераційна схема (4).

3. Модифікована ітераційна схема. Для покращення точності наближень до періодичного розв'язку рівняння (1) можна скористатися уточненим [13, с. 386; 14] у порівнянні з (3) розвиненням нелінійної вектор-функції $Z(z_k(t,\varepsilon),\varepsilon)$. Для його побудови використаємо той факт, що нелінійна періодична задача (1) має положення рівноваги

$$z(t,\varepsilon) := u(\varepsilon), \qquad u'(\varepsilon) \equiv 0, \qquad A\,u(\varepsilon) + \varepsilon\, f(t,\varepsilon) + \varepsilon\, Z(u(\varepsilon),\varepsilon) = 0.$$

За виключенням фіксованих точок перемикання

$$a < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_p < b, \quad a := \tau_0,$$

положення рівноваги

$$z(t,\varepsilon) := u(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon^*], \quad 0 < \varepsilon^* \le \varepsilon_0,$$

являє собою неперервну функцію. У точках перемикання положення рівноваги, можливо, зазнає обмеженого розриву. За початкове наближення до положення рівноваги природно взяти розв'язок

$$u_0(\varepsilon) = \begin{cases} -\varepsilon\, A^{-1}(\lambda_0(\varepsilon) + Z(0,0) + \varepsilon\, A_2), & t \in [a, \tau_1[, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ -\varepsilon\, A^{-1}(\lambda_p(\varepsilon) + Z(0,0) + \varepsilon\, A_2), & t \in [\tau_p, b], \end{cases}$$

рівняння

$$A\,u_0(\varepsilon) + \varepsilon\, f(t,\varepsilon) + \varepsilon\, Z(0,0) + \varepsilon^2 A_2(t) = 0.$$

За початкове наближення до положення рівноваги можна також взяти наближений розв'язок рівняння

$$A\,u(\varepsilon) + \varepsilon\, f(t,\varepsilon) + \varepsilon\, Z(u(\varepsilon),\varepsilon) = 0,$$

застосувавши до нього метод Ньютона, або ж його модифікації [15 – 17].

Нелінійна вектор-функція $Z(z,\varepsilon)$ неперервно-диференційовна за невідомою z у малому околі початкового наближення до положення рівноваги $u_0(\varepsilon)$ та неперервно-диференційовна за малим параметром ε на відрізку $[0,\varepsilon_0]$, тому у зазначеному околі має місце розклад

$$Z(u_0(\varepsilon)+v(t,\varepsilon),\varepsilon) = Z(u_0(\varepsilon),0) + \mathcal{A}_1(u_0(\varepsilon))\,v(t,\varepsilon) +$$
$$+\,\varepsilon\,\mathcal{A}_2(u_0(\varepsilon)) + \mathcal{R}(u_0(\varepsilon)+v(t,\varepsilon),\varepsilon),$$

де

$$\mathcal{A}_1(u_0(\varepsilon)) := \left.\frac{\partial Z(z,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z=u_0(\varepsilon),\\ \varepsilon=0}}, \qquad \mathcal{A}_2(u_0(\varepsilon)) := \left.\frac{\partial Z(z,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{z=u_0(\varepsilon),\\ \varepsilon=0}}.$$

Залишок $\mathcal{R}(u_0(\varepsilon)+v(t,\varepsilon),\varepsilon)$ розкладу функції $Z(z,\varepsilon)$ більш високого порядку малості за невідомою $v(t,\varepsilon)$ у малому околі початкового наближення до положення рівноваги $u_0(\varepsilon)$ і за малим параметром ε у малому додатному околі нуля, ніж перші три члени розкладу, тому [1, 9 – 11]

$$\left.\mathcal{R}(u_0(\varepsilon)+v(t,\varepsilon),\varepsilon)\right|_{\substack{v(t,\varepsilon)=0,\\ \varepsilon=0}} \equiv 0, \qquad \left.\frac{\partial \mathcal{R}(u_0(\varepsilon)+v(t,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{v(t,\varepsilon)=0,\\ \varepsilon=0}} \equiv 0,$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{R}(u_0(\varepsilon)+v(t,\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\substack{v(t,\varepsilon)=0,\\ \varepsilon=0}} \equiv 0.$$

Перше наближення

$$z_1(t,\varepsilon)\colon\, z_1(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1\{[a,b]\backslash\{\tau_i\}_I\} \cap \mathbb{C}[a,b], \quad z_1(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) у некритичному випадку

$$z_1(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G[f(s,\varepsilon) + Z(z_0(s),0)](t)$$

знаходимо у малому околі тривіального породжуючого розв'язку $z_0(t) \equiv 0$. Позначимо відхилення першого наближення

$$v_1(t,\varepsilon) := z_1(t,\varepsilon) - u_0(\varepsilon)$$

до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) від положення рівноваги через $u_0(\varepsilon)$. Друге наближення до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1)

$$z_2(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\Big[f(s,\varepsilon) + Z(z_0(s),0) + \mathcal{A}_1(u_0(\varepsilon))\,v_1(s,\varepsilon) +$$
$$+\,\varepsilon\,\mathcal{A}_2(u_0(\varepsilon)) + \mathcal{R}(u_0(\varepsilon)+v_1(s,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t)$$

