УДК 517.9

ПРО ДЕЯКІ КОНСТРУКЦІЇ РЕГУЛЯРНИХ ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ

В. Л. Кулик

Сілез. технол. ун-т (Сілез. Політехніка в Глівіце)
вул. Кашубська 23, Глівіце, 44-100, Польща
e-mail: viktor.kulyk@ukr.net

Г. М. Кулик, Н. В. Степаненко

Нац. тех. ун-т України "Київ. політех. ін-т ім. І. Сікорського"
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: ganna_1953@ukr.net
nataliya.stepanenko@lll.kpi.ua

Lyapunov functions in the form of linear combinations of quadratic forms are considered. We investigate conditions under which the linear extensions of dynamical systems on a torus are regular.

Розглянуто функції Ляпунова у вигляді лінійної комбінації квадратичних форм. Досліджено умови регулярності лінійних розширень динамічних систем на торі.

Математичне дослідження нелінійних коливань приводить до появи важливих і цікавих задач із якісної теорії диференціальних рівнянь. Серед таких рівнянь важливу роль відіграють системи диференціальних рівнянь, які прийнято називати лінійним розширенням динамічних систем на торі.

Початковим джерелом наукових досліджень у цьому напрямі стала знаменита стаття А. М. Самойленка [1], де вперше запропоновано вивчення збурених інваріантних торів за допомогою інтегрального зображення, де ядром підінтегральної функції стала нова функція Гріна, яку пізніше назвали функцією Гріна – Самойленка. Ці дослідження привели до появи цілого ряду нових цікавих задач у теорії лінійних розширень динамічних систем на торі. Деяку частину цікавих досліджень з цієї теорії пропонуємо розглянути в наведеній бібліографії [1 – 12]. Ефективним методом дослідження проблеми існування функції Гріна – Самойленка є аналоги функції Ляпунова, які вибирають у вигляді квадратичних форм. Такі форми можуть змінювати знак і навіть вироджуватись, а їхня похідна вздовж розв'язків заданої системи є знаковизначеною. Знаходження функцій Ляпунова часто є досить важким завданням.

У цій роботі розглянуто можливість побудови функцій Ляпунова у вигляді пучків квадратичних форм з додатними параметрами. Оцінки вибору цих параметрів виявилися досить цікавою задачею, яку й розглянуто у запропонованій статті.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \tag{1}$$

де $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Вектор-функція $a(\varphi) = \{a_1(\varphi), \ldots, a_m(\varphi)\}$, $m \geq 1$, є неперервною і 2π-періодичною за кожною змінною φ_i, $i = \overline{1, m}$. Матриця $A(\varphi)$ є $(n \times n)$-вимірною, її елементами є неперервні дійсні скалярні функції, 2π-періодичні за кожною змінною φ_i, $i = \overline{1, m}$, $A(\varphi) \in C^0(T_m)$. Додатково припускаємо, що вектор-функція $a(\varphi)$ задовольняє умову Ліпшиця: $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(T_m)$. Розв'язок задачі Коші

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \varphi|_{t=0} = \varphi_0$$

позначимо через $\varphi_t(\varphi_0)$. Матрицант лінійної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi_0))x$$

з вектором параметрів φ_0 позначимо через $\Omega_\tau^t(\varphi_0)$. Він нормований у точці $t = \tau$: $\Omega_\tau^t(\varphi_0)\big|_{t=\tau} = I_n$, де I_n — одинична n-вимірна матриця. На основі того, що множина розв'язків $\varphi_t(\varphi_0)$ утворює динамічну систему $\varphi_t(\varphi_\tau(\varphi_0)) \equiv \varphi_{t+\tau}(\varphi_0)$ $\forall t, \tau \in R$, матрицант $\Omega_\tau^t(\varphi_0)$ має властивість

$$\Omega_\tau^t(\varphi_\sigma(\varphi_0)) \equiv \Omega_{\tau+\sigma}^{t+\sigma}(\varphi_0) \quad \forall t, \tau, \sigma \in R.$$

Далі будемо використовувати такі позначення: $\langle y, x\rangle = \sum_{i=1}^n y_i x_i$ — скалярний добуток у R^n, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$ — норма матриці A, $C^0(T_m)$ — простір дійсних функцій $F(\varphi)$, неперервних і 2π-періодичних за кожною змінною φ_i, $i = \overline{1, m}$, $C^1(T_m)$ — підпростір $C^0(T_m)$ неперервно диференційовних функцій, $C'(T_m; a)$ — підпростір $C^0(T_m)$ таких функцій $F(\varphi)$, що суперпозиція $F(\varphi_t(\varphi_0))$ є неперервно диференційовною за змінною t. Причому за означенням

$$\dot{F}(\varphi_0) = \frac{d}{dt} F(\varphi_t(\varphi_0))\bigg|_{t=0}.$$

Це означає, що крапкою зверху позначаємо похідну в певному напрямку, якщо, наприклад, функція $F(\varphi)$ є неперервно диференційовною, тобто $F(\varphi) \in C^1(T_m)$, то $\dot{F}(\varphi) = \sum_{j=1}^m \dfrac{\partial F(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi)$. Разом із системою (1) розглядається неоднорідна система диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi), \tag{2}$$

де $f(\varphi)$ — деяка неперервна вектор-функція, $f(\varphi) \in C^0(T_m)$.

Означення 1. *Система (2) має інваріантний тор, визначений рівністю $x = u(\varphi)$, якщо $u(\varphi) \in C'(T_m; a)$ і виконується тотожність*

$$\dot{u}(\varphi) \equiv A(\varphi)u(\varphi) + f(\varphi) \quad \forall \varphi \in T_m.$$

Зауваження 1. Якщо припускати, що функція $u(\varphi)$ є неперервно диференційовною, то інваріантний тор $x = u(\varphi)$ — це розв'язок системи рівнянь із частинними похідними

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi_1} a_1(\varphi) + \frac{\partial x}{\partial \varphi_2} a_2(\varphi) + \ldots + \frac{\partial x}{\partial \varphi_m} a_m(\varphi) = A(\varphi)x + f(\varphi).$$

Зауваження 2. У [11] доведено, що у випадку, коли для вектор-функції $a(\varphi)$ виконується умова Ліпшиця, то кожну функцію $u(\varphi) \in C'(T_m; a)$ завжди можна наблизити диференційовними функціями $u_n(\varphi) \in C^1(T_m)$ таким чином, що одночасно й $\dot{u}_n(\varphi) \to \dot{u}(\varphi)$.

Означення 2. *Система (1) має функцію Гріна – Самойленка $G_0(\tau, \varphi)$ задачі про інваріантні тори, якщо існує така матриця $C(\varphi) \in C^0(T_m)$, при якій функція*

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \le 0, \\ \Omega_\tau^0(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases} \tag{3}$$

задовольняє нерівності $\|G_0(\tau, \varphi)\| \le K \exp\{-\gamma|\tau|\}$, *де* $K,\ \gamma$ — $\mathrm{const} > 0$.

