УДК 517.9

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

О. М. Станжицький*, Г. О. Петрина

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка,
вул. Володимирська, 64/13, Київ, 01601, Україна
email: ostanzh@gmail.com
grpetryna@gmail.com

Н. Л. Денисенко

Нац. техн. ун-т України "Київ. політех. ін-т ім. І. Сікорського"
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна
email: nldenisenko@gmail.com

We investigate the asymptotic behavior at infinity of solutions of stochastic functional-differential equations by the method of asymptotic equivalence, according to which a system of ordinary differential equations is constructed based on the original stochastic system so that each solution of the stochastic system can be associated with the solution of the constructed deterministic system such that the difference between them tends to zero as $t \to \infty$ in the mean square and with probability 1.

Досліджено асимптотичну поведінку на нескінченності розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь методом асимптотичної еквівалентності, згідно з яким за вихідною стохастичною системою побудовано систему звичайних диференціальних рівнянь таку, що кожному розв'язку стохастичної системи можна поставити у відповідність розв'язок побудованої детермінованої системи такий, що різниця між ними прямує до нуля при $t \to \infty$ у середньому квадратичному та з імовірністю 1.

Вступ. Роботу присвячено дослідженню асимптотичної поведінки стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь.

Функціонально-диференціальні рівняння широко використовуються як моделі різноманітних еволюційних процесів, у яких поточний стан системи безпосередньо залежить від показників стану в попередні моменти часу. Наявність запізнення спричиняє істотний вплив на якісну поведінку системи. Права частина таких математичних моделей є функціоналом, що суттєво ускладнює об'єкт дослідження та вимагає розробки й застосування спеціальних методів. У середині XX століття дослідженню диференціальних рівнянь із запізненням було присвячено роботи А. Д. Мишкіса [1], R. Bellman [2], М. М. Красовського [3], А. Халаная [4]. Широке застосування таких моделей спонукало бурхливий розвиток теорії функціонально-диференціальних рівнянь. Значний внесок у розвиток якісної теорії та асимптотичних методів для таких рівнянь зробили праці Л. Е. Ельсгольца і С. Б. Норкіна [5], Jack K. Hale [6], Ю. О. Митропольського, А. М. Самойленка, В. І. Фодчука,

* Виконано у рамках Держбюджетних тем НДР № 210BF38-01 і № 3М-2022.

Д. І. Мартинюка, С. І. Трофімчука [7–9], В. Ю. Слюсарчука [10, 11] та багатьох інших математиків.

Щодо задач оптимального керування системами функціонально-диференціальних рівнянь відзначимо роботи [12, 13], де отримано достатні умови існування оптимальних керувань для таких систем.

Метою цієї статті є дослідження асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь. Теорію таких рівнянь у скінченновимірних просторах суттєво викладено, наприклад, у монографії [14]. Стосовно стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь у нескінченновимірних просторах відзначимо монографію [15]. У цій роботі асимптотичну поведінку розв'язків на нескінченності досліджено добре відомим у теорії диференціальних рівнянь методом асимптотичної еквівалентності, згідно з яким за вихідною системою будується більш проста, поведінка розв'язків якої на нескінченності еквівалентна поведінці розв'язків вихідної системи. Класичним тут є результат Левінсона [16], отриманий у лінійному випадку. Для детермінованих систем функціонально-диференціальних рівнянь подібний результат отримано в [17]. Для стохастичних систем без запізнення цей підхід розвинуто у роботах [18, 19].

Цю статтю побудовано у такий спосіб: у першому пункті дано постановки задач, необхідні означення та формулювання теорем, у другому пункті подано доведення теорем. У кінці роботи наведено ілюстративний приклад.