знаходимо як розв'язок нелінійної періодичної крайової задачі для системи другого наближення

$$\frac{dz_1(t,\varepsilon)}{dt} = A\,z_1(t,\varepsilon) + \varepsilon\, f(t,\varepsilon) +$$
$$+\,\varepsilon\Big[Z(z_0(t),0) + \mathcal{A}_1(u_0(\varepsilon))\,v_1(t,\varepsilon) + \varepsilon\,\mathcal{A}_2(u_0(\varepsilon)) + \mathcal{R}(u_0(\varepsilon)+v_1(t,\varepsilon),\varepsilon)\Big].$$

Позначимо оператор

$$\Psi(z_k(t,\varepsilon)) := \varepsilon\, G\Big[f(s,\varepsilon) + Z(z_0(s),0) + \mathcal{A}_1(u_0(\varepsilon))\,v_k(s,\varepsilon) +$$
$$+\,\varepsilon\,\mathcal{A}_2(u_0(\varepsilon)) + \mathcal{R}(u_0(\varepsilon)+v_k(s,\varepsilon),\varepsilon)\Big](t).$$

Подальші наближення до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) у некритичному випадку шукатимемо у вигляді

$$z_{k+1}(t,\varepsilon) = \Psi(z_k(t,\varepsilon)), \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{6}$$

Збіжність ітераційної схеми вигляду (6) до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) без перемикань у некритичному випадку доведено у монографіях [1, 9, 10]. Доведення збіжності ітераційної схеми (6) до шуканого розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) з перемиканнями у некритичному випадку повністю аналогічне. Область значень малого параметра $\varepsilon \in \big[0,\varepsilon_*\big],\ 0 < \varepsilon_* \le \varepsilon_0$, для яких зберігається збіжність ітераційної схеми (6) до розв'язку крайової задачі (1), можна знайти аналогічно [12] з умови стиснення

$$\left\|\frac{\varepsilon\,\partial\Psi(z_k(t,\varepsilon))}{\partial z}\right\| \le \lambda < 1, \quad \varepsilon \in [0;\varepsilon_*] \subseteq [0;\varepsilon_0], \tag{7}$$

оператора $\Psi(z_k(t,\varepsilon))$, а також за допомогою мажоруючих рівнянь Ляпунова [1, 9, 10].

Теорема. *У некритичному випадку* $(\det Q_0 \neq 0)$ *породжуюча періодична крайова задача (1) має лише тривіальний розв'язок* $z_0(t) \equiv 0$. *При цьому задача про побудову розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) у малому околі розв'язку породжуючої задачі (2) у некритичному випадку однозначно розв'язна для довільної неоднорідності* $f(t,\varepsilon)$ *і для довільної нелінійної вектор-функції* $Z(z,\varepsilon)$. *За умови (7) наближення до розв'язку*

$$z(t,\varepsilon)\colon\ z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1\{[a,b]\backslash\{\tau_i\}_I\} \cap \mathbb{C}[a,b], \quad z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

нелінійної періодичної крайової задачі (1) у некритичному випадку визначає ітераційна схема (6).

Застосуємо побудовані ітераційні схеми (4) і (6) для знаходження наближень до періодичного розв'язку рівняння, яке моделює неізотермічну хімічну реакцію [5].

Приклад. У частковому випадку задача про знаходження наближень до періодичного розв'язку рівняння, яке моделює неізотермічну хімічну реакцію, рівнозначне до задачі про знаходження розв'язку

$$z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1\{[-1,1]\backslash\{\tau\}_I\} \cap \mathbb{C}[-1,1], \quad \tau := 0, \quad z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

періодичної крайової задачі

$$z'(t,\varepsilon) = A\, z(t,\varepsilon) + \varepsilon\, f(t,\varepsilon) + \varepsilon\, Z(z(t,\varepsilon),\varepsilon), \quad \ell z(\cdot,\varepsilon) = 0. \tag{8}$$

Тут A — стала (2×2)-вимірна матриця, власні числа якої не перетинають уявної осі,

$$z(t,\varepsilon) := \begin{pmatrix} x(t,\varepsilon) \\ y(t,\varepsilon) \end{pmatrix}, \qquad f(t,\varepsilon) := \begin{cases} \lambda(\varepsilon), & t \in [-1,0[, \\ \mu(\varepsilon), & t \in [0,1]; \end{cases}$$

крім того,

$$Z(z(t,\varepsilon),\varepsilon) := (1 + x(t,\varepsilon))e^{-\frac{\varepsilon}{1+y(t,\varepsilon)}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Власні числа матриці A не перетинають уявної осі, тому для періодичної задачі для рівняння (8) має місце некритичний випадок [1, 7, 9], а отже, вона однозначно розв'язна; при цьому породжуюча задача (2) має лише тривіальний розв'язок $z_0(t) \equiv 0$. У частковому випадку для

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda(\varepsilon) := -\mu(\varepsilon) := \varepsilon \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

матриця Q має вигляд

$$Q = \begin{pmatrix} e - \dfrac{1}{e} & 0 \\ 0 & e^2 - \dfrac{1}{e^2} \end{pmatrix}, \qquad \det Q = e^3 - e + \frac{1}{e^3} - \frac{1}{e} \neq 0.$$

При цьому, використовуючи ітераційну схему (4), отримуємо

$$z_1(t,\varepsilon) := \varepsilon\, G[f(s,\varepsilon) + Z(z_0(s),0)](t),$$

де

$$z_1(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\varepsilon\left(1 + e + \varepsilon + e\,\varepsilon - 2\,\varepsilon\, e^{-t}\right)}{1+e} \\ \dfrac{\varepsilon\left(1 + \varepsilon - 2\,\varepsilon\, e^{-2t} + e^2\,(1+\varepsilon)\right)}{2(1+e^2)} \end{pmatrix}, \quad t \in [-1,0].$$

