УДК 517.983

УЗАГАЛЬНЕНЕ ОБЕРНЕННЯ ОПЕРАТОРНИХ МАТРИЦЬ (УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ ФРОБЕНІУСА)

В. П. Журавльов, М. П. Фомін

Поліс. нац. ун-т
б-р Старий, 7, Житомир, 10008, Україна
email: vfz2008@ukr.net, npfomin@gmail.com

We propose methods for construction of generalized inverse operator matrices to (2×2) operator matrices in Banach spaces. We obtain the condition of solvability and a formula of presentation of at least one solution of the operator equation in terms of a (2×2) operator matrix. It is shown that the obtained formula for the generalized inverse operator matrix is connected with the known Frobenius formula for construction of the inverse matrix for a nondegenerate block matrix.

Запропоновано способи побудови узагальнено обернених операторних матриць до (2×2)-вимірних операторних матриць у банахових просторах. Отримано умову розв'язності та формулу для подання принаймні одного розв'язку операторного рівняння з (2×2)-вимірною операторною матрицею. Показано зв'язок отриманої формули для узагальнено оберненої операторної матриці з відомою формулою Фробеніуса для побудови оберненої матриці до невиродженої блокової матриці.

Вступ. Розроблені за останнє десятиріччя способи побудови проєкторів, ортопроєкторів і узагальненого обернення лінійних обмежених операторів у скінченновимірних і нескінченновимірних банахових просторах широко застосовуються при дослідженні умов розв'язності крайових задач для не всюди розв'язних операторних рівнянь [1 – 4].

Дослідження слабко збурених і слабко нелінійних крайових задач для не всюди розв'язних операторних рівнянь у банахових просторах спричиняє проблеми з розв'язністю та зображенням розв'язків рівнянь із операторними матрицями.

Так, при дослідженні слабко збурених і слабко нелінійних крайових задач для інтегральних рівнянь із виродженим ядром у банахових просторах [5] виникла проблема з узагальненим оберненням (2×1)- та (1×2)-вимірних операторних матриць, яку було вирішено у [6].

При дослідженні слабко збурених та слабко нелінійних крайових задач для не всюди розв'язних інтегро-диференціальних рівнянь у банахових просторах виникли проблеми з розв'язністю та зображенням розв'язків рівнянь із (2×2)-вимірними операторними матрицями.

Тому актуальною є задача про побудову узагальнено-обернених операторів до (2×2)-вимірних операторних матриць, встановлення умов розв'язності та подання розв'язків рівнянь із такими матрицями.

Вирішення цієї проблеми буде цікавим і для узагальненого обернення (2×2)-вимірних блокових матриць, оскільки вони мають широке застосування при моделюванні теоретичних і практичних завдань у математиці, техніці, економіці тощо.

Постановка задачі. Розглянемо рівняння з операторною матрицею

$$B_0\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

де $B_{11} : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_3$, $B_{12} : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_3$, $B_{21} : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_4$, $B_{22} : \mathbf{B}_2 \to \mathbf{B}_4$ — лінійні обмежені оператори, $\mathbf{B}_i$, $i = \overline{1,4}$ — банахові простори.

Мета цієї роботи: знайти формули для побудови проєкторів та узагальнено оберненої матриці B_0^- до операторної матриці B_0, а також встановити умови існування та вигляд принаймні одного розв'язку рівняння (1).

Основний результат. Запишемо рівняння (1) у вигляді системи операторних рівнянь

$$\begin{cases} B_{11}c + B_{12}d = y_1, \\ B_{21}c + B_{22}d = y_2. \end{cases} \tag{2}$$

Надалі клас узагальнено оборотних операторів, які діють з банахового простору $\mathbf{X}$ у банаховий простір $\mathbf{Y}$ будемо позначати через $\mathbf{GI}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Нехай оператор B_{11} належить $\mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_3)$. Узагальнена оборотність оператора B_{11} означає [7, с. 138], що нуль-простір $N(B_{11})$ і підпростір $Y_{B_{11}} = \mathbf{B}_3 \ominus R(B_{11})$ доповнювальні у банахових просторах $\mathbf{B}_1$ і $\mathbf{B}_3$. Тоді існують [8] обмежені проєктори: $\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}$ — на підпростір $Y_{B_{11}} = \mathbf{B}_3 \ominus R(B_{11})$, $\mathcal{P}_{N(B_{11})}$ — на нуль-простір $N(B_{11})$ і обмежений узагальнено обернений оператор B_{11}^- до оператора B_{11}.