Означення 3. *Система (1) є регулярною, якщо для неї існує єдина функція Гріна – Самойленка (3). Якщо ж існує безліч різних таких функцій (3), то систему (1) називають слабко регулярною.*

Зауваження 3. Якщо вже маємо побудовану функцію Гріна – Самойленка (3), то симетрична матриця

$$S(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi)) \big[\Omega_\tau^0(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi))\big]^T d\tau -$$
$$- \int_{0}^{+\infty} \big\{\Omega_\tau^0(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n]\big\} \big\{\Omega_\tau^0(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n]\big\}^T d\tau$$

задовольняє нерівність

$$\Big\langle \Big[\dot{S}(\varphi) - S(\varphi) A^T(\varphi) - A(\varphi) S(\varphi)\Big] y, y \Big\rangle \ge \frac{1}{2}\|y\|^2 \quad \forall y \in R^n, \quad S(\varphi) \in C'(T_m; a).$$

Крім записаної вище матриці можна розглядати множину симетричних матриць

$$S(\varphi; H_1, H_2) = \int_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi)) H_1(\varphi_\tau(\varphi)) \big[\Omega_\tau^0(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi))\big]^T d\tau -$$
$$- \int_{0}^{+\infty} \big\{\Omega_\tau^0(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n]\big\} H_2(\varphi_\tau(\varphi)) \big\{\Omega_\tau^0(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n]\big\}^T d\tau$$

із деякими $(n \times n)$-вимірними неперервними симетричними матрицями $H_j(\varphi) \in C^0(T_m)$, додатно визначеними $\langle H_j(\varphi)x, x\rangle \ge h_j\|x\|^2,\ h_j = \mathrm{const} > 0$. При цьому похідна квадратичної форми $\langle S(\varphi; H_1, H_2)y, y\rangle,\ y \in R^n$, вздовж розв'язків спряженої до (1) системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dy}{dt} = -A^T(\varphi) y, \tag{4}$$

буде додатно визначеною.

Зауваження 4. У випадку, коли функція Гріна – Самойленка (3) єдина, тобто система (1) є регулярною, то множина матриць $S(\varphi; H_1, H_2)$ співпадає з множиною матриць $S(\varphi; H, H)$, а якщо система (1) має безліч різних функцій Гріна – Самойленка (3), то множина матриць $S(\varphi; H_1, H_2)$ буде ширшою за множину $S(\varphi; H, H)$.

Нагадаємо відоме твердження.

Теорема 1 [5]**.** *Нехай існує квадратична форма $\langle S(\varphi)y, y\rangle$, $y \in R^n$, $S(\varphi) \in C^1(T_m)$, похідна якої вздовж розв'язків спряженої системи (4) є додатно визначеною, тобто виконується нерівність*

$$\left\langle \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi) - S(\varphi)A^T(\varphi) - A(\varphi)S(\varphi)\right] y, y \right\rangle \geq \|y\|^2. \tag{5}$$

Тоді система (1) буде мати функцію Гріна – Самойленка (3). Причому у випадку, коли $\det S(\varphi) \neq 0 \ \forall \varphi \in T_m$, система (1) і спряжена до неї (4) будуть регулярними. Якщо ж $\det S(\varphi_0) = 0$ при деякому значенні $\varphi = \varphi_0 \in T_m$, то система (1) буде мати безліч різних функцій Гріна – Самойленка (3), а спряжена система (4) не матиме жодної такої функції.

Зауваження 5. Якщо у нерівності (5) матриця $S(\varphi)$ є невиродженою, то похідна вздовж розв'язків системи (1) квадратичної форми $V = -\langle S^{-1}(\varphi)x.x\rangle$ буде додатно визначеною.

Наведемо цікаві приклади.

Система, яка складається з двох скалярних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0{,}81 - \sin 2\varphi, \qquad \frac{dx}{dt} = -(0{,}59 + \cos 2\varphi)x, \tag{6}$$

є регулярною, а наступна мало змінена система

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0{,}8 - \sin 2\varphi, \qquad \frac{dx}{dt} = -(0{,}59 + \cos 2\varphi)x \tag{7}$$

вже є слабко регулярною (має безліч різних функцій Гріна – Самойленка).

Переконаємось у цьому. Запишемо спряжену систему до системи (6):

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0{,}81 - \sin 2\varphi, \qquad \frac{dy}{dt} = (0{,}59 + \cos 2\varphi)y$$

і зауважимо, що похідна функції $V_1 = (1{,}2 - \sin 2\varphi)y^2$ вздовж розв'язків цієї системи оцінюється знизу:

$$\dot{V}_1 = (1{,}416 + 0{,}78\cos 2\varphi - 1{,}18\sin 2\varphi)y^2 \geq 0{,}015y^2.$$

При цьому коефіцієнт $1{,}2 - \sin 2\varphi$ не набуває нульових значень. Це й гарантує регулярність системи (6). Якщо ж тепер розглянути систему (7), то можна помітити, що похідна функції $V_2 = (\cos 2\varphi)y^2$ вздовж розв'язків спряженої системи $\dfrac{d\varphi}{dt} = 0{,}8 - \sin 2\varphi$, $\dfrac{dy}{dt} = (0{,}59 + \cos 2\varphi)y$ оцінюється знизу: $\dot{V}_2 = (2 + 1{,}18\cos 2\varphi - 1{,}6\sin 2\varphi)y^2 \geq 0{,}01y^2$. При цьому коефіцієнт $\cos 2\varphi$ набуває нульових значень при $\varphi = \varphi_0 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$. Це й вказує на те, що система (7) є слабко регулярною.

Звернемо увагу на те, що диференціальна нерівність $\frac{ds}{d\varphi}(0{,}81 - \sin 2\varphi) + 2s(0{,}59 + \cos 2\varphi) > 0$ має розв'язок $s = s(\varphi) = 1{,}2 - \sin 2\varphi$. Крім цього можна записати множину розв'язків $s = s(\varphi) = p - \sin 2\varphi$, де дійсний параметр p задовольняє нерівності $1{,}185 \leq p \leq 1{,}3$. Будь-який розв'язок $s = s(\varphi)$ записаної вище нерівності не може набувати нульових значень. Якщо ж у записаній нерівності поставити мінус: $\frac{ds}{d\varphi}(0{,}81 - \sin 2\varphi) - 2s(0{,}59 + \cos 2\varphi) > 0$, то ця нерівність також буде мати множину розв'язків $s = s(\varphi)$ $\Big($зокрема $s = -\frac{1}{p - \sin 2\varphi}$, $1{,}185 \leq p \leq 1{,}3\Big)$ і кожен із розв'язків не набуває нульових значень.

Якщо тепер записати диференціальну нерівність, яка відповідає мало зміненій системі $\frac{ds}{d\varphi}(0{,}8 - \sin 2\varphi) + 2s(0{,}59 + \cos 2\varphi) > 0$, то ця нерівність має розв'язки $s = s(\varphi) = \cos 2\varphi$ і кожний з розв'язків записаної нерівності обов'язково набуває нульових значень. Нерівність $\frac{ds}{d\varphi}(0{,}8 - \sin 2\varphi) - 2s(0{,}59 + \cos 2\varphi) > 0$ не має жодного розв'язку $s = s(\varphi) \in C^1(T_1)$.