2. Постановка задачі і основні результати. ***2.1. Постановка задачі.*** Спочатку введемо необхідні в подальшому позначення та формулювання. Для $h > 0$ визначимо функціональний простір $C_h = C\big([-h,0];\mathbb{R}^d\big)$ неперервних функцій із рівномірною метрикою $\|\varphi\|_C = \sup_{\theta\in[-h,0]}|\varphi(\theta)|$. Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, y(t))\,dt, \tag{1}$$

де $f_1\colon [0,\infty]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, f_1 неперервна за сукупністю змінних і ліпшицева за змінною y функція. Разом із системою (1) розглянемо систему стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = (f_1(t, y(t)) + f_2(t, y_t))dt + \sigma(t, y_t)dW(t), \tag{2}$$

де $f_2(t,\phi)\colon [0,\infty]\times C_h \to \mathbb{R}^d$, $\sigma(t,\phi)\colon [0,\infty]\times C_h \to \mathbb{R}^d$, $y_t = y(t+\theta)$, $\theta\in[-h,0]$, $W(t)$ — d-вимірний процес Вінера, визначений на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathbf{F}, P)$ з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t, t\geq 0\}\subset\mathbf{F}$.

Уведемо означення асимптотичної еквівалентності, що є узагальненнями на стохастичний випадок класичного означення асимптотичної еквівалентності систем звичайних диференціальних рівнянь [16].

Означення 1. *Якщо кожному розв'язку $y(t)$ системи (2) можна поставити у відповідність розв'язок $x(t)$ системи (1) таким чином, що виконується рівність*

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}|x(t) - y(t)|^2 = 0,$$

то систему (1) назвемо асимптотично еквівалентною системі (2) у середньоквадратичному сенсі.

Означення 2. *Якщо кожному розв'язку $y(t)$ системи (2) можна поставити у відповідність розв'язок $x(t)$ системи (1) таким чином, що виконується рівність*

$$P\Big\{\lim_{t\to\infty}|x(t)-y(t)|=0\Big\}=1,$$

то систему (1) назвемо асимптотично еквівалентною до системи (2) з імовірністю 1.

2.2. Формулювання теореми. Основним результатом цієї роботи є отримання умов асимптотичної еквівалентності систем (1) і (2) як у середньому квадратичному, так і з імовірністю 1.

Функції $f_1(t,x),\ f_2(t,\varphi),\ \sigma(t,\varphi)$ будемо вважати неперервними за сукупністю змінних із виконанням таких умов:

1. Функція f_1 задовольняє умови Ліпшиця та лінійного зростання, тобто існує константа $L>0$ така, що

$$|f_1(t,x_1)-f_1(t,x_2)|\le L|x_1-x_2|,\quad |f_1(t,x)|\le L(1+|x|), \tag{3}$$

для довільних $x,x_1,x_2\in\mathbb{R}^d$ і $t\in[0,\infty)$.

2. Функції f_2 і σ також задовольняють умову Ліпшиця, тобто

$$|f_2(t,\xi)-f_2(t,\phi)|+|\sigma(t,\xi)-\sigma(t,\phi)|\le L\|\xi-\phi\|_C \tag{4}$$

для довільних $\xi,\phi\in C_h$ і $t\in[0,\infty]$.

Виберемо тепер h_0 так, щоб виконувалася нерівність

$$40e^{L^2h_0+4h_0L}h_0L^2<1. \tag{5}$$

Очевидно, оскільки функція $m(h)=40e^{L^2h+4hL}hL^2$ монотонно зростає по h і $m(0)=0$, то нерівність (5) виконується для всіх $h\le h_0$.

Далі вважатимемо виконаними такі умови:

3. Існує стала $\gamma>L$ така, що:

a) $|f_2(t,\phi)|\le Ke^{-\gamma t},\ t\ge 0$;

b) $|\sigma(t,\phi)|\le Ke^{-\gamma t},\ t\ge 0$;

K — додатна стала.

Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються вказані вище умови 1 – 3. Тоді при всіх $h\le h_0$:*

1. *система (1) асимптотично еквівалентна системі (2) у середньоквадратичному сенсі;*
2. *система (1) асимптотично еквівалентна системі (2) з імовірністю 1.*