Перше рівняння системи (2) має розв'язок стосовно $c \in \mathbf{B}_1$ тоді й лише тоді, коли виконується умова [1]

$$\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}[y_1 - B_{12}d] = 0, \tag{3}$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків

$$c = \mathcal{P}_{N(B_{11})}\bar{c} + B_{11}^-[y_1 - B_{12}d], \tag{4}$$

де $\bar{c}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$.

Підставимо знайдене c з (4) у друге рівняння системи (2):

$$B_{21}\big\{\mathcal{P}_{N(B_{11})}\bar{c} + B_{11}^-[y_1 - B_{12}d]\big\} + B_{22}d = y_2,$$

або

$$\widetilde{B}_{22}d = y_2 - B_{21}B_{11}^-y_1 - B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})}\bar{c}, \tag{5}$$

де $\widetilde{B}_{22} = B_{22} - B_{21}B_{11}^-B_{12}$ — лінійний обмежений оператор.

Нехай оператор $\widetilde{B}_{22}$ належить $\mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_4)$. Тоді рівняння (5) має розв'язок стосовно $d \in \mathbf{B}_2$ тоді й лише тоді, коли виконується умова [1]

$$\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}\big[y_2 - B_{21}B_{11}^-y_1 - B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})}\bar{c}\big] = 0, \tag{6}$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків

$$d = \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}\bar{d} + \widetilde{B}_{22}^-\big[y_2 - B_{21}B_{11}^-y_1 - B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})}\bar{c}\big], \tag{7}$$

де $\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}$ — обмежений проєктор на підпростір $Y_{\widetilde{B}_{22}} = \mathbf{B}_4 \ominus R\big(\widetilde{B}_{22}\big)$, $\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}$ — обмежений проєктор на нуль-простір $N(\widetilde{B}_{22})$ оператора $\widetilde{B}_{22}$, $\widetilde{B}_{22}^{-}$ — обмежений узагальнено обернений оператор до оператора $\widetilde{B}_{22}$.

Для отримання умови розв'язку першого рівняння системи (2) підставимо (7) у (3):

$$\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\Big[y_1 - B_{12}\Big(\mathcal{P}_{N\left(\widetilde{B}_{22}\right)}\bar{d} + \widetilde{B}_{22}^{-}\big[y_2 - B_{21}B_{11}^{-}y_1 - B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})}\bar{c}\big]\Big)\Big] = 0$$

або

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})}\bar{c} - \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\mathcal{P}_{N\left(\widetilde{B}_{22}\right)}\bar{d} + \\ &\quad + \Big(\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}B_{11}^{-}\Big)y_1 - \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-}y_2 = 0.\end{aligned} \tag{8}$$

Позначивши $\widehat{B}_{22}^{-} = B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}$ та підставивши (7) у (4), отримаємо

$$c = \mathcal{P}_{N(B_{11})}\bar{c} + B_{11}^{-}\Big\{y_1 - B_{12}\Big[\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}\bar{d} + \widetilde{B}_{22}^{-}\big(y_2 - B_{21}B_{11}^{-}y_1 - B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})}\bar{c}\big)\Big]\Big\}$$

або

$$\begin{aligned}c = &\Big[\mathcal{P}_{N(B_{11})} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})}\Big]\bar{c} - \\ &- B_{11}^{-}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}\bar{d} + \Big[B_{11}^{-} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-}\Big]y_1 - B_{11}^{-}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-}y_2.\end{aligned} \tag{9}$$

З умов (8) та (6) одержимо умови розв'язності матричного операторного рівняння (2)

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{c} \\ \bar{d}\end{bmatrix} + \\ &\quad + \begin{bmatrix}\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-} & -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B_{11}^{-} & \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1 \\ y_2\end{bmatrix} = 0.\end{aligned} \tag{10}$$