Повертаючись до системи (1), припустимо, що вона є слабко регулярною, тобто має безліч різних функцій Гріна – Самойленка (3). Це еквівалентно тому, що існують квадратичні форми (їх безліч) $W = \langle S_2(\varphi)x_2, x_2\rangle$, $x_2 \in R^n$, похідна яких вздовж розв'язків спряженої системи до системи (1) щодо нормальних змінних $\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi)$, $\frac{dx_2}{dt} = -A^T(\varphi)x_2$ є знаковизначеною, тобто виконується нерівність

$$\dot{W} = \Big\langle \Big[\dot{S}_2(\varphi) - S_2(\varphi)A^T(\varphi) - A(\varphi)S_2(\varphi)\Big]x_2, x_2\Big\rangle \geq \|x_2\|^2, \tag{8}$$

де

$$\dot{S}_2(\varphi) = \frac{\partial S_2}{\partial \varphi_1}\, a_1 + \ldots + \frac{\partial S_2}{\partial \varphi_m}\, a_m.$$

Кожна з таких квадратичних форм W обов'язково буде вироджуватися, тобто завжди існуватиме таке значення $\varphi = \varphi_0$, при якому $\det S_2(\varphi_0) = 0$. При цьому розширена система

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = A(\varphi)x_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - A^T(\varphi)x_2, \end{cases} \qquad x_1, x_2 \in R^n, \tag{9}$$

буде регулярною, тобто матиме єдину функцію Гріна – Самойленка, яка має вигляд $(2n \times 2n)$-вимірної матриці

$$\overline{G}_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \Omega_\tau^0(\varphi) & 0 \\ \omega(\tau,\varphi) & [\Omega_0^\tau(\varphi)]^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11}(\varphi_\tau(\varphi)) & C_{12}(\varphi_\tau(\varphi)) \\ C_{21}(\varphi_\tau(\varphi)) & C_{22}(\varphi_\tau(\varphi)) \end{pmatrix}, & \tau \leq 0, \\ \begin{pmatrix} \Omega_\tau^0(\varphi) & 0 \\ \omega(\tau,\varphi) & [\Omega_0^\tau(\varphi)]^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11}(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n & C_{12}(\varphi_\tau(\varphi)) \\ C_{21}(\varphi_\tau(\varphi)) & C_{22}(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n \end{pmatrix}, & \tau > 0, \end{cases}$$

де

$$\omega(\tau,\varphi) = \int\limits_{\tau}^{0} [\Omega_0^{\sigma}(\varphi)]^T \Omega_{\tau}^{\sigma}(\varphi) d\sigma, \qquad \begin{pmatrix} C_{11}(\varphi) & C_{12}(\varphi) \\ C_{21}(\varphi) & C_{22}(\varphi) \end{pmatrix}^2 \equiv \begin{pmatrix} C_{11}(\varphi) & C_{12}(\varphi) \\ C_{21}(\varphi) & C_{22}(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Якщо припустити, що система (1) є регулярною, то й розширена система (9) також буде регулярною і матриця проєктування буде мати блочно-трикутний вигляд

$$\begin{pmatrix} C_{11}(\varphi) & C_{12}(\varphi) \\ C_{21}(\varphi) & C_{22}(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}(\varphi) & 0 \\ C_{21}(\varphi) & C_{22}(\varphi) \end{pmatrix}.$$

При виконанні нерівності (8) із деякою матрицею $S_2(\varphi)$ розглянемо квадратичну форму з додатним параметром p:

$$V = p\langle x_1, x_2\rangle + \langle S_2(\varphi)x_2, x_2\rangle. \tag{10}$$

При додатних достатньо великих значеннях параметра $p > 0$ похідна квадратичної форми (10) вздовж розв'язків системи (9) буде додатно визначеною і при цьому форма (10) є невиродженою. Звідси й випливає регулярність системи (9).

Зауважимо, що якщо у квадратичній формі (10) розглянути тільки перший доданок

$$V_1 = \langle x_1, x_2\rangle, \quad x_1 \in R^n, \quad x_2 \in R^n,$$

то похідна цієї квадратичної форми вздовж розв'язків системи (9) при будь-якому $A(\varphi)$ (можливо й $A(\varphi) \equiv 0$) буде невід'ємною $\dot{V}_1 = \|x_1\|^2$. Звідси випливає висновок: якщо для системи (1) існує деяка квадратична форма

$$V_1 = \langle S_1(\varphi)x, x\rangle, \tag{11}$$

похідна якої вздовж розв'язків системи (1) задовольняє нерівність

$$\dot{V}_1 = \Big\langle \Big[\dot{S}_1(\varphi) + S_1(\varphi)A(\varphi) + A^T(\varphi)S_1(\varphi)\Big]x, x\Big\rangle \geq \|x_1\|^2, \tag{12}$$

де x_1 — тільки деяка частина змінних x, то ніякої інформації про регулярність системи (1) не отримуємо.

Тепер припустимо, що систему рівнянь (1) можна записати у вигляді

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = A_{11}(\varphi)x_1 + A_{12}(\varphi)x_2, & x_1 \in R^{n_1}, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = A_{21}(\varphi)x_1 + A_{22}(\varphi)x_2, & x_2 \in R^{n_2}; \end{cases} \tag{13}$$

при цьому $n_1 + n_2 = n,\ n \geq 2$. Із системи (13) виділимо підсистему

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx_2}{dt} = A_{22}(\varphi)x_2 \tag{14}$$

і припустимо, що існує квадратична форма $\langle S_{22}(\varphi)x_2, x_2\rangle$, похідна якої вздовж розв'язків системи (14) є додатно визначеною:

$$\Big\langle \Big[\dot{S}_{22}(\varphi) + S_{22}(\varphi)A_{22}(\varphi) + A_{22}^T(\varphi)S_{22}(\varphi)\Big]x_2, x_2\Big\rangle \geq \|x_2\|^2. \tag{15}$$

Якщо припускати виконання двох нерівностей (12) і (15), то тепер можна стверджувати, що похідна вздовж розв'язків системи (13) квадратичної форми з додатним параметром p

$$V = p\langle S_1(\varphi)x, x\rangle + \langle S_{22}(\varphi)x_2, x_2\rangle$$

буде додатно визначеною при достатньо великих значеннях параметра $p > 0$.

Дійсно, обчислюючи цю похідну, отримуємо

$$\begin{aligned}\dot V &= p\overbrace{\langle S_1(\varphi)x, x\rangle}^{\cdot} + \Big\langle \dot S_{22}(\varphi)x_2, x_2\Big\rangle + 2\langle S_{22}(\varphi)x_2, \dot x_2\rangle \geq \\ &\geq p\|x_1\|^2 + \Big\langle \dot S_{22}(\varphi)x_2, x_2\Big\rangle + 2\langle S_{22}(\varphi)x_2, [A_{21}(\varphi)x_1 + A_{22}(\varphi)x_2]\rangle \geq \\ &\geq p\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + 2\langle S_{22}(\varphi)x_2, A_{21}(\varphi)x_1\rangle \geq \\ &\geq p\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2\|S_{22}\|_0\|A_{21}\|_0\|x_1\|\,\|x_2\|.\end{aligned}$$

Звідси видно, що при достатньо великих значеннях $p > 0$ похідна $\dot V$ буде додатно визначеною.

Зауважимо, що система (13) при умовах і позначеннях

$$n_1 = n_2 = n, \quad A_{12}(\varphi) \equiv 0, \quad A_{21}(\varphi) \equiv I_n,$$
$$A_{11}(\varphi) = A(\varphi), \quad A_{22}(\varphi) = -A^T(\varphi)$$

набуває вигляду розширеної системи (9).

Позначимо лінійний оператор

$$L[S] = L[S(\varphi)] = \dot S(\varphi) + S(\varphi)A(\varphi) + A^T(\varphi)S(\varphi) \tag{16}$$

і запишемо нерівності (12) і (15) у вигляді

$$\langle L[S_1]x, x\rangle \geq \|P_1 x\|^2, \qquad \langle L[S_2]P_2x, P_2x\rangle \geq \|P_2x\|^2, \tag{17}$$

де

$$P_1 = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2}\end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{22}(\varphi)\end{pmatrix}. \tag{18}$$

Тепер припускаємо виконання двох нерівностей (17) із деякими матрицями $P_1,\ P_2,\ S_2,$ які не обов'язково мають вигляд (18), а саме виконуються нерівності

$$\langle L[S_1]x, x\rangle \geq \|Q_1(\varphi)x\|^2, \qquad \langle L[S_2]Q_2(\varphi)x, Q_2(\varphi)x\rangle \geq \|Q_2(\varphi)x\|^2. \tag{19}$$

Справедливе таке твердження.