3. Доведення теореми 1. За умовами теореми, як випливає з теореми 1.2.8 [14], існує єдиний розв'язок $y(t)$ системи (2) для $t>0$ для довільної початкової функції (початкового процесу) $\varphi(\theta)$, що є $\mathcal{F}_0$-вимірною і такою, що $\mathbf{E}\|\varphi\|_C^2<\infty$. Встановимо певні допоміжні оцінки для розв'язків системи (1). Нехай $x_1(t)$ і $x_2(t)$ — такі два розв'язки системи (1). Тоді, використовуючи лему Гронуолла – Беллмана, отримуємо оцінку

$$|x_1(t)-x_2(t)|\le e^{L|t-s|}|x_1(s)-x_2(s)|. \tag{6}$$

Розглянемо довільний фіксований розв'язок $y(t)$ системи (2) з початковою умовою $\phi(\theta)$. Нехай також $\{x_n(t)\mid n\ge 0\}$ — послідовність розв'язків системи (1) таких, що $x_n(nh)=$ $=y(nh)$. Згідно з умовами на систему (1) всі її розв'язки із довільними початковими даними існують і єдині при всіх $t \geq 0$. При цьому $x_0(0) = \phi(0)$. Довизначимо $x_0(\theta) = \phi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$. Покладемо

$$q_n = \max_{t \in [nh-h, nh]} E|x_n(t) - y(t)|^2, \quad q_0 \equiv 0. \tag{7}$$

Очевидно також, що виконується нерівність

$$\sup_{t \in [0,T]} E\|x_t\|_C^2 \leq E\|\phi\|_C^2 + \sup_{t \in [0,T]} E|x(t)|^2. \tag{8}$$

Тоді

$$\sup_{\tau \in [nh,s]} E\|x_{n\tau} - y_\tau\|^2 \leq q_n + \max_{\tau \in [nh,s]} |x_n(\tau) - y(\tau)|^2. \tag{9}$$

Для $t \in [nh, nh + h]$ розглянемо різницю

$$\begin{aligned} E|x_n(t) - y(t)|^2 \leq 5E\left|\int\limits_{nh}^{t} [f_1(\tau, x_n(\tau)) - f_1(\tau, y(\tau))]d\tau\right|^2 + \\ + 5E\left|\int\limits_{nh}^{t} [f_2(\tau, x_{n\tau}) - f_2(\tau, y_\tau)]d\tau\right|^2 + \\ + 5E\left|\int\limits_{nh}^{t} [\sigma(\tau, x_{n\tau}) - \sigma(\tau, y_\tau)]\, dW(\tau)\right|^2 + \\ + 5E\left|\int\limits_{nh}^{t} f_2(\tau, x_{n\tau})d\tau\right|^2 + 5E\left|\int\limits_{nh}^{t} \sigma(\tau, x_{n\tau})dW(\tau)\right|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E|x_n(t) - y(t)|^2 \leq 5h\int\limits_{nh}^{t} E|f_1(\tau, x_n(\tau)) - f_1(\tau, y(\tau))|^2 d\tau + \\ + 5h\int\limits_{nh}^{t} E|f_2(\tau, x_{n\tau}) - f_2(\tau, y_\tau)|^2 d\tau + \\ + 5\int\limits_{nh}^{t} E|\sigma(\tau, x_{n\tau}) - \sigma(\tau, y_\tau)|^2 d\tau + \\ + 5h\int\limits_{nh}^{t} E|f_2(\tau, x_{n\tau})|^2 d\tau + 5\int\limits_{nh}^{t} E|\sigma(\tau, x_{n\tau})|^2 d\tau, \end{aligned}$$

$$E|x_n(t)-y(t)|^2 \le 5hL^2\int\limits_{nh}^{t} E|x_n(\tau)-y(\tau)|^2 d\tau +$$

$$+\,5hL^2\int\limits_{nh}^{t} E\|x_{n\tau}-y_\tau\|_C^2 d\tau + 5L^2\int\limits_{nh}^{t} E\|x_{n\tau}-y_\tau\|_C^2 d\tau +$$

$$+\,5h\int\limits_{nh}^{t} E\big|Ke^{-\gamma_h\tau}\big|^2 d\tau + 5\int\limits_{nh}^{t} E\big|Ke^{-\gamma_h\tau}\big|^2 d\tau,$$

$$E|x_n(t)-y(t)|^2 \le 5hL^2hq_n + 5hL^2\int\limits_{nh}^{t}\max_{\theta\in[nh,\tau]} E|x_n(\tau)-y(\tau)|^2 d\tau +$$

$$+\,5hL^2\int\limits_{nh}^{t}\max_{\theta\in[nh,\tau]} E|x_{n\tau}-y_\tau|^2 d\tau +$$

$$+\,5hL^2q_n + 5L^2\int\limits_{nh}^{t}\max_{\theta\in[nh,\tau]} E|x_{n\tau}-y_\tau|^2 d\tau +$$