Тоді, враховуючи (7) і (9), маємо загальний розв'язок операторної системи (1):

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}c \\ d\end{bmatrix} = &\begin{bmatrix}\mathcal{P}_{N(B_{11})} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & -B_{11}^{-}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ -\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{c} \\ \bar{d}\end{bmatrix} + \\ &\quad + \begin{bmatrix}B_{11}^{-} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-} & -B_{11}^{-}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} \\ -\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}B_{11}^{-} & \widetilde{B}_{22}^{-}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1 \\ y_2\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{11}$$

де $\bar{c} \in \mathbf{B}_1$, $\bar{d} \in \mathbf{B}_2$ — елементи, які задовольняють умову (10).

Позначимо оператори

$$K = \begin{bmatrix}-\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & 0\end{bmatrix}, \quad \widetilde{B}_0 = B_0 - K, \tag{12}$$

$$\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(B_{11})} + B_{11}^- \widehat{B}_{22}^- \mathcal{P}_{N(B_{11})} & -B_{11}^- B_{12} \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ -\widetilde{B}_{22}^- B_{21} \mathcal{P}_{N(B_{11})} & \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

$$\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} \widehat{B}_{22}^- B_{11}^- & -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} B_{12} \widetilde{B}_{22}^- \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} B_{21} B_{11}^- & \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$\widetilde{B}_0^- = \begin{bmatrix} B_{11}^- + B_{11}^- \widehat{B}_{22}^- B_{11}^- & -B_{11}^- B_{12} \widetilde{B}_{22}^- \\ -\widetilde{B}_{22}^- B_{21} B_{11}^- & \widetilde{B}_{22}^- \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Умову (10) запишемо у вигляді

$$\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix} = 0,$$

а загальний розв'язок (11) — у вигляді

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)} \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix} + \widetilde{B}_0^- \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Теорема 1. *Оператори (13), (14) є обмеженими проєкторами відповідно на нуль-простір $N(\widetilde{B}_0) \subset \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$ і підпростір $Y_{\widetilde{B}_0} = \mathbf{B}_3 \times \mathbf{B}_4 \ominus R(\widetilde{B}_0)$.*

Доведення. Оператор P називається проєктором, якщо $P^2 = P$. Знайдемо

$$\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)}^2 = \begin{bmatrix} \left(I_{\mathbf{B}_1} + B_{11}^- \widehat{B}_{22}^-\right) \mathcal{P}_{N(B_{11})} & -B_{11}^- B_{12} \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ -\widetilde{B}_{22}^- B_{21} \mathcal{P}_{N(B_{11})} & \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \end{bmatrix}^2 =$$

$$= \left[\begin{matrix} \left(I_{\mathbf{B}_1} + B_{11}^- \widehat{B}_{22}^-\right) \mathcal{P}_{N(B_{11})} \left(I_{\mathbf{B}_1} + B_{11}^- \widehat{B}_{22}^-\right) \mathcal{P}_{N(B_{11})} + B_{11}^- B_{12} \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \widetilde{B}_{22}^- B_{21} \mathcal{P}_{N(B_{11})} \\ -\widetilde{B}_{22}^- B_{21} \mathcal{P}_{N(B_{11})} \left(I_{\mathbf{B}_1} + B_{11}^- \widehat{B}_{22}^-\right) \mathcal{P}_{N(B_{11})} + \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \widetilde{B}_{22}^- B_{21} \mathcal{P}_{N(B_{11})} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \left(I_{\mathbf{B}_1} + B_{11}^- \widehat{B}_{22}^-\right) \mathcal{P}_{N(B_{11})} B_{11}^- B_{12} \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} - B_{11}^- B_{12} \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}^2 \\ -\widetilde{B}_{22}^- B_{21} \mathcal{P}_{N(B_{11})} B_{11}^- B_{12} \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} + \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}^2 \end{matrix}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(I_{\mathbf{B}_1} + B_{11}^- \widehat{B}_{22}^-\right) \mathcal{P}_{N(B_{11})} & -B_{11}^- B_{12} \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ -\widetilde{B}_{22}^- B_{21} \mathcal{P}_{N(B_{11})} & \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)},$$

оскільки

$$\mathcal{P}_{N(B_{11})} B_{11}^- B_{12} = 0,$$

$$\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \widetilde{B}_{22}^- B_{21} = 0, \qquad \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}^2 = \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}.$$

Отже, оператор $\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)}$ є обмеженим проєктором. Його обмеженість випливає з обмеженості всіх його компонент.