Окрім цього,

$$z_1(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \dfrac{\varepsilon\, e^{-t}\left(e^t(-1+\varepsilon) + e^{1+t}(-1+\varepsilon) - 2\,\varepsilon\, e\right)}{1+e} \\ \dfrac{\varepsilon\left(1 - e^2(-1+\varepsilon) - \varepsilon + 2\,\varepsilon\, e^{2-2t}\right)}{2(1+e^2)} \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Розклад функції $Z(z,\varepsilon)$ за невідомою $z_k(t,\varepsilon)$ у малому околі нуля та за малим параметром ε у малому додатному околі нуля визначають матриці

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, знаходимо друге наближення до розв'язку періодичної задачі для рівняння (8)

$$z_2(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\big[f(s,\varepsilon) + Z(z_0(s),0) + A_1(s)z_1(s,\varepsilon) + \varepsilon\, A_2(s)\big](t),$$

зокрема,

$$z_2(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} x_2(t,\varepsilon) \\ y_2(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

де

$$(1+e)^2 x_2(t,\varepsilon) = \varepsilon e^{-t}(-2\varepsilon(-1+\varepsilon+t\varepsilon) - 2e\varepsilon(-1+(2+t)\varepsilon) + e^t\big(-1+\varepsilon+\varepsilon^2\big) +$$
$$+\, 2e^{1+t}\big(-1+\varepsilon+\varepsilon^2\big) + e^{2+t}\big(-1+\varepsilon+\varepsilon^2\big)), \quad t \in [-1,0],$$

$$2\,(1+e)\,\big(1+e^2\big)y_2(t,\varepsilon) = -e^{-2t}\varepsilon\Big(-4e^t\varepsilon^2 - 4e^{2+t}\varepsilon^2 + 2\varepsilon(1+\varepsilon) + 2e\varepsilon(1+\varepsilon) +$$
$$+\, e^{2t}\big(-1+\varepsilon+\varepsilon^2\big) + e^{1+2t}\big(-1+\varepsilon+\varepsilon^2\big) +$$
$$+\, e^{2+2t}\big(-1+\varepsilon+\varepsilon^2\big) + e^{3+2t}\big(-1+\varepsilon+\varepsilon^2\big)\Big), \quad t \in [-1,0].$$

До того ж,

$$(1+e)^2 x_2(t,\varepsilon) = -e^{-t}\varepsilon\Big(-2e\varepsilon(-1+t\varepsilon) - 2e^2\varepsilon(-1+\varepsilon+t\varepsilon) + e^t\big(1-3\varepsilon+\varepsilon^2\big) +$$
$$+\, 2\,e^{1+t}\big(1-3\varepsilon+\varepsilon^2\big) + e^{2+t}\big(1-3\varepsilon+\varepsilon^2\big)\Big), \quad t \in [0,1],$$

$$2(1+e)\big(1+e^2\big)y_2(t,\varepsilon) = e^{-2t}\varepsilon\Big(-4e^{1+t}\varepsilon^2 - 4e^{3+t}\,\varepsilon^2 + 2e^2\varepsilon(1+\varepsilon) +$$
$$+\, 2e^3\varepsilon(1+\varepsilon) + e^{2t}\big(1-3\varepsilon+\varepsilon^2\big) + e^{1+2t}\big(1-3\varepsilon+\varepsilon^2\big) +$$
$$+\, e^{2+2t}\big(1-3\varepsilon+\varepsilon^2\big) + e^{3+2t}\big(1-3\varepsilon+\varepsilon^2\big)\Big), \quad t \in [0,1].$$

Аналогічно знаходимо третє наближення до розв'язку періодичної задачі для рівняння (8)

$$z_3(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\big[f(s,\varepsilon) + Z(z_0(s),0) + A_1(s)z_2(s,\varepsilon) + \varepsilon\, A_2(s)\big](t),$$

зокрема,

$$z_3(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} x_3(t,\varepsilon) \\ y_3(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

де

$$(1+e)^3 x_3(t,\varepsilon) = -e^{-t}\varepsilon\Big(-\varepsilon\big(2 - 2(1+t)\varepsilon + \big(2+2t+t^2\big)\varepsilon^2\big) -$$
$$-\, e^2\varepsilon\big(2 - 2(2+t)\varepsilon + \big(5+4t+t^2\big)\varepsilon^2\big) + e^t\big(1-\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3\big) -$$
$$-\, e\varepsilon\big(4 - 2(3+2t)\varepsilon + \big(5+6t+2t^2\big)\varepsilon^2\big) + 3e^{1+t}\big(1-\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3\big) +$$
$$+\, 3e^{2+t}\big(1-\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3\big) + e^{3+t}\big(1-\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3\big)\Big), \quad t \in [-1,0],$$

$$2(1+e)^2\big(1+e^2\big)y_3(t,\varepsilon) = e^{-2t}\varepsilon\Big(-4e^t\varepsilon^2(-1+t\varepsilon) - 4e^{2+t}\varepsilon^2(-1+t\varepsilon) -$$
$$- 4e^{1+t}\varepsilon^2(-1+\varepsilon+t\varepsilon) - 4e^{3+t}\varepsilon^2(-1+\varepsilon+t\varepsilon) -$$
$$- 2\varepsilon\big(1+\varepsilon+\varepsilon^2\big) - 4e\varepsilon\big(1+\varepsilon+\varepsilon^2\big) - 2e^2\varepsilon\big(1+\varepsilon+\varepsilon^2\big) +$$
$$+ e^{2t}\big(1-\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3\big) + 2e^{1+2t}\big(1-\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3\big) +$$
$$+ 2e^{2+2t}\big(1-\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3\big) + 2e^{3+2t}\big(1-\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3\big) +$$
$$+ e^{4+2t}\big(1-\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3\big)\Big), \quad t \in [-1,0].$$