$$+\,5hK^2(2\gamma)^{-1}\big(e^{2\gamma h}-1\big)e^{-2\gamma h(n+1)} +$$

$$+\,5K^2(2\gamma)^{-1}\big(e^{2\gamma h}-1\big)e^{-2\gamma h(n+1)}.$$

Використовуючи лему Гроноулла – Беллмана для попередньої нерівності, отримуємо

$$\sup_{t\in[nh,nh+h]} E|x_n(t)-y(t)|^2 \le 10e^{15L^2h}\Big(hL^2q_n + K^2(2\gamma)^{-1}\big(e^{2\gamma h}-1\big)e^{-2\gamma h(n+1)}\Big).$$

Розглянемо $x_{n+1}(nh+h)=y(nh+h)$. З попередньої нерівності випливає оцінка

$$E|x_{n+1}(nh+h)-y(nh+h)|^2 \le 10e^{15L^2h}\Big(hL^2q_n + K^2(2\gamma)^{-1}\big(e^{2\gamma h}-1\big)e^{-2\gamma h(n+1)}\Big).$$

Розглянемо q_{n+1}, яке згідно з уведеними позначеннями набуває вигляду

$$q_{n+1} = \max_{t\in[nh,nh+h]} E|x_{n+1}(t)-y(t)|^2 \le$$

$$\le 2\max_{t\in[nh,nh+h]} E|x_{n+1}(t)-x_n(t)|^2 + 2\max_{t\in[nh,nh+h]} E|x_n(t)-y(t)|^2,$$

$$q_{n+1} \le 40e^{L^2h+2Lh}hL^2q_n + 40e^{L^2h+2Lh}K^2(2\gamma)^{-1}\big(e^{2\gamma h}-1\big)e^{-2\gamma h(n+1)}.$$

Використаємо нерівність із ([20], розд. 7) для оцінки q_n:

$$q_{n+1} \le \sum_{l=1}^{n+1} B_l \prod_{j=l+1}^{n+1} A_j, \tag{10}$$

$$A_k = 40e^{L^2h+2Lh}L^2h = A,$$

$$B_k = 40e^{L^2h+2Lh}K^2(2\gamma)^{-1}\big(e^{2\gamma h}-1\big)e^{-2\gamma h(k+1)}.$$

Тепер можемо оцінити різницю

$$\begin{aligned}E|x_{n+1}(0)-x_n(0)|^2 &\le e^{2Lnh}q_{n+1} \le e^{2Lnh}\sum_{l=1}^{n+1}B_l\prod_{j=l+1}^{n+1}A_j = \\ &= e^{2Lnh}\Big[\Big(40e^{L^2h+2Lh}K^2(2\gamma)^{-1}\big(e^{2\gamma h}-1\big)e^{-4\gamma h}\Big)(A)^{n-1}+ \\ &\quad + \Big(40e^{L^2h+2Lh}K^2(2\gamma)^{-1}\big(e^{2\gamma h}-1\big)e^{-6\gamma h}\Big)(A)^{n-2}+\ldots \\ &\quad \ldots+\Big(40e^{L^2h+2Lh}K^2(2\gamma)^{-1}\big(e^{2\gamma h}-1\big)e^{-2\gamma h(n+2)}\Big)(A^{-1})\Big] \le \\ &\le e^{2Lnh}\Big[\Big(40e^{L^2h+2Lh}K^2(2\gamma)^{-1}e^{-2\gamma h}\Big)(A)^{n-1}+ \\ &\quad + \Big(40e^{L^2h+2Lh}K^2(2\gamma)^{-1}e^{-4\gamma h}\Big)(A)^{n-2}+\ldots \\ &\quad \ldots+\Big(40e^{L^2h+2Lh}K^2(2\gamma)^{-1}e^{-2\gamma h(n+1)}\Big)(A^{-1})\Big] \le \\ &\le e^{-2(L-\gamma)nh}\Big[\Big(40e^{L^2h+2Lh}K^2(2\gamma)^{-1}e^{2\gamma h(n-1)}\Big)(A)^{n-1}+ \\ &\quad + \Big(40e^{L^2h+2Lh}K^2(2\gamma)^{-1}e^{2\gamma h(n-2)}\Big)(A)^{n-2}+\ldots \\ &\quad \ldots+\Big(40e^{L^2h+2Lh}K^2(2\gamma)^{-1}e^{-2\gamma h}\Big)(A^{-1})\Big]. \qquad (11)\end{aligned}$$