Далі покажемо, що оператор $\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)}$ є проєктором на нуль-простір $N(\widetilde{B}_0)$ оператора $\widetilde{B}_0 = B_0 - K$, тобто $\widetilde{B}_0\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)} = 0$.

Для цього знайдемо суперпозиції $B_0\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)}$ і $K\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)}$:

$$B_0\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Big(I_{\mathbf{B}_1} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}\Big)\mathcal{P}_{N(B_{11})} & -B_{11}^{-}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ -\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} B_{11}\Big(I_{\mathbf{B}_1} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}\Big)\mathcal{P}_{N(B_{11})} - & -B_{11}B_{11}^{-}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} + \\ -B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & +B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ B_{21}\Big(I_{\mathbf{B}_1} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}\Big)\mathcal{P}_{N(B_{11})} - & -B_{21}B_{11}^{-}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} + \\ -B_{22}\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & +B_{22}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & 0 \end{bmatrix} = K,$$

оскільки $B_{11}\mathcal{P}_{N(B_{11})} = 0,\ B_{11}B_{11}^{-} = I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}},\ \widetilde{B}_{22}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} = 0,\ \widetilde{B}_{22}\widetilde{B}_{22}^{-} = I_{\mathbf{B}_4} - \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}$.

Далі знайдемо суперпозицію

$$K\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)} = \begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(B_{11})} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & -B_{11}^{-}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ -\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})}\Big(\mathcal{P}_{N(B_{11})} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})}\Big) - -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})}B_{11}^{-}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}^{2} \\ \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})}\Big(\mathcal{P}_{N(B_{11})} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})}\Big) & -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})}B_{11}^{-}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & 0 \end{bmatrix} = K,$$

оскільки $\mathcal{P}_{N(B_{11})}B_{11}^{-} = 0,\ \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}\widetilde{B}_{22}^{-} = 0,\ \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}^{2} = \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}$.

Таким чином,

$$\widetilde{B}_0\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)} = B_0\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)} - K\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)} = K - K = 0,$$

тобто оператор $\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)}$ є обмеженим проєктором банахового простору $\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$ на нуль-простір $N(\widetilde{B}_0)$ оператора $\widetilde{B}_0$.

Покажемо, що оператор $\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}$ — проєктор, тобто $\mathcal{P}^2_{Y_{\widetilde{B}_0}} = \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}$:

$$\mathcal{P}^2_{Y_{\widetilde{B}_0}} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}^-_{22}B^-_{11} & -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}^-_{22} \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B^-_{11} & \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} \end{bmatrix}^2 =$$

$$= \left[\begin{matrix} \left(\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}^-_{22}B^-_{11}\right)^2 + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}^-_{22}\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B^-_{11} \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B^-_{11}\left(\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}^-_{22}B^-_{11}\right) + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}^-_{22}\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B^-_{11} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} -\left(\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}^-_{22}B^-_{11}\right)\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}^-_{22} - \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}^-_{22}\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} \\ \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B^-_{11}\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}^-_{22} + \mathcal{P}^2_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} \end{matrix}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}^-_{22}B^-_{11} & -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}^-_{22} \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B^-_{11} & \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}},$$

оскільки $B^-_{11}\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} = 0,\ \widetilde{B}^-_{22}\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} = 0.$

Таким чином, оператор $\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}$ є обмеженим проєктором. Його обмеженість є наслідком обмеженості компонент, із яких він складається.