Крім того,

$$(1+e)^3x_3(t,\varepsilon) = e^{-t}\varepsilon\Big(e^t(-1+\varepsilon)^3 + 3e^{1+t}(-1+\varepsilon)^3 + 3e^{2+t}(-1+\varepsilon)^3 + e^{3+t}(-1+\varepsilon)^3 -$$
$$- e\varepsilon\big(2-2t\varepsilon+\varepsilon^2+t^2\varepsilon^2\big) - e^3\varepsilon\big(2-2(1+t)\varepsilon+\big(2+2t+t^2\big)\varepsilon^2\big) -$$
$$- e^2\varepsilon\big(4-2(1+2t)\varepsilon+\big(1+2t+2t^2\big)\varepsilon^2\big)\Big), \quad t \in [0,1],$$

$$2(1+e)^2\big(1+e^2\big)y_3(t,\varepsilon) = -e^{-2t}\varepsilon\Big(e^{2t}(-1+\varepsilon)^3 + 2e^{1+2t}(-1+\varepsilon)^3 + 2e^{2+2t}(-1+\varepsilon)^3 +$$
$$+ 2e^{3+2t}(-1+\varepsilon)^3 + e^{4+2t}(-1+\varepsilon)^3 - 4e^{1+t}\varepsilon^2(-1+(-1+t)\varepsilon) -$$
$$- 4e^{3+t}\varepsilon^2(-1+(-1+t)\varepsilon) - 4e^{2+t}\varepsilon^2(-1+t\varepsilon) -$$
$$- 4e^{4+t}\varepsilon^2(-1+t\varepsilon) - 2e^2\varepsilon\big(1+\varepsilon+\varepsilon^2\big) -$$
$$- 4e^3\varepsilon\big(1+\varepsilon+\varepsilon^2\big) - 2e^4\varepsilon\big(1+\varepsilon+\varepsilon^2\big)\Big), \quad t \in [0,1].$$

Зазначимо виконання умови стиснення (5) для оператора $\Phi(z_k(t,\varepsilon))$ у випадку періодичної задачі для рівняння (8):

$$\left\|\frac{\varepsilon\, \partial G[Z(z_0(s),\varepsilon)](t)}{\partial z}\right\| \le 0{,}556\,680 < 1, \quad \varepsilon \in [0;1,2],$$

$$\left\|\frac{\varepsilon\, \partial G[Z(z_1(s,\varepsilon),\varepsilon)](t)}{\partial z}\right\| \le 0{,}886\,295 < 1, \quad \varepsilon \in [0;0{,}645],$$

$$\left\|\frac{\varepsilon\, \partial G[Z(z_2(s,\varepsilon),\varepsilon)](t)}{\partial z}\right\| \le 0{,}886\,295 < 1, \quad \varepsilon \in [0;0{,}645],$$

$$\left\|\frac{\varepsilon\, \partial G[Z(z_3(s,\varepsilon),\varepsilon)](t)}{\partial z}\right\| \le 0{,}886\,295 < 1, \quad \varepsilon \in [0;0{,}645].$$

Зазначимо також періодичність і неперервність отриманих наближень

$$z(t,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1\{[-1,1]\backslash\{\tau\}_I\} \cap \mathbb{C}[-1,1]$$

у малому околі розв'язку породжуючої задачі для рівняння (8). Точність знайдених за допомогою ітераційної схеми (4) наближень до періодичного розв'язку рівняння (8) визначають нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon) = \left\| \left\| z_k'(t,\varepsilon) - Az_k(t,\varepsilon) - \varepsilon\, f(t,\varepsilon) - \varepsilon\, Z(z_k(t,\varepsilon),\varepsilon) \right\| \right\|_{\mathbb{C}[-1;1]}, \quad k = 0,1,2,3,$$

$$\Delta_0(0,1) \approx 0{,}142\,105, \qquad \Delta_1(0,1) \approx 0{,}0262\,592,$$

$$\Delta_2(0,1) \approx 0{,}00\,515\,199, \qquad \Delta_3(0,1) \approx 0{,}00\,206\,785,$$

$$\Delta_0(0,01) \approx 0{,}0141\,428, \qquad \Delta_1(0,01) \approx 0{,}000\,280\,683,$$

$$\Delta_2(0,01) \approx 5{,}60\,091 \times 10^{-6}, \qquad \Delta_3(0,01) \approx 2{,}74\,364 \times 10^{-6}.$$

За початкове наближення до положення рівноваги рівняння (8) природно взяти розв'язок

$$u_0(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [-1,0[,$$

$$u_0(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}\begin{pmatrix} 2(2\varepsilon-1) \\ 1-2\varepsilon \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1],$$

рівняння

$$Au_0(\varepsilon) + \varepsilon f(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(0,0) + \varepsilon^2 A_2(t) = 0.$$

Використовуючи ітераційну схему (6), отримуємо

$$z_1(t,\varepsilon) := \varepsilon G[f(s,\varepsilon) + Z(u_0(\varepsilon),0)](t) := \begin{pmatrix} x_1(t,\varepsilon) \\ y_1(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