Теорема 2. *Нехай існують дві* $(n \times n)$*-вимірні симетричні матриці* $S_j(\varphi) \in C^1(T_m),\ j = 1, 2,$ *які задовольняють нерівності (19) із деякими двома неперервними* $(n \times n)$*-вимірними матрицями* $Q_j(\varphi) \in C^0(T_m),$ *сума яких* $Q_1(\varphi) + Q_2(\varphi) = Q(\varphi)$ *є невиродженою матрицею* $\det Q(\varphi) \neq 0\ \ \forall \varphi \in T_m$ *і, до того ж, ці матриці комутативні:*

$$Q_1(\varphi)Q(\varphi) \equiv Q(\varphi)Q_1(\varphi) \quad \forall \varphi \in T_m. \tag{20}$$

Тоді при достатньо великих значеннях параметрів $p_1 > 0,\ p_2 > 0$ *буде виконуватися нерівність*

$$\langle L[p_1 S_1 + p_2 S_2]x, x\rangle \geq \varepsilon \|x\|^2 \quad \forall x \in R^n, \quad \varepsilon = \mathrm{const} > 0. \tag{21}$$

Доведення. Ліву частину нерівності (21) запишемо у вигляді чотирьох доданків:

$$\begin{aligned}\langle L[p_1S_1 + p_2S_2]x, x\rangle &= p_1\langle L[S_1]x, x\rangle + p_2\big\langle L[S_2](Q_1+Q_2)Q^{-1}x, (Q_1+Q_2)Q^{-1}x\big\rangle = \\ &= p_1\langle L[S_1]x, x\rangle + p_2\big\langle L[S_2]Q_1Q^{-1}x, Q_1Q^{-1}x\big\rangle + \\ &\quad + 2p_2\big\langle L[S_2]Q_1Q^{-1}x, Q_2Q^{-1}x\big\rangle + p_2\big\langle L[S_2]Q_2Q^{-1}x, Q_2Q^{-1}x\big\rangle.\end{aligned}$$

Кожний з цих доданків оцінимо знизу. Для першого доданка, на основі першої з нерівностей (19), маємо $p_1\langle L[S_1]x, x\rangle \geq p_1\|Q_1x\|^2$. Для другого доданка з урахуванням комутативності (20) отримуємо

$$\begin{aligned}p_2\big\langle L[S_2]Q_1Q^{-1}x, Q_1Q^{-1}x\big\rangle &= p_2\big\langle L[S_2]Q^{-1}Q_1x, Q^{-1}Q_1x\big\rangle = \\ &= p_2\Big\langle\Big\{\big(Q^{-1}\big)^T L[S_2]Q^{-1}\Big\}Q_1x, Q_1x\Big\rangle \geq -p_2K\|Q_1x\|^2,\end{aligned}$$

де постійну K визначає нерівність

$$K \geq \Big\|\Big\{\big(Q^{-1}\big)^T L[S_2]Q^{-1}\Big\}\Big\|_0 = \max_{\varphi}\Big\|\big(Q^{-1}(\varphi)\big)^T [L[S_2(\varphi)]]Q^{-1}(\varphi)\Big\|.$$

Аналогічно оцінюємо знизу третій доданок

$$2p_2\big\langle L[S_2]Q_1Q^{-1}x, Q_2Q^{-1}x\big\rangle \geq -2p_2K\|Q_1x\|\|Q_2x\|.$$

На основі другої з нерівностей (19) і комутативності матриць (20) оцінюємо знизу четвертий доданок:

$$p_2\big\langle L[S_2]Q_2Q^{-1}x, Q_2Q^{-1}x\big\rangle \geq p_2\|Q_2Q^{-1}x\|^2 = p_2\big\|Q^{-1}Q_2x\big\|^2 \geq \frac{p_2}{\|Q\|_0^2}\,\|Q_2x\|^2.$$

Таким чином, при додатних значеннях параметрів $p_1,\ p_2$ має місце нерівність

$$\big\langle L[p_1S_1 + p_2S_2]x, x\big\rangle \geq (p_1 - p_2K)\|Q_1x\|^2 - 2p_2K\|Q_1x\|\|Q_2x\| + \frac{p_2}{\|Q\|_0^2}\,\|Q_2x\|^2.$$

При позначеннях $\|Q_1x\| = t_1,\ \|Q_2x\| = t_2$ розглянемо праву частину отриманої вище нерівності як квадратичну форму

$$(p_1 - p_2K)t_1^2 + \frac{p_2}{\|Q\|_0^2}\,t_2^2 - 2p_2Kt_1t_2 = \Phi(t_1, t_2). \tag{22}$$

Знайдемо такі додатні значення параметрів $p_1,\ p_2,$ при яких квадратична форма (22) буде додатно визначеною:

$$\Phi(t_1, t_2) \geq \gamma\big(t_1^2 + t_2^2\big), \quad \gamma = \mathrm{const} > 0. \tag{23}$$

Запишемо симетричну матрицю, яка відповідає квадратичній формі (22):

$$\begin{pmatrix} p_1 - p_2 K & -p_2 K \\ -p_2 K & \dfrac{p_2}{\|Q\|_0^2} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, нерівність (23) буде виконуватися, якщо $p_1 - p_2 K > 0$ і визначник записаної вище матриці буде додатним: $(p_1 - p_2 K)\dfrac{p_2}{\|Q\|_0^2} - p_2^2 K^2 > 0.$

Враховуючи, що значення параметрів $p_1,\ p_2$ є додатними, з останньої нерівності отримуємо

$$p_1 > p_2 K\big(1 + K\|Q\|_0^2\big). \tag{24}$$

Таким чином, при будь-якому додатному значенні параметра $p_2,$ вибираючи з нерівності (24) значення $p_1,$ одержуємо нерівність

$$\langle L[p_1 S_1 + p_2 S_2]x, x\rangle \geq \gamma\big(\|Q_1 x\|^2 + \|Q_2 x\|^2\big), \tag{25}$$

де γ — деяка незалежна від $x \in R^n$ додатна стала. Враховуючи нерівності

$$\|x\| = \big\|Q^{-1}Qx\big\| = \big\|Q^{-1}(Q_1 + Q_2)x\big\| \leq \|Q^{-1}\|_0(\|Q_1 x\| + \|Q_2 x\|),$$

$$\|x\|^2 \leq 2\|Q^{-1}\|_0^2\big(\|Q_1 x\|^2 + \|Q_2 x\|^2\big),$$

із нерівності (25) маємо оцінку

$$\langle L[p_1 S_1 + p_2 S_2]x, x\rangle \geq \frac{\gamma}{2\|Q^{-1}\|_0^2}\,\|x\|^2,$$

що й потрібно було довести.

Зауваження 6. Якщо умова комутативності (20) не виконується, то теорема не буде справедливою, тобто оцінка (21) може не виконуватись.

Приведемо приклад. Нехай маємо

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Переконаємося, що нерівності (19) виконуються:

$$L[S_1] = S_1 A + A^T S_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \langle L[S_1]x, x\rangle = 2(x_1 - x_2)^2 = \|Q_1 x\|^2,$$

$$L[S_2] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \langle L[S_2]Q_2x, Q_2x\rangle = 2(x_2)^2 \geq \|Q_2x\|^2.$$

При цьому

$$Q_1Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq QQ_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Якщо тепер розглянути симетричну матрицю

$$L[p_1S_1 + p_2S_2] = \begin{pmatrix} 2p_1 & -2p_1 - p_2 \\ -2p_1 - p_2 & 2p_1 + 2p_2 \end{pmatrix},$$

то відповідна квадратична форма не буде додатно визначеною ні при яких додатних значеннях параметрів $p_1,\ p_2$, оскільки $\det L[p_1S_1 + p_2S_2] = -p_2^2 < 0$.