Далі покажемо, що оператор $\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}$ є проєктором на підпростір $Y_{\widetilde{B}_0} = \mathbf{B}_3 \times \mathbf{B}_4 \ominus R(\widetilde{B}_0)$, тобто

$$\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}\widetilde{B}_0 = 0.$$

Для цього обчислимо суперпозиції операторів $\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}B_0$ і $\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}K$:

$$\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}B_0 = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}^-_{22}B^-_{11} & -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}^-_{22} \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B^-_{11} & \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{matrix} \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{11} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}^-_{22}B^-_{11}B_{11} - \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}^-_{22} \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B^-_{11}B_{11} + \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}^-_{22}B_{21}B^-_{11}B_{12} - \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}^-_{22}B_{22} \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B^-_{11}B_{12} + \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{22} \end{matrix}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}^-_{22}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & 0 \end{bmatrix} = K,$$

оскільки $\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{11} = 0,\ B^-_{11}B_{11} = I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(B_{11})},\ \widetilde{B}_{22} = B_{22} - B_{21}B^-_{11}B_{11},\ \widetilde{B}^-_{22}\widetilde{B}_{22} =$ $= I_{\mathbf{B}_4} - \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}$;

$$\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}K = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}^-_{22}B^-_{11} & -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}^-_{22} \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B^-_{11} & \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{matrix} -\mathcal{P}^2_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})} - \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-}\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})} \\ -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} \end{matrix} & \begin{matrix} \mathcal{P}^2_{Y_{B_{11}}}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-}\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B_{11}^{-}\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} \end{matrix} \\ \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B_{11}^{-}\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})} + \mathcal{P}^2_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & 0 \end{bmatrix} = K,$$

оскільки $B_{11}^{-}\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} = 0,\ \mathcal{P}^2_{Y_{B_{11}}} = \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}},\ \mathcal{P}^2_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} = \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}.$

Таким чином,

$$\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}\widetilde{B}_0 = \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}(B_0 - K) = \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}B_0 - \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}K = K - K = 0,$$

тобто оператор $\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}$ є обмеженим проєктором банахового простору $\mathbf{B}_3 \times \mathbf{B}_4$ на підпростір $Y_{\widetilde{B}_0} = \mathbf{B}_3 \times \mathbf{B}_4 \ominus R(\widetilde{B}_0)$.

Теорема 2. *Нехай оператор* B_{11} *належить* $\mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_3)$ *і* $\widetilde{B}_{22} = B_{21}B_{11}^{-}B_{12}$ *належить* $\mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_4)$.

Тоді операторна матриця

$$\widetilde{B}_0^{-} = \begin{bmatrix} B_{11}^{-} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-} & -B_{11}^{-}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} \\ -\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}B_{11}^{-} & \widetilde{B}_{22}^{-} \end{bmatrix} \tag{16}$$

є обмеженою узагальнено оберненою до операторної матриці $\widetilde{B}_0$.

Доведення. Відомо [1, 7], що оператор $\widetilde{B}_0^{-}$ є узагальнено оберненим до оператора $\widetilde{B}_0$, якщо він задовольняє умови

$$\widetilde{B}_0\widetilde{B}_0^{-}\widetilde{B}_0 = \widetilde{B}_0, \tag{17}$$

$$\widetilde{B}_0^{-}\widetilde{B}_0\widetilde{B}_0^{-} = \widetilde{B}_0^{-}. \tag{18}$$

Для перевірки умов (17), (18) спочатку знайдемо суперпозиції операторів $\widetilde{B}_0\widetilde{B}_0^{-}$ і $\widetilde{B}_0^{-}\widetilde{B}_0$.

Для цього знайдемо суперпозиції операторів $B_0\widetilde{B}_0^{-}$ і $K\widetilde{B}_0^{-}$:

$$B_0\widetilde{B}_0^{-} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11}^{-} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-} & -B_{11}^{-}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} \\ -\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}B_{11}^{-} & \widetilde{B}_{22}^{-} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} B_{11}B_{11}^{-} + B_{11}B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-} + \widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-} & B_{11}B_{11}^{-}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} + B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} \\ B_{21}B_{11}^{-} + B_{21}B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-} + B_{22}\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}B_{11}^{-} & -B_{21}B_{11}^{-}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} + B_{22}\widetilde{B}_{22}^{-} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{\mathbf{B}_3} - \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\Big(I_{\mathbf{B}_2} + \widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-}\Big) & \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} \\ \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B_{11}^{-} & I_{\mathbf{B}_4} - \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{\mathbf{B}_3} & 0 \\ 0 & I_{\mathbf{B}_4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\Big(I_{\mathbf{B}_2} + \widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-}\Big) & -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B_{11}^{-} & \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} \end{bmatrix} = I_{\mathbf{B}_3\times\mathbf{B}_4} - \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}. \quad (19)$$