де

$$x_1(t,\varepsilon) = -\varepsilon + \frac{e^{-t}\big(2 + e^t + e^{1+t}\big)\varepsilon^2}{(1+e)} - \frac{\big(1 + e^t + e^{1+t}\big)\varepsilon^3}{(1+e)} -$$
$$- \frac{\big(36 + 23e^t + 23e^{1+t}\big)\varepsilon^4}{12(1+e)} - \frac{\big(120 + 41e^t + 41e^{1+t}\big)\varepsilon^5}{24(1+e)} +$$
$$+ \frac{\big(2300 + 347e^t + 347e^{1+t}\big)\varepsilon^6}{240(1+e)} - \frac{\big(11\,160 + 847e^t + 847e^{1+t}\big)\varepsilon^7}{720(1+e)} +$$
$$+ \frac{\big(498\,876 + 18\,701e^t + 18\,70e^{1+t}\big)\varepsilon^8}{20\,160(1+e)} + \ldots, \quad t \in [-1,0],$$

$$y_1(t,\varepsilon) = \frac{e^{-2t}\big(1 - e^2 - e^{2t} + e^{4+2t} + 2e\sinh 1\big)\varepsilon}{2(-1+e^2)(1+e^2)} -$$
$$- \frac{e^{-2t}\big(1 - e^2 - e^{2t} + e^{4+2t} + 6e\sinh 1\big)\varepsilon^2}{2(-1+e^2)(1+e^2)} -$$
$$- \frac{e^{-2t}\big(23 - 23e^2 - 23e^{2t} + 23e^{4+2t} + 118e\sinh 1\big)\varepsilon^4}{24(-1+e^2)(1+e^2)} -$$

$$
-\frac{e^{-2t}\big(41-41e^2-41e^{2t}+41e^{4+2t}+322e\sinh 1\big)\varepsilon^5}{48(-1+e^2)(1+e^2)}-
$$
$$
-\frac{e^{-2t}\big(347-347e^2-347e^{2t}+347e^{4+2t}+5294e\sinh 1\big)\varepsilon^6}{480(-1+e^2)(1+e^2)}+
$$
$$
+\frac{e^{-2t}\big(847-847e^2-847e^{2t}+847e^{4+2t}+24\,014e\sinh 1\big)\varepsilon^7}{1440(-1+e^2)(1+e^2)}+
$$
$$
+\frac{e^{-2t}\big(18\,701-18\,701e^2-18\,701e^{2t}+18\,701e^{4+2t}+1\,035\,154e\sinh 1\big)\varepsilon^8}{40\,320(-1+e^2)(1+e^2)}+
$$
$$
+\frac{\big(1-e^{-2(1+t)}+e^{-2-2t}\big(-1+e^2+4e^3\sinh 1\big)\big)\varepsilon^3}{(-1+e^2)(1+e^2)}+\ldots,\quad t\in[-1,0].
$$

Аналогічно отримуємо

$$
x_1(t,\varepsilon)=-\varepsilon+\frac{e^{-t}\big(-2e+3e^t+3e^{1+t}\big)\varepsilon^2}{(1+e)}-\frac{2e^{-t}\big(-e+2e^t+2e^{1+t}\big)\varepsilon^3}{(1+e)}+
$$
$$
+\frac{e^{-t}\big(-36e+59e^t+59e^{1+t}\big)\varepsilon^4}{12(1+e)}-\frac{e^{-t}\big(-120e+161e^t+161e^{1+t}\big)\varepsilon^5}{24(1+e)}+
$$
$$
+\frac{e^{-t}\big(-2300e+2647e^t+2647e^{1+t}\big)\varepsilon^6}{240(1+e)}-
$$
$$
-\frac{e^{-t}\big(-11\,160e+12\,007e^t+12\,007e^{1+t}\big)\varepsilon^7}{720(1+e)}+
$$
$$
+\frac{e^{-t}\big(-498\,876e+517\,577e^t+517\,577e^{1+t}\big)\varepsilon^8}{20\,160(1+e)}+\ldots,\quad t\in[0,1],
$$

$$
y_1(t,\varepsilon)=-\frac{\varepsilon\,e^{-2t}}{40\,320(1+e^2)}\times
$$
$$
\times\Big(-84e^2\varepsilon\big(480-480\varepsilon+720\varepsilon^2-1200\varepsilon^3+2300\varepsilon^4-3720\varepsilon^5+5\,939\varepsilon^6\big)+
$$
$$
+e^{2t}\Big(-20\,160+60\,480\varepsilon-80\,640\varepsilon^2+99\,120\varepsilon^3-135\,240\varepsilon^4+222\,348\varepsilon^5-
$$
$$
-336\,196\varepsilon^6+517\,577\varepsilon^7\Big)+e^{2+2t}\Big(-20\,160+60\,480\varepsilon-80\,640\varepsilon^2+99\,120\varepsilon^3-
$$
$$
-135\,240\varepsilon^4+222\,348\varepsilon^5-336\,196\varepsilon^6+517\,577\varepsilon^7\Big)\Big)+\ldots,\quad t\in[0,1].
$$

На другому кроці, використовуючи ітераційну схему (6), отримуємо

$$
z_2(t,\varepsilon):=\varepsilon\,G\big[f(s,\varepsilon)+Z(u_0(\varepsilon),0)+\mathcal{A}_1(u_0(\varepsilon))\,v_1(s,\varepsilon)+
$$
$$
+\varepsilon\,\mathcal{A}_2(u_0(\varepsilon))+\mathcal{R}(u_0(\varepsilon)+v_1(s,\varepsilon),\varepsilon)\big](t):=\begin{pmatrix}x_2(t,\varepsilon)\\ y_2(t,\varepsilon)\end{pmatrix},
$$