Зауваження 7. Якщо першу з нерівностей (19), яка має вигляд $\langle L[S_1]x, x\rangle \geq \|Q_1(\varphi)x\|^2$, замінити нерівністю $\langle L[S_1]Q(\varphi)x, Q(\varphi)x\rangle \geq \|Q_1(\varphi)x\|^2$, а другу залишити без зміни, то теорема 1 буде справедливою без умови комутативності (20).

Переконаємось у цьому. Маємо

$$\begin{aligned}\langle L[p_1S_1 + p_2S_2]Qx, Qx\rangle &= p_1\langle L[S_1]Qx, Qx\rangle + p_2\langle L[S_2](Q_1 + Q_2)x, (Q_1 + Q_2)x\rangle \geq \\ &\geq p_1\|Q_1x\|^2 - p_2k_2\|Q_1x\|^2 - 2p_2k_2\|Q_1x\|\,\|Q_2x\| + p_2\|Q_2x\|^2 \geq \\ &\geq \gamma\big(\|Q_1x\|^2 + \|Q_2x\|^2\big) \geq \frac{\gamma}{2}\,\|Qx\|^2, \quad \gamma = \mathrm{const} > 0.\end{aligned}$$

Записані вище нерівності мають місце при додатних значеннях параметрів $p_1,\ p_2$, для яких виконується нерівність $p_1 > p_2k_2(1 + k_2),\ k_2 = \|L[S_2]\|_0$.

Тепер припустимо, що систему (1) можна записати у вигляді

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = A_{11}(\varphi)x_1 + A_{12}(\varphi)x_2 + A_{13}(\varphi)x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = A_{21}(\varphi)x_1 + A_{22}(\varphi)x_2 + A_{23}(\varphi)x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = A_{31}(\varphi)x_1 + A_{32}(\varphi)x_2 + A_{33}(\varphi)x_3, \end{cases} \tag{26}$$

де $x_j \in R^{n_j},\ j = \overline{1,3},\ n_1 + n_2 + n_3 = n$.

Нехай існує квадратична форма (11), похідна якої вздовж розв'язків системи (26) задовольняє нерівність (12), де в правій частині знаходяться тільки змінні $x_1 \in R^{n_1}$. Далі із системи (26) виділяємо підсистему

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_2}{dt} = A_{22}(\varphi)x_2 + A_{23}(\varphi)x_3, \quad x_2 \in R^{n_2}, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = A_{32}(\varphi)x_2 + A_{33}(\varphi)x_3, \quad x_3 \in R^{n_3}. \end{cases} \tag{27}$$

Припускаємо, що існує деяка квадратична форма

$$V_2 = \left\langle \hat{S}(\varphi)\hat{x}, \hat{x} \right\rangle, \qquad \hat{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

похідна якої вздовж розв'язків системи (27) є невід'ємною:

$$\dot{V}_2 = \overbrace{\left\langle \hat{S}(\varphi)\hat{x}, \hat{x} \right\rangle}^{\cdot} \geq \|x_2\|^2. \tag{29}$$

Зрештою зробимо такий крок: із системи (26) виділимо підсистему

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx_3}{dt} = A_{33}(\varphi)x_3, \quad x_3 \in R^{n_3}, \tag{30}$$

і припустимо, що існує квадратична форма

$$V_3 = \langle S_{33}(\varphi)x_3, x_3 \rangle, \tag{31}$$

похідна якої вздовж розв'язків системи (30) є додатно визначеною:

$$\left\langle \left[\dot{S}_{33}(\varphi) + S_{33}(\varphi)A_{33}(\varphi) + A_{33}^T(\varphi)S_{33}(\varphi) \right] x_3, x_3 \right\rangle \geq \|x_3\|^2. \tag{32}$$

Умов (12), (29) і (32) досить для того, щоб існувала квадратична форма, похідна якої вздовж розв'язків системи (26) була б додатно визначеною. Переконаємось у цьому. Припустивши, що виконуються нерівності (29) і (32), запишемо квадратичну форму з двома параметрами

$$p_2 \left\langle \hat{S}(\varphi)\hat{x}, \hat{x} \right\rangle + p_3 \langle S_{33}(\varphi)x_3, x_3 \rangle = V \tag{33}$$

і покажемо, що при достатньо великих значеннях параметрів $p_2 > 0,\ p_3 > 0$ похідна квадратичної форми (33) вздовж розв'язків системи (27) буде додатно визначеною, тобто буде виконуватися нерівність

$$\dot{V} \geq \left(\|x_2\|^2 + \|x_3\|^2 \right). \tag{34}$$

Запишемо похідну квадратичної форми (33) і одержимо

$$\dot{V} = p_2 \overbrace{\left\langle \hat{S}(\varphi)\hat{x}, \hat{x} \right\rangle}^{\cdot} + p_3 \left\langle \dot{S}_{33}(\varphi)x_3, x_3 \right\rangle + 2p_3 \left\langle S_{33}(\varphi)x_3, \left[A_{32}(\varphi)x_2 + A_{33}(\varphi)x_3 \right] \right\rangle.$$

Враховуючи нерівності (29) і (32), маємо

$$\dot{V} \geq p_2\|x_2\|^2 + p_3\|x_3\|^2 - 2p_3 k\|x_2\|\|x_3\|,$$

де

$$k = \|S_{33}(\varphi)A_{32}(\varphi)\|_0 = \left\{ \max_{\varphi} \|S_{33}(\varphi)A_{32}(\varphi)\| \right\}.$$

При позначеннях $\|x_2\| = t_1,\ \|x_3\| = t_2$ розглянемо праву частину нерівності (25):

$$p_2 t_1^2 + p_3 t_2^2 - 2p_3 K t_1 t_2 = \Phi(t_1, t_2).$$

Отриману квадратичну форму оцінимо знизу на одиничному колі: $t_1 = \cos\theta,\ t_2 = \sin\theta$. Тоді

$$\Phi(\cos\theta, \sin\theta) = p_2\,\frac{1+\cos 2\theta}{2} + p_3\,\frac{1-\cos 2\theta}{2} - p_3 k \sin 2\theta \geq$$

$$\geq \frac{p_2+p_3}{2} - \sqrt{\left(\frac{p_2-p_3}{2}\right)^2 + p_3^2k^2} =$$

$$= \frac{p_2p_3 - p_3^2k^2}{\dfrac{p_2+p_3}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{p_2-p_3}{2}\right)^2 + p_3^2k^2}} \geq \frac{p_2p_3 - p_3^2k^2}{p_2+p_3}.$$

Покладаючи, наприклад, $p_3 = 3$, параметр p_2 вибираємо з нерівності $\dfrac{3p_2 - 9k^2}{p_2+3} \geq 2$, тобто

$$p_2 \geq 6 + 9k^2. \tag{35}$$

Таким чином, якщо у квадратичній формі (33) покласти $p_3 = 3$, а параметр p_2 вибрати з нерівності (35), то похідна квадратичної форми (33) вздовж розв'язків системи (27) буде додатно визначеною, тобто буде виконуватися нерівність (34). Тепер, вибираючи квадратичну форму (11), яка задовольняє нерівності (12), і квадратичну форму (33), яка задовольняє нерівність (34), складаємо суму

$$p_1\langle S(\varphi)x, x\rangle + p_2\left\langle \hat{S}(\varphi)\hat{x}, \hat{x}\right\rangle + p_3\langle S_{33}(\varphi)x_3, x_3\rangle. \tag{36}$$

Аналогічно до викладеного вище встановлюємо, що похідна квадратичної форми (36) вздовж розв'язків системи (26) при достатньо великих додатних значеннях параметрів p_i, $i = \overline{1,3}$, буде додатно визначеною.