Далі знайдемо суперпозицію операторів K та $\widetilde{B}_0^{-}$:

$$K\widetilde{B}_0^{-} = \begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} B_{11}^{-} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-} & -B_{11}^{-}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} \\ -\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}B_{11}^{-} & \widetilde{B}_{22}^{-} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{matrix} -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})}\Big(B_{11}^{-} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-}\Big) - \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}B_{11}^{-} \\ \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})}\Big(B_{11}^{-} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-}\Big) \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})}B_{11}^{-}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} + \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}\widetilde{B}_{22}^{-} \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})}B_{11}^{-}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} \end{matrix} \right] = 0_{2\times 2},$$

оскільки $\mathcal{P}_{N(B_{11})}B_{11}^{-} = 0,\ \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}\widetilde{B}_{22}^{-} = 0.$

Таким чином,

$$\widetilde{B}_0\widetilde{B}_0^{-} = (B_0 - K)\widetilde{B}_0^{-} = B_0\widetilde{B}_0^{-} - K\widetilde{B}_0^{-} = I_{\mathbf{B}_3\times\mathbf{B}_4} - \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}},$$

оскільки $K\widetilde{B}_0^{-} = 0.$

Тепер знайдемо суперпозицію $\widetilde{B}_0^{-}\widetilde{B}_0$. Для цього обчислимо суперпозиції $\widetilde{B}_0^{-}B_0$ і $\widetilde{B}_0^{-}K$:

$$\widetilde{B}_0^{-}B_0 = \begin{bmatrix} B_{11}^{-} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-} & -B_{11}^{-}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} \\ -\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}B_{11}^{-} & \widetilde{B}_{22}^{-} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{matrix} B_{11}^{-}B_{11} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-}B_{11} - B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-} \\ -\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}B_{11}^{-}B_{11} + \widetilde{B}_{22}^{-}B_{11} \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} B_{11}^{-}B_{12} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-}B_{12} - B_{11}^{-}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-}B_{22} \\ -\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}B_{11}^{-}B_{12} + \widetilde{B}_{22}^{-}B_{22} \end{matrix} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{\mathbf{B}_1} - \Big(\mathcal{P}_{N(B_{11})} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})}\Big) & B_{11}^{-}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ \widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & I_{\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{\mathbf{B}_1} & 0 \\ 0 & I_{\mathbf{B}_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(B_{11})} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & -B_{11}^{-}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ -\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \end{bmatrix} =$$

$$= I_{\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)},$$

оскільки $B_{11}^{-}B_{11} = I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(B_{11})}$, $\widetilde{B}_{22}^{-}\widetilde{B}_{22} = I_{\mathbf{B}_1} - \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}$.

Далі знайдемо суперпозицію операторів $\widetilde{B}_0^{-}$ та K:

$$\widetilde{B}_0^{-}K = \begin{bmatrix} B_{11}^{-} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-} & -B_{11}^{-}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} \\ -\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}B_{11}^{-} & \widetilde{B}_{22}^{-} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & \mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\left(B_{11}^{-} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-}\right)\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})} - B_{11}^{-}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & \left(B_{11}^{-} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-}\right)\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ \widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}B_{11}^{-}\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}\widehat{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{N(B_{11})} + \widetilde{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & -\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}B_{11}^{-}\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \end{bmatrix} = 0_{2\times 2},$$

позаяк $B_{11}^{-}\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} = 0$, $\widetilde{B}_{22}^{-}\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} = 0$.

Таким чином,

$$\widetilde{B}_0^{-}\widetilde{B}_0 = \widetilde{B}_0^{-}(B_0 - K) = \widetilde{B}_0^{-}B_0 - \widetilde{B}_0^{-}K = I_{\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_2} - \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)},$$

тому що $\widetilde{B}_0^{-}K = 0$.