де

$$\begin{aligned}
x_2(t,\varepsilon) = &-\varepsilon + \frac{e^{-t}\big(2+e^t+e^{1+t}\big)\varepsilon^2}{1+e} - \\
&- \frac{e^{-t}\big(2+4e+3e^t+6e^{1+t}+3e^{2+t}+2t+2et\big)\varepsilon^3}{(1+e)^2} + \\
&+ \frac{e^{-t}\big(60+108e+59e^t+118e^{1+t}+59e^{2+t}+48t+48et\big)\varepsilon^4}{12(1+e)^2} - \\
&- \frac{e^{-t}\big(80+136e+53e^t+106e^{1+t}+53e^{2+t}+56t+56et\big)\varepsilon^5}{8(1+e)^2} + \\
&+ \frac{e^{-t}}{240(-1+e)(1+e)^2}\Big(-4940-3320e+7780e^2-1917e^t-1917e^{1+t}+ \\
&+ 1917e^{2+t}+1917e^{3+t}-2840t+2840e^2t\Big)\varepsilon^6 - \\
&+ \frac{e^{-t}}{180(-1+e)(1+e)^2}\Big(-7365-4860e+11\,145e^2-1597e^t-1597e^{1+t}+ \\
&+ 1597e^{2+t}+1597e^{3+t}-3780t+3780e^2\,t\Big)\varepsilon^7 + \\
&+ \frac{e^{-t}}{20160(-1+e)(1+e)^2}\Big(-1\,528\,716-1\,012\,536e+2\,248\,932e^2-186\,533e^t- \\
&- 186\,533e^{1+t}+186\,533e^{2+t}+186\,533e^{3+t}-720216t+ \\
&+ 720\,216e^2t\Big)\varepsilon^8 + \ldots, \qquad t\in[-1,0],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2(t,\varepsilon) = &\frac{\varepsilon}{2} - \frac{e^{-2t}\big(2+e^{2t}+e^{2+2t}\big)\varepsilon^2}{2(1+e^2)} + \\
&+ \frac{1}{2}\,e^{-2t}\left(3e^{2t}+\frac{-3-7e}{e^2(1+e)}+\frac{4e^t}{1+e}+\frac{3+7e+e^2+5e^3}{e^2(1+e)(1+e^2)}\right)\varepsilon^3 - \\
&- \frac{e^{-2t}\big(-36-36e+96e^t+59e^{2t}+96e^{2+t}+59e^{1+2t}+59e^{2+2t}+59e^{3+2t}\big)\varepsilon^4}{24(1+e)(1+e^2)} + \\
&+ \frac{e^{-2t}\big(-32-32e+112e^t+53e^{2t}+112e^{2+t}+53e^{1+2t}+53e^{2+2t}+53e^{3+2t}\big)\varepsilon^5}{16(1+e)(1+e^2)} + \\
&+ \frac{1}{2}\,e^{-2t}\left(-\frac{639e^{2t}}{80}-\frac{71e^t}{3(1+e)}+\frac{71(27+107e)}{240e^2(1+e)}+\right. \\
&\left. + \frac{-1917-9514e-8774e^2-7074e^3-6857e^4}{240e^2(1+e)^2(1+e^2)}\right)\varepsilon^6 +
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\,e^{-2t}\Biggl(-\frac{186\,533e^{2t}}{20\,160}-\frac{1429e^{t}}{20(1+e)}+\frac{186\,533+1\,626\,965e}{20\,160e^{2}(1+e)}+$$
$$+\frac{-186\,533-1\,813\,498e-1\,901\,782e^{2}-1\,405\,426e^{3}-171\,5249e^{4}}{20\,160e^{2}(1+e)^{2}(1+e^{2})}\Biggr)\varepsilon^{8}+$$
$$+\frac{1}{2}\,e^{-2t}\Biggl(\frac{1597e^{2t}}{180}+\frac{-1597-9157e}{180e^{2}(1+e)}+\frac{42e^{t}}{1+e}+$$
$$+\frac{1597+10754e+10559e^{2}+8204e^{3}+8962e^{4}}{180e^{2}(1+e)^{2}(1+e^{2})}\Biggr)\varepsilon^{7}+\ldots,\qquad t\in[-1,0].$$