Приведемо приклад регулярної системи (26):

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1}{dt} = \sin 3\varphi_1, \\[2mm] \dfrac{d\varphi_2}{dt} = \cos 2\varphi_2\ , \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = (\cos 3\varphi_1 - \sin 2\varphi_2 - 1)x_1 + (\cos 3\varphi_1 - \sin 2\varphi_2)x_2, \\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt} = (\sin 2\varphi_2 + 1)x_1 + (\sin 2\varphi_2)x_2, \\[2mm] \dfrac{dx_3}{dt} = (-\sin 2\varphi_2 + 1)x_1 + (-\cos 3\varphi_1 + \sin 2\varphi_2)x_2 - (\cos 3\varphi_1)x_3. \end{cases} \tag{37}$$

Квадратичну форму (11) вибираємо у вигляді

$$V = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3. \tag{38}$$

Обчислюємо похідну квадратичної форми (38) вздовж розв'язків системи (37):

$$
\begin{aligned}
\dot V_1 = {} & \big[(\cos 3\varphi_1 - \sin 2\varphi_2 - 1)x_1 + (\cos 3\varphi_1 - \sin 2\varphi_2)x_2\big]x_2 + \\
& + x_1[(\sin 2\varphi_2 + 1)x_1 + (\sin 2\varphi_2)x_2] + \\
& + \big[(\cos 3\varphi_1 - \sin 2\varphi_2 - 1)x_1 + (\cos 3\varphi_1 - \sin 2\varphi_2)x_2\big]x_3 + \\
& + x_1\big[(-\sin 2\varphi_2 + 1)x_1 + (-\cos 3\varphi_1 + \sin 2\varphi_2)x_2 - (\cos 3\varphi_1)x_3\big] + \\
& + [(\sin 2\varphi_2 + 1)x_1 + (\sin 2\varphi_2)x_2]x_3 + \\
& + x_2\big[(-\sin 2\varphi_2 + 1)x_1 + (-\cos 3\varphi_1 + \sin 2\varphi_2)x_2 - (\cos 3\varphi_1)x_3\big] = \\
= {} & x_1^2\big[(\sin 2\varphi_2 + 1) + (-\sin 2\varphi_2 + 1)\big] + x_2^2\big[(\cos 3\varphi_1 - \sin 2\varphi_2) + (-\cos 3\varphi_1 + \sin 2\varphi_2)\big] + \\
& + x_1x_2\big[(\cos 3\varphi_1 - \sin 2\varphi_2 - 1) + (\sin 2\varphi_2) + (-\cos 3\varphi_1 + \sin 2\varphi_2) + (-\sin 2\varphi_2 + 1)\big] + \\
& + x_1x_3\big[(\cos 3\varphi_1 - \sin 2\varphi_2 - 1) - (\cos 3\varphi_1) + (\sin 2\varphi_2 + 1)\big] = 2x_1^2.
\end{aligned}
$$

Звідси видно, що нерівність (12) виконується. Тепер із системи (37) виділимо підсистему, відповідну до (27). Отримуємо

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\varphi_1}{dt} = \sin 3\varphi_1, \\[2mm]
\dfrac{d\varphi_2}{dt} = \cos 2\varphi_2,
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\dfrac{dx_2}{dt} = (\sin 2\varphi_2)x_2, \\[2mm]
\dfrac{dx_3}{dt} = (-\cos 3\varphi_1 + \sin 2\varphi_2)x_2 - (\cos 3\varphi_1)x_3.
\end{cases}
$$

Квадратичну форму, відповідну до (28), вибираємо у вигляді

$$V_2 = (\sin 2\varphi_2)x_2^2 \tag{39}$$

і обчислюємо її похідну вздовж розв'язків системи (30). Маємо

$$\dot V_2 = (\cos 2\varphi_2)2\dot\varphi_2 x_2^2 + (\sin 2\varphi_2)2x_2\dot x_2 = \big[2\cos^2 2\varphi_2 + 2\sin^2 2\varphi_2\big]x_2^2 = 2x_2^2.$$

Підсистема (30) у цьому випадку має вигляд

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\varphi_1}{dt} = \sin 3\varphi_1, \\[2mm]
\dfrac{d\varphi_2}{dt} = \cos 2\varphi_2,
\end{cases}
\qquad
\frac{dx_3}{dt} = -(\cos 3\varphi_1)x_3. \tag{40}
$$

Квадратичну форму, відповідну до (31), вибираємо у вигляді

$$V_3 = -(\cos 3\varphi_1)x_3^2. \tag{41}$$

Похідна цієї форми вздовж розв'язків системи (40) має вигляд

$$\dot V_3 = \big(3\sin^2 3\varphi_1 + 2\cos^2 3\varphi_1\big)x_3^2 \geq 2x_3^2.$$

Насамкінець із квадратичних форм (38), (39), (41) складаємо нову квадратичну форму з додатними параметрами $p_1,\ p_2,\ p_3$:

$$V = p_1V_1 + p_2V_2 + p_3V_3 = p_1(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + p_2(\sin 2\varphi_2)x_2^2 - p_3(\cos 3\varphi_1)x_3^2. \quad (42)$$

Тепер дослідимо, при яких значеннях додатних параметрів $p_1,\ p_2,\ p_3$ похідна квадратичної форми (42) вздовж розв'язків системи (37) буде додатно визначеною:

$$\dot V \geq \varepsilon\big(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\big), \quad \varepsilon = \text{const} > 0.$$

Обчислюючи похідну квадратичної форми (42) вздовж розв'язків системи (37) будемо мати

$$\begin{aligned}\dot V \geq\ & 2p_1x_1^2p_2\big[2\cos^2 2\varphi_2\big]x_2^2 + p_2(\sin 2\varphi_2)2x_2[(\sin 2\varphi_2 + 1)x_1 + (\sin 2\varphi_2)x_2] + \\ & + p_3\big(3\sin^2 3\varphi_1\big)x_3^2 + p_3(-\cos 3\varphi_1)2x_3 \times \\ & \times \big[(-\sin 2\varphi_2 + 1)x_1 + (-\cos 3\varphi_1 + \sin 2\varphi_2)x_2\big] + \\ & + p_3(-\cos 3\varphi_1)2x_3[-(\cos 3\varphi_1)x_3] \geq \\ \geq\ & 2p_1x_1^2 + 2p_2x_2^2 - 4p_2|x_1|\,|x_2| + 2p_3x_3^2 - 4p_3|x_1|\,|x_3| - 4p_3|x_2|\,|x_3|.\end{aligned}$$

Запишемо матрицю, яка відповідає квадратичній формі

$$\Phi = 2p_1x_1^2 + 2p_2x_2^2 + 2p_3x_3^2 - 4p_2|x_1|\,|x_2| - 4p_3|x_1|\,|x_3| - 4p_3|x_2|\,|x_3|. \quad (43)$$

Маємо

$$\begin{pmatrix} 2p_1 & -2p_2 & -2p_3 \\ -2p_2 & 2p_2 & -2p_3 \\ -2p_3 & -2p_3 & 2p_3 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Для того щоб квадратична форма (43) була додатно визначеною, потрібно щоб головні мінори матриці (44) були додатними:

$$\begin{cases} 4p_1p_2 - 4p_2^2 > 0, \\ 8p_3\big[p_1(p_2 - 2p_3) - 3p_2p_3 - p_2^2\big] > 0. \end{cases} \quad (45)$$

Враховуючи те, що всі три параметри $p_1,\ p_2,\ p_3$ додатні, з першої нерівності $4p_2(p_1 - - p_2) > 0$ випливає $p_1 > p_2$. Друга нерівність із системи (45) буде виконуватися при $p_2 - 2p_3 > 0$ і $p_1 > \dfrac{p_2^2 + 3p_2p_3}{p_2 - 2p_3}$.