За умовою (5) сума в квадратних дужках обмежена. Отже, цей вираз не перевищує деякої додатної сталої C. Тоді з умови $\gamma > L$ отримуємо, що вираз (11) прямує до нуля при $n \to \infty$. Також з нерівності (5) маємо

$$\Big(40e^{L^2h+4Lh}hL^2\Big)^n \to 0, \quad n\to\infty.$$

Звідси випливає нерівність

$$E|x_{n+1}(0)-x_n(0)|^2 \le C_1\Big(40e^{L^2h+4hL}hL^2\Big)^n, \quad C_1>0.$$

Отже, границя

$$x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n(0)$$

існує в середньоквадратичному сенсі.

Введемо норму $\|\cdot\| := \sqrt{E|\cdot|^2}$. Визначимо розв'язок $x_\infty(t)$ системи (1) як розв'язок задачі Коші з початковими умовами $x_\infty(0)=x_\infty$. Згідно з умовами на f_1 такий розв'язок існує та єдиний для всіх $t\ge 0$.

Розглянемо різницю

$$E|x_\infty(t)-y(t)|^2 \le 2E|y(t)-x_n(t)|^2 + 2E|x_n(t)-x_\infty(t)|^2. \qquad (12)$$

Покажемо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $T > 0$ таке, що для будь-якого $t > T$ виконується нерівність

$$E|x_\infty(t) - y(t)|^2 \leq \varepsilon. \tag{13}$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0.$ З нерівності (11) маємо, що

$$q_{n+1} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Виберемо N_1 так, щоб $q_{N_1} < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Тоді, якщо $t \in [nh, nh+h]$, де $n \geq N_1$, то перший доданок у (12) буде меншим за $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Тепер оцінимо другий доданок правої частини нерівності (12):

$$\begin{aligned}\big\|x_n(t) - x_\infty(t)\big\| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \big\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\big\| \leq \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} e^{L(k-n)h} \big\|x_{k+1}(kh+h) - x_k(kh+h)\big\| \leq \\ &\leq e^{-Lnh} \sum_{k=n}^{\infty} e^{Lkh} \sum_{l=1}^{k+1} B_l \prod_{j=l+1}^{k+1} A_j.\end{aligned}$$

Останній вираз прямує до нуля при $n \to \infty$ згідно з (11). Отже, ми можемо вибрати N_2 таким чином, щоб другий доданок у (12) був менший за $\dfrac{\varepsilon}{4}$ при всіх $n > N_2$.

Тоді для всіх $t \in [nh, nh+h]$ і $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ маємо

$$E|x_\infty(t) - y(t)|^2 < \varepsilon.$$

Отже,

$$\lim_{t\to\infty} E\big|y(t) - x_\infty(t)\big|^2 = 0.$$

Це й закінчує доведення першої частини теореми 1.

Перейдемо до доведення другої частини. Для тієї ж послідовності $\{x_n(t) \mid n \geq 0\}$, $t \in [nh, nh+h]$ покладемо

$$\varepsilon_n := e^{-\frac{\gamma+L}{2}hn}$$

та оцінимо вираз

$$\begin{aligned}P\Bigg\{\sup_{t\in[nh,nh+h]} |x_n(t) - y(t)| \geq \varepsilon_n\Bigg\} &\leq \\ \leq P\Bigg\{\sup_{t\in[nh,nh+h]} \Bigg|\int_{nh}^{t} [f_1(\tau, x_n(\tau)) - f_1(\tau, y(\tau))]d\tau\Bigg| \geq \frac{\varepsilon_n}{5}\Bigg\} &+ \\ + P\Bigg\{\sup_{t\in[nh,nh+h]} \Bigg|\int_{nh}^{t} [f_2(\tau, x_{n\tau}) - f_2(\tau, y\tau)]d\tau\Bigg| \geq \frac{\varepsilon_n}{5}\Bigg\} &+\end{aligned}$$