Аналогічно отримуємо

$$x_2(t,\varepsilon)=-\varepsilon+\frac{e^{-t}\bigl(-2e+3e^{t}+3e^{1+t}\bigr)\varepsilon^{2}}{1+e}-$$
$$-\frac{e^{-t}\bigl(-2e^{2}+5e^{t}+10e^{1+t}+5e^{2+t}-2et-2e^{2}t\bigr)\varepsilon^{3}}{(1+e)^{2}}+$$
$$+\frac{e^{-t}\bigl(-12e-60e^{2}+119e^{t}+238e^{1+t}+119e^{2+t}-48et-48e^{2}t\bigr)\varepsilon^{4}}{12(1+e)^{2}}-$$
$$-\frac{e^{-t}\bigl(-24e-80e^{2}+133e^{t}+266e^{1+t}+133e^{2+t}-56et-56e^{2}t\bigr)\varepsilon^{5}}{8(1+e)^{2}}+$$
$$+\frac{e^{-t}}{240(-1+e)(1+e)^{2}}\Bigl(1620e+2840e^{2}-4940e^{3}-6857e^{t}-6857e^{1+t}+$$
$$+6857e^{2+t}+6857e^{3+t}+3320et-3320e^{3}t\Bigr)\varepsilon^{6}-$$
$$-\frac{e^{-t}}{180(-1+e)(1+e)^{2}}\Bigl(2505e+3780e^{2}-7365e^{3}-8962e^{t}-8962e^{1+t}+$$
$$+8962e^{2+t}+8962e^{3+t}+4860et-4860e^{3}t\Bigr)\varepsilon^{7}+$$
$$+\frac{e^{-t}}{20160(-1+e)(1+e)^{2}}\Bigl(516\,180e+720\,216e^{2}-1\,528\,716e^{3}-1\,715\,249e^{t}-$$
$$-1\,715\,249e^{1+t}+1\,715\,249e^{2+t}+1\,715\,249e^{3+t}+1\,012\,536et-$$
$$-1\,012\,536e^{3}t\Bigr)\varepsilon^{8}+\ldots,\qquad t\in[0,1],$$

$$y_2(t,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}-\frac{e^{-2t}\bigl(-2e^{2}+3e^{2t}+3e^{2+2t}\bigr)\varepsilon^{2}}{2(1+e^{2})}+$$
$$+\frac{e^{-2t}\bigl(2e^{2}+2e^{3}+5e^{2t}-4e^{1+t}-4e^{3+t}+5e^{1+2t}+5e^{2+2t}+5e^{3+2t}\bigr)\varepsilon^{3}}{2(1+e)(1+e^{2})}-$$

$$-\frac{e^{-2t}}{24(1+e)(1+e^2)}\Big(36e^2+36e^3+119e^{2t}-96e^{1+t}-$$
$$-96e^{3+t}+119e^{1+2t}+119e^{2+2t}+119e^{3+2t}\Big)\varepsilon^4+$$
$$+\frac{e^{-2t}}{16(1+e)(1+e^2)}\Big(32e^2+32e^3+133e^{2t}-112e^{1+t}-$$
$$-112e^{3+t}+133e^{1+2t}+133e^{2+2t}+133e^{3+2t}\Big)\varepsilon^5-$$
$$-\frac{e^{-2t}}{480(1+e)^2(1+e^2)}\Big(1700e^2+2440e^3+1700e^4+6857e^{2t}-6640e^{1+t}-$$
$$-6640e^{2+t}-6640e^{3+t}-6640e^{4+t}+13714e^{1+2t}+$$
$$+13714e^{2+2t}+13714e^{3+2t}+6857e^{4+2t}\Big)\varepsilon^6+$$
$$+\frac{e^{-2t}}{2}\left(\frac{1597}{180}+\frac{42}{1+e}+\frac{-1597-9157e}{180e^2(1+e)}+\right.$$
$$+\frac{1597+10754e+10559e^2+8204e^3+8962e^4}{180e^2(1+e)^2(1+e^2)}+$$
$$\left.+\frac{\big(-1+e^t\big)\big(4481-379e+4481e^t+4481e^{1+t}\big)}{90(1+e)}\right)\varepsilon^7-$$
$$-\frac{e^{-2t}}{40\,320(1+e)^2(1+e^2)}\Big(496\,356e^2+408\,072e^3+496\,356e^4+$$
$$+1\,715\,249e^{2t}-2\,025\,072e^{1+t}-2\,025\,072e^{2+t}-2\,025\,072e^{3+t}-$$
$$-2\,025\,072e^{4+t}+3\,430\,498e^{1+2t}+3\,430\,498e^{2+2t}+$$
$$+3\,430\,498e^{3+2t}+1\,715\,249e^{4+2t}\Big)\varepsilon^8+\ldots,\qquad t\in[0,1].$$

Відзначимо виконання умови стиснення (7) для оператора $\Psi(z_k(t,\varepsilon))$ у випадку періодичної задачі для рівняння (8):

$$\left\|\frac{\varepsilon\partial G[Z(z_0(s),\varepsilon)](t)}{\partial z}\right\|\le 0{,}556\,680<1,\qquad \varepsilon\in[0;1{,}2],$$
$$\left\|\frac{\varepsilon\partial G[Z(z_1(s,\varepsilon),\varepsilon)](t)}{\partial z}\right\|\le 0{,}937\,954<1,\qquad \varepsilon\in[0;0{,}485],$$
$$\left\|\frac{\varepsilon\partial G[Z(z_2(s,\varepsilon),\varepsilon)](t)}{\partial z}\right\|\le 0{,}937\,954<1,\qquad \varepsilon\in[0;0{,}485].$$

Відзначимо також періодичність і неперервність отриманих наближень

$$z(t,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1\{[-1,1]\backslash\{\tau\}_I\}\cap\mathbb{C}[-1,1]$$