Таким чином, приходимо до висновку, що похідна квадратичної форми (42) вздовж розв'язків системи (37) із трьома додатними параметрами $p_1,\ p_2,\ p_3$ буде додатно визначеною при виконанні нерівностей $p_2 - 2p_3 > 0,\ p_1 > p_2 + \dfrac{5p_2p_3}{p_2 - 2p_3}$. Звідси й випливає регулярність системи (37).

Використовуючи позначення (16), нерівності (12), (29) і (32) запишемо у вигляді

$$\langle L[S_1]x, x\rangle \geq \|P_1x\|^2,$$

$$\langle L[S_2](P_2+P_3)x,(P_2+P_3)x\rangle \geq \|P_2x\|^2,$$

$$\langle L[S_3]P_3x,P_3x\rangle \geq \|P_3x\|^2,$$

де позначено

$$P_1=\operatorname{diag}\{I_{n_1},0,0\}, \qquad P_2=\operatorname{diag}\{0,I_{n_2},0\}, \qquad P_3=\operatorname{diag}\{0,0,I_{n_3}\},$$

$$S_2=\operatorname{diag}\left\{0,\hat{S}(\varphi)\right\}, \qquad S_3=\operatorname{diag}\{0,0,S_{33}(\varphi)\}.$$

Тепер наведені вище нерівності узагальнимо та розглянемо наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай існують три* $(n\times n)$*-вимірні симетричні матриці* $S_j(\varphi)\in C^1(T_m)$, $j=\overline{1,3}$, *які задовольняють нерівності*

$$\langle L[S_1]Q(\varphi)x,Q(\varphi)x\rangle \geq \|Q_1(\varphi)x\|^2, \tag{46}$$

$$\langle L[S_2](Q_2(\varphi)+Q_3(\varphi))x,(Q_2(\varphi)+Q_3(\varphi))x\rangle \geq \|Q_2(\varphi)x\|^2, \tag{47}$$

$$\langle L[S_3]Q_3(\varphi)x,Q_3(\varphi)x\rangle \geq \|Q_3(\varphi)x\|^2, \tag{48}$$

з деякими трьома неперервними $(n\times n)$*-вимірними матрицями* $Q_j(\varphi)\in C^0(T_m)$, *сума яких* $Q_1(\varphi)+Q_2(\varphi)+Q_3(\varphi)=Q(\varphi)$ *є невиродженою матрицею* $\det Q(\varphi)\neq 0$ $\forall\varphi\in T_m$. *Тоді при деяких значеннях параметрів* $p_1>0,\ p_2>0,\ p_3>0$ *буде виконуватися нерівність*

$$\langle L[p_1S_1+p_2S_2+p_3S_3]x,x\rangle \geq \varepsilon\|x\|^2 \quad \forall x\in R^n, \quad \varepsilon=\mathrm{const}>0. \tag{49}$$

Доведення. Розглянемо суму двох матриць $p_2S_2+p_3S_3$ із двома додатними параметрами p_2 і p_3. Покажемо, що з нерівностей (47) і (48) випливає оцінка

$$\Big\langle L[p_2S_2+p_3S_3](Q_2+Q_3)x,(Q_2+Q_3)x\Big\rangle \geq \gamma\|(Q_2+Q_3)x\|^2, \tag{50}$$

де γ — $\mathrm{const}>0$. Вистачить вибрати достатньо великими значення параметрів $p_2,\ p_3$. Запишемо ліву частину нерівності (50) і оцінимо її знизу:

$$\begin{aligned}
&\Big\langle L[p_2S_2+p_3S_3](Q_2+Q_3)x,(Q_2+Q_3)x\Big\rangle =\\
&\quad = p_2\langle L[S_2](Q_2+Q_3)x,(Q_2+Q_3)x\rangle + p_3\langle L[S_3]Q_2x,Q_2x\rangle +\\
&\qquad + 2p_3\langle L[S_3]Q_2x,Q_3x\rangle + p_3\langle L[S_3]Q_3x,Q_3x\rangle \geq\\
&\quad \geq p_2\|Q_2x\|^2 - p_3k_3\|Q_2x\|^2 - 2p_3k_3\|Q_2x\|\,\|Q_3x\| + p_3\|Q_3x\|^2 \geq\\
&\quad \geq \frac{(p_2-p_3k_3-p_3k_3^2)p_3}{p_2+p_3-p_3k_3}\big(\|Q_2x\|^2+\|Q_3x\|^2\big) \geq \gamma\|(Q_2+Q_3)x\|^2,
\end{aligned}$$

де

$$\gamma=\frac{(p_2-p_3k_3-p_3k_3^2)p_3}{2(p_2+p_3-p_3k_3)}. \tag{51}$$

При цьому значення додатного параметра p_3 може бути довільним, а параметр p_2 вибираємо із нерівності

$$p_2 > p_3k_3 + p_3k_3^2, \tag{52}$$

де постійна k_3 визначена рівністю

$$k_3 = \|L[S_3]\|_0 = \max_{\varphi} \|L[S_3(\varphi)]\|.$$

Далі з нерівностей (46) і (50) отримуємо

$$\begin{aligned}
&\langle L[p_1S_1 + p_2S_2 + p_3S_3](Q_1 + Q_2 + Q_3)x, (Q_1 + Q_2 + Q_3)x\rangle = \\
&\quad = p_1\langle L[S_1]Qx, Qx\rangle + \langle L[p_2S_2 + p_3S_3](Q_1 + Q_2 + Q_3)x, (Q_1 + Q_2 + Q_3)x\rangle \geq \\
&\quad \geq p_1\|Q_1x\|^2 + \langle L[p_2S_2 + p_3S_3]Q_1x, Q_1x\rangle + 2\langle L[p_2S_2 + p_3S_3]Q_1x, (Q_2 + Q_3)x\rangle + \\
&\qquad + \langle L[p_2S_2 + p_3S_3](Q_2 + Q_3)x, (Q_2 + Q_3)x\rangle \geq \\
&\quad \geq (p_1 - K)\|Q_1x\|^2 - 2K\|Q_1x\|\|(Q_2 + Q_3)x\| + \gamma\|(Q_2 + Q_3)x\|^2,
\end{aligned}$$

де постійна K визначається рівністю

$$\|L[p_2S_2 + p_3S_3]\| \leq p_2\|L[S_2]\|_0 + p_3\|L[S_3]\|_0 = p_2k_2 + p_3k_3 = K.$$

Позначаючи $\|Q_1x\| = t_1$, $\|(Q_2 + Q_3)x\| = t_2$, розглянемо квадратичну форму $(p_1 - K)t_1^2 - 2Kt_1t_2 + \gamma t_2^2$. Для додатної визначеності цієї квадратичної форми потрібно, щоб виконувалися нерівності $(p_1 - K) > 0$ і $(p_1 - K)\gamma - K^2 > 0$.

Таким чином, якщо параметр p_1 вибрати з нерівності

$$p_1 > p_2k_2 + p_3k_3 + \frac{(p_2k_2 + p_3k_3)^2}{\gamma}, \tag{53}$$

де γ визначено рівністю (51), а параметр p_2 задовольняє нерівність (52) із будь-яким додатним значенням параметра p_3, то буде виконуватися оцінка (49). Це й потрібно було довести.