$$+ P\left\{\sup_{t\in[nh,nh+h]}\left|\int\limits_{nh}^{t}[\sigma(\tau,x_{n\tau})-\sigma(\tau,y\tau)]dW(\tau)\right|\geq\frac{\varepsilon_n}{5}\right\}+$$

$$+ P\left\{\sup_{t\in[nh,nh+h]}\left|\int\limits_{nh}^{t}f_2(\tau,x_{n\tau})d\tau\right|\geq\frac{\varepsilon_n}{5}\right\}+$$

$$+ P\left\{\sup_{t\in[nh,nh+h]}\left|\int\limits_{nh}^{t}\sigma(\tau,x_{n\tau})dW(\tau)\right|\geq\frac{\varepsilon_n}{5}\right\}.$$

Кожен із членів попередньої нерівності можна оцінити, використовуючи наведені вище оцінки та нерівність Чебишева. Остаточно матимемо

$$P\left\{\sup_{t\in[nh,nh+h]}|x_n(t)-y(t)|\geq\varepsilon_n\right\}\leq R_1q_{n+1}\frac{1}{\varepsilon_n}+R_2e^{-2\gamma h(n+1)}\frac{1}{\varepsilon_n}+$$
$$+R_3q_{n+1}\frac{1}{\varepsilon_n^2}+R_4e^{-2\gamma h(n+1)}\frac{1}{\varepsilon_n^2}+$$
$$+R_5e^{-\gamma h(n+1)}\frac{1}{\varepsilon_n}+R_6e^{-2\gamma h(n+1)}\frac{1}{\varepsilon_n^2}, \qquad (14)$$

тут константи $R_1,\ldots,R_6$ мають вигляд

$$R_1=100e^{15L^2h}hL^3,\qquad R_2=\frac{R_1K^2\left(e^{\gamma h}-1\right)}{hL^2\gamma},\qquad R_3=\frac{5R_1L}{2},$$
$$R_4=\frac{5R_2L}{2},\qquad R_5=\frac{5K\left(e^{\gamma h}-1\right)}{\gamma},\qquad R_6=\frac{25K^2\left(e^{2\gamma h}-1\right)}{2\gamma}.$$

Тоді

$$P\left\{\sup_{t\in[nh,nh+h]}|x_n(t)-y(t)|\geq\varepsilon_n\right\}\leq$$
$$\leq R_1q_{n+1}e^{\frac{\gamma+L}{2}hn}+R_2e^{-2\gamma h(n+1)}e^{\frac{\gamma+L}{2}hn}+$$
$$+R_3q_{n+1}e^{(\gamma+L)hn}+R_4e^{-2\gamma h(n+1)}e^{(\gamma+L)hn}+$$
$$+R_5e^{-\gamma h(n+1)}e^{\frac{\gamma+L}{2}hn}+R_6e^{-2\gamma h(n+1)}e^{(\gamma+L)hn}. \qquad (15)$$

З останньої нерівності випливає, що ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}P\left\{\sup_{t\in[nh,nh+h]}|x_n(t)-y(t)|\geq\varepsilon_n\right\}$$

збіжний. Отже, з леми Бореля – Кантеллі маємо, що існує додатне, взагалі кажучи, випадкове $N=N(\omega)$ таке, що для довільного $n\geq N(\omega)$:

$$\sup_{t\in[nh,nh+h]}|x_n(t)-y(t)|\leq e^{-\frac{\gamma+L}{2}nh} \qquad (16)$$

майже для всіх $\omega \in \Omega$. Для $t = nh + h$ виконується нерівність

$$\left|x_n(nh+h) - x_{n+1}(nh+h)\right| \leq e^{-\frac{\gamma+L}{2}nh} \tag{17}$$

з імовірністю 1. Подальше доведення цієї теореми проводиться аналогічно попередньому із заміною середньо квадратичної збіжності на збіжність із ймовірністю 1. Це приводить до остаточного співвідношення

$$P\Big\{\lim_{t\to\infty} |x(t) - y(t)| = 0\Big\} = 1,$$

яке й закінчує доведення теореми.