у малому околі розв'язку породжуючої задачі для рівняння (8). Точність знайдених за допомогою ітераційної схеми (6) наближень до періодичного розв'язку рівняння (8) визначають нев'язки

$$\delta_k(\varepsilon) = \left\| \left\| z_k'(t,\varepsilon) - Az_k(t,\varepsilon) - \varepsilon\, f(t,\varepsilon) - \varepsilon\, Z(z_k(t,\varepsilon),\varepsilon) \right\| \right\|_{\mathbb{C}[-1;1]}, \quad k = 0,1,2,$$

$$\delta_0(0,1) \approx 0{,}142\,105, \qquad \delta_1(0,1) \approx 0{,}0026\,356 \ll \Delta_1(0,1) \approx 0{,}0262\,592,$$

$$\delta_2(0,1) \approx 0{,}000\,180\,925 \ll \Delta_3(0,1) \approx 0{,}00\,206\,785,$$

$$\delta_0(0,01) \approx 0{,}0141\,428, \qquad \delta_1(0,01) \approx 3{,}38\,087 \times 10^{-6} \ll \Delta_1(0,01) \approx 0{,}000\,280\,683,$$

$$\delta_2(0,01) \approx 2{,}73\,637 \times 10^{-8} \ll \Delta_3(0,01) \approx 2{,}74\,364 \times 10^{-6}.$$

Таким чином, точність знайдених за допомогою ітераційної схеми (6) наближень до періодичного розв'язку рівняння (8) набагато вища точності наближень до періодичного розв'язку рівняння (8), знайдених за допомогою ітераційної схеми (4). Для знаходження наближень до періодичного розв'язку рівняння (1) застосовний також метод найменших квадратів [11, 18].

Висновки. У статті доведено існування розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння з перемиканнями (1) і побудовано ітераційні схеми (4) і (6) для знаходження розв'язку цієї задачі. На відміну від задачі, дослідженої в [19], для крайової задачі (1) із перемиканнями має місце некритичний випадок. При дослідженні крайової задачі (1) із перемиканнями основну частину роботи зосереджено на знаходженні наближень до періодичного розв'язку, в той час як для задачі, дослідженої в [19] у критичному випадку, основну увагу приділяли знаходженню умов розв'язності. Для покращення точності наближень до періодичного розв'язку рівняння (1) побудовано ітераційну схему (6), для чого уточнено у порівнянні з (3) розвинення нелінійної вектор-функції $Z(z_k(t,\varepsilon),\varepsilon)$. Вибір початкового наближення до положення рівноваги $u_0(\varepsilon)$ для побудови наближень до періодичного розв'язку рівняння (1) є більш природним, порівнюючи з тривіальним розв'язком породжуючої задачі (2). Це підтверджується точністю знайдених за допомогою ітераційної схеми (6) наближень до періодичного розв'язку рівняння (8), яка набагато перевищує точність наближень до періодичного розв'язку рівняння (8), знайдених за допомогою ітераційної схеми (4).

Література

1. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems; 2-th edition*, Berlin, De Gruyter (2016).
2. С. Г. Крейн, *Линейные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1971).
3. О. А. Бойчук, С. М. Чуйко, *Узагальнений оператор Гріна імпульсної крайової задачі з переключеннями*, Нелін. коливання, **10**, № 1, 51 – 65 (2007); ***English translation:*** Nonlinear Oscil. (N. Y.), **10**, № 1, 46 – 61 (2007).
4. A. Zuyev, A. Seidel-Morgenstern, P. Benner, *An isoperimetric optimal control problem for a non-isothermal chemical reactor with periodic inputs*, Chem. Eng. Sci., **161**, 206 – 214 (2017).
5. P. Benner, A. Seidel-Morgenstern, A. Zuyev, *Periodic switching strategies for an isoperimetric control problem with application to nonlinear chemical reactions*, Appl. Math. Model., **69**, 287 – 300 (2019).
6. P. Benner, A. Seidel-Morgenstern, A. Zuyev, *Analysis of switching strategies for the optimization of periodic chemical reactions with controlled flow-rate*, Springer Proc. Math. Stat., **364**, 59 – 69 (2021).

7. И. Г. Малкин, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, Гостехиздат, Москва (1956).
8. A. Boichuk, S. Chuiko, *Autonomous weakly nonlinear boundary value problems in critical cases*, Differ. Equ., № 10, 1353 – 1358 (1992).
9. Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов, *Конструктивные методы анализа нелинейных систем*, Наука, Москва (1979).
10. Д. К. Лика, Ю. А. Рябов, *Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний*, Штиинца, Кишинев (1974).
11. С. М. Чуйко, *Про наближене розв'язування крайових задач методом найменших квадратів*, Нелін. коливання, **11**, № 4, 554 – 573 (2008); ***English translation:*** Nonlinear Oscil. (N. Y.), **11**, № 4, 585 – 604 (2008).
12. С. М. Чуйко, *Область збіжності ітераційної процедури для автономної крайової задачі*, Нелін. коливання, **9**, № 3, 416 – 432 (2006); ***English translation:*** Nonlinear Oscil. (N. Y.), **9**, № 3, 405 – 422 (2006).
13. В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1980).
14. О. А. Бойчук, С. М. Чуйко, *Про наближене розв'язання слабконелінійних крайових задач методом Ньютона – Канторовича*, Нелін. коливання, **23**, № 3, 321 – 331 (2020); ***English translation:*** J. Math. Sci., **261**, № 2, 228 – 240 (2022).
15. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1977).
16. Л. Коллатц, *Функциональный анализ и вычислительная математика*, Мир, Москва (1969).
17. S. M. Chuiko, *To the generalization of the Newton – Kantorovich theorem*, Visn. V. N. Karazin Kharkiv Nat. Univ. Ser. Math., Appl. Math. Mech., **85**, № 1, 62 – 68 (2017).
18. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, Москва (1965).
19. P. Benner, S. Chuiko, A. Zuyev, *A periodic boundary-value problem with switchings under nonlinear perturbations*, Preprint: https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-2239596/v1.

Одержано 06.12.22