Тепер у нерівність (53) підставимо $p_3 = 1$, а замість γ — праву частину рівності (51). Отримуємо

$$\begin{aligned}
p_1 &> p_2k_2 + k_3 + \frac{2(p_2k_2 + k_3)^2(p_2 - k_3 + 1)}{p_2 - k_3 - k_3^2} = \\
&= p_2k_2 + k_3 + 2\big(p_2^2k_2^2 + 2p_2k_2k_3 + k_3^2\big)\left(1 + \frac{1 + k_3^2}{p_2 - k_3 - k_3^2}\right) = \\
&= 2k_2^2p_2^2 + \big(4k_2k_3 + k_2 + 2k_2^2 + 2k_2^2k_3^2\big)p_2 + \\
&\qquad + \big[k_3 + k_3^2 + 2\big(1 + k_3^2\big)\big(2k_2k_3 + k_2^2k_3 + k_2^2k_3^2\big)\big] + \\
&\qquad + \frac{2\big(1 + k_3^2\big)\big(k_3^2 + \big(k_3 + k_3^2\big)\big(2k_2k_3 + k_2^2k_3 + k_2^2k_3^2\big)\big)}{p_2 - k_3 - k_3^2}.
\end{aligned}$$

Таким чином, при виборі значення параметра $p_3 = 1$ вибираємо довільне значення параметра p_2 із нерівності $p_2 > K_3$, де $K_3 = k_3 + k_3^2$, а значення параметра p_1 задовольняє нерівність $p_1 > K_2 p_2^2 + K_1 p_2 + K_0 + \dfrac{K_{-1}}{p_2 - K_3}$, де $K_j,\ j = -1, 0, 1, 2,$ — деякі додатні сталі.

Зауваження 8. Умови теореми 2 наводять на думку, що можна припустити існування більшого числа симетричних матриць $S_j(\varphi) \in C^1(T_m),\ j = \overline{1, q}$, для яких виконуються нерівності

$$\begin{gathered}
\left\langle L[S_1]\left[\sum_{j=1}^{q} Q_j(\varphi)\right]x, \left[\sum_{j=1}^{q} Q_j(\varphi)\right]x\right\rangle \geq \|Q_1(\varphi)x\|^2,\\
\left\langle L[S_2]\left[\sum_{j=2}^{q} Q_j(\varphi)\right]x, \left[\sum_{j=2}^{q} Q_j(\varphi)\right]x\right\rangle \geq \|Q_2(\varphi)x\|^2,\\
\left\langle L[S_3]\left[\sum_{j=3}^{q} Q_j(\varphi)\right]x, \left[\sum_{j=3}^{q} Q_j(\varphi)\right]x\right\rangle \geq \|Q_3(\varphi)x\|^2,\\
\vdots\\
\langle L[S_{q-1}][Q_{q-1}(\varphi) + Q_q(\varphi)]x, [Q_{q-1}(\varphi) + Q_q(\varphi)]x\rangle \geq \|Q_{q-1}(\varphi)x\|^2,\\
\langle L[S_q]\,[Q_q(\varphi)]x, [Q_q(\varphi)]x\rangle \geq \|Q_q(\varphi)x\|^2
\end{gathered} \tag{54}$$

з деякими неперервними $(n \times n)$-вимірними матрицями $Q_j(\varphi) \in C^0(T_m)$, сума яких $\sum_{j=1}^{q} Q_j(\varphi) = Q(\varphi)$ є невиродженою $\det Q(\varphi) \neq 0\ \forall \varphi \in T_m$. При цих умовах похідна квадратичної форми $\sum_{j=1}^{q} p_j \langle S_j(\varphi)x, x\rangle$ вздовж розв'язків системи (1) буде додатно визначеною при виборі достатньо великих значень додатних параметрів p_j.

Доведення цього твердження проводиться аналогічно з доведенням теореми 2, починаючи з самої нижньої нерівності і піднімаючись уверх.

Зауваження 9. Якщо в нерівностях (53) ввести нові позначення

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{q} Q_j(\varphi) = \Theta_1(\varphi),\\
\sum_{j=2}^{q} Q_j(\varphi) = \Theta_2(\varphi),\\
\sum_{j=3}^{q} Q_j(\varphi) = \Theta_3(\varphi), \ldots,\\
Q_{q-1}(\varphi) + Q_q(\varphi) = \Theta_{q-1}(\varphi),\\
Q_q(\varphi) = \Theta_q(\varphi),
\end{gathered}$$

то систему нерівностей (54) можна записати у еквівалентному вигляді

$$\langle L[S_1]\Theta_1(\varphi)x, \Theta_1(\varphi)x\rangle \geq \|[\Theta_1(\varphi) - \Theta_2(\varphi)]x\|^2,$$
$$\langle L[S_2]\Theta_2(\varphi)x, \Theta_2(\varphi)x\rangle \geq \|[\Theta_2(\varphi) - \Theta_3(\varphi)]x\|^2,$$
$$\langle L[S_3]\Theta_3(\varphi)x, \Theta_3(\varphi)x\rangle \geq \|[\Theta_3(\varphi) - \Theta_4(\varphi)]x\|^2,$$
$$\vdots$$
$$\langle L[S_{q-1}]\Theta_{q-1}(\varphi)x, \Theta_{q-1}(\varphi)x\rangle \geq \|[\Theta_{q-1}(\varphi) - \Theta_q(\varphi)]x\|^2,$$
$$\langle L[S_q]\Theta_q(\varphi)x, \Theta_q(\varphi)x\rangle \geq \|\Theta_q(\varphi)x\|^2.$$

При цьому досить припускати невиродженість першої матриці $\Theta_1(\varphi)$.

Література

1. А. М. Самойленко, *О сохранении инвариантного тора при возмущении*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **34**, № 6, 1219 – 1240 (1970).
2. А. М. Самойленко, *Элементы математической теории многочастотных колебаний*, Наука, Москва (1987).
3. А. М. Самойленко, *О некоторых проблемах теории возмущений гладких инвариантных торов динамических систем*, Укр. мат. журн., **46**, № 12, 1665 – 1699 (1994).
4. А. М. Самойленко, *К вопросу существования единственной функции Грина линейного расширения динамической системы на торе*, Укр. мат. журн., **53**, № 4, 513 – 521 (2001).
5. Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, В. Л. Кулик, *Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова*, Наук. думка, Киев (1990).
6. А. А. Бойчук, *Условие существования единственной функции Грина – Самойленко задачи об инвариантном торе*, Укр. мат. журн., **53**, № 4, 556 – 559 (2001).
7. В. Л. Кулик, Н. В. Степаненко, *Знакозмінні функції Ляпунова в теорії лінійних розширень динамічних систем на торі*, Укр. мат. журн., **46**, № 4, 488 – 500 (2007).
8. В. Л. Кулик, А. Н. Кулик, Н. В. Степаненко, *Дополнение слабо регулярных линейных расширений динамических систем до регулярных*, Мат. журн. Алматы, **11**, № 1(39), 74 – 86 (2011).
9. І. М. Грод, В. Л. Кулик, *Про зв'язок функції Гріна і Ляпунова в лінійних розширеннях динамічних систем*, Укр. мат. журн., **66**, № 4, 551 – 557 (2017).
10. J. Kenneth, J. Palmer, *On the reducibility of almost periodic systems of linear differential systems*, J. Differential Equations, **36**, № 3, 374 – 390 (1980).
11. А. Н. Кулик, *О приближениях непрерывных периодических функций, дифференцируемых вдоль траекторий динамических систем*, Укр. мат. журн., **38**, № 1, 111 – 114 (1986).
12. В. А. Лагода, І. О. Парасюк, *Теорема існування інваріантного перерізу над $\mathbb{R}^m$ індефінітно монотонної системи в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$*, Укр. мат. журн., **65**, № 1, 103 – 118 (2013).

Одержано 15.10.22