4. Приклад. Проілюструємо отриманий результат таким прикладом. Розглянемо стохастичну систему із запізненням вигляду

$$\frac{dy}{dt} = (f_1(t, y(t)) + f_2(t, y(t-h)))dt + \sigma(t, y(t-h))dW(t), \tag{18}$$

де функції $f_1(t,y)f_2(t,y),\ \sigma(t,y)\colon [0,\infty] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ неперервні за сукупністю змінних і ліпшицеві за змінною y, а також задовольняють по y умову лінійного зростання. За звичайними функціями f_2 і σ побудуємо відображення $[0,\infty] \times C_h \to \mathbb{R}^d$ таким чином:

$$f_2(t,\varphi) = f_2(t, \varphi(-h)), \quad \sigma(t,\varphi) = f_2(t, \varphi(-h))$$

для кожного $\varphi \in C_h$. Якщо при цьому вимагати від функцій $f_2(t,y),\ \sigma(t,y)$ виконання умов:

1) $|f_2(t,)| \leq Ke^{-\gamma t},\ t \geq 0$;
2) $|\sigma(t,)| \leq Ke^{-\gamma t},\ t \geq 0$,

де $\gamma > L$, то, очевидно, всі умови теореми при достатньо малих h виконано.

Література

1. А. Д. Мышкис, *Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*, Успехи мат. наук, **4**, вып. 5, 99 – 141 (1949).
2. Р. Беллман, К. Кук, *Дифференциально-разностные уравнения*, Мир, Москва (1967).
3. Н. Н. Красовский, *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, Наука, Москва (1959).
4. А. Халанай, *Метод усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*, Rev. Math. Pures et Appl. Acad. RpR, **4**, № 3, 467 – 483 (1959).
5. Л. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин, *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Наука, Москва (1971).
6. J. K. Hale, *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg (1977).
7. Ю. А. Митропольский, Д. И. Мартынюк, *Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием*, Вища шк., Київ (1979).
8. Ю. А. Митропольский, В. И. Фодчук, *Асимптотические методы нелинейной механики применительно к нелинейным дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом*, Укр. мат. журн., **18**, № 3, 65 – 84 (1966).
9. А. М. Самойленко, О. П. Трофимчук, Н. Р. Банцур, *Періодичні та майже періодичні розв'язки систем диференціальних рівнянь з максимумами*, Доп. НАН України, № 1, 53 – 57 (1998).
10. В. Ю. Слюсарчук, *Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією*, Вид-во УДУВГП, Рівне (2003).
11. V. E. Slyusarchuk, *The method of local linear approximation in the theory of nonlinear functional-differential equations*, Sb. Math., **201**, № 7-8, 1193 – 1215 (2010).

12. O. Kichmarenko, O. Stanzhytskyi, *Sufficient conditions for the existence of optimal controls for some classes of functional-differential equations*, Nonlinear Dyn. Syst. Theory, **18**, № 2, 196 – 211 (2018).

13. O. Kichmarenko, O. Stanzhytskyi, *Optimal control problems for some classes of functional-differential equations on the semi-axis*, Miskolc Math. Notes, **20**, № 2, 1021 – 1037 (2019).

14. Е. Ф. Царьков, *Случайные возмущения функционально-дифференциальных уравнений*, Зинатне, Рига (1989).

15. S.-E. A. Mohammed, *Stochastic functional differential equations*, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA (1984).

16. N. Levinson, *The asymptotic behavior of system of linear differential equations*, Amer. J. Math., **68**, 1 – 6 (1946).

17. К. Г. Валеев, Н. А. Кулеско, *О конечнопараметрическом семействе решений систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Укр. мат. журн., **20**, № 6, 739 – 749 (1968); ***English translation:*** Ukr. Mat. J., **20**, № 11, 637 – 646 (1968).

18. О. М. Станжицький, *Дослідження експоненціальної дихотомії стохастичних систем Іто за допомогою квадратичних форм*, Укр. мат. журн., **53**, № 11, 1545 – 1555 (2001); ***English translation:*** Ukr. Mat. J., **53**, № 11, 1882 – 1894 (2001).

19. O. M. Stanzhyts'kyi, A. P. Krenevich, I. G. Novak, *Asymptotic equivalence of linear stochastic Ito systems and oscillation of solutions of linear second-order equations*, Differ. Equ., **47**, № 6, 799 – 813 (2011).

20. К. И. Бабенко, *Основы численного анализа*, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Москва, Ижевск (2002).

Одержано 31.10.22