Перевіримо першу умову (17):

$$\widetilde{B}_0\widetilde{B}_0^{-}\widetilde{B}_0 = \left[I_{\mathbf{B}_3\times\mathbf{B}_4} - \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}\right]\widetilde{B}_0 = \widetilde{B}_0 - \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}\widetilde{B}_0 = \widetilde{B}_0,$$

того що за теоремою 1 $\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}\widetilde{B}_0 = 0$.

Для перевірки другої умови (18) обчислимо суперпозицію операторів

$$\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)}\widetilde{B}_0^{-} = \begin{bmatrix} \left(I_{\mathbf{B}_1} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}\right)\mathcal{P}_{N(B_{11})} & -B_{11}^{-}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ -\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})} & \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} B_{11}^{-} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-} & -B_{11}^{-}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-} \\ -\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}B_{11}^{-} & \widetilde{B}_{22}^{-} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(I_{\mathbf{B}_1} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}\right)\mathcal{P}_{N(B_{11})}\left(B_{11}^{-} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-}\right) + \\ +B_{11}^{-}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}B_{11}^{-} \\ -\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})}\left(B_{11}^{-} + B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}B_{11}^{-}\right) + \\ +B_{11}^{-}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}\widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}B_{11}^{-} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} -\Big(I_{\mathbf{B}_1}+B_{11}^{-}\widehat{B}_{22}^{-}\Big)\mathcal{P}_{N(B_{11})}B_{11}^{-}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-}-B_{11}^{-}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}\widetilde{B}_{22}^{-} \\ \widetilde{B}_{22}^{-}B_{21}\mathcal{P}_{N(B_{11})}B_{11}^{-}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-}+\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}\widetilde{B}_{22}^{-} \end{array}\Bigg] = 0_{2\times 2},$$

оскільки $\mathcal{P}_{N(B_{11})}B_{11}^{-}=0,\ \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})}\widetilde{B}_{22}^{-}=0.$

Далі обчислимо

$$\widetilde{B}_0^{-}\widetilde{B}_0\widetilde{B}_0^{-}=\Big[I_{\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_2}-\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)}\Big]\widetilde{B}_0^{-}=\widetilde{B}_0^{-}-\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)}\widetilde{B}_0^{-}=\widetilde{B}_0^{-},$$

тому що $\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)}\widetilde{B}_0^{-}=0.$

Таким чином, операторна матриця $\widetilde{B}_0^{-}$ є обмеженою узагальнено оберненою до операторної матриці $\widetilde{B}_0$.

Теорему 2 доведено.

Далі розглянемо, чи буде операторна матриця $\widetilde{B}_0^{-}$ обмеженою узагальнено оберненою до операторної матриці B_0? А якщо буде, то на якому підпросторі?

Теорема 3. *Операторна матриця* $\widetilde{B}_0^{-}: R(\widetilde{B}_0)\to \mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_2\ominus\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)}$ *є узагальнено оберненою до операторної матриці* B_0.

Доведення. Обмежений проєктор $\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)}$ розбиває банаховий простір $\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_2$ на доповнювальні підпростори $N(\widetilde{B}_0)$ та $X_{\widetilde{B}_0}$:

$$\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_2=N(\widetilde{B}_0)\oplus X_{\widetilde{B}_0}.$$

І через те що $B_0\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)}=K$, маємо $X_{\widetilde{B}_0}\subseteq X_{B_0}$, де $X_{B_0}=\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_2\ominus N(B_0)$.

Крім того, для всіх $x\in X_{\widetilde{B}_0}$, тобто $x=(I_{\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_2}-\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)})\bar{x}$, де $\bar{x}$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_2$, одержуємо, з одного боку,

$$B_0x=B_0(I_{\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_2}-\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)})\bar{x}=B_0\bar{x}-B_0\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)}\bar{x}=(B_0-K)\bar{x}=\widetilde{B}_0\bar{x},$$

а з іншого —

$$\widetilde{B}_0x=\widetilde{B}_0\Big(I_{\mathbf{B}_1\times\mathbf{B}_2}-\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)}\Big)\bar{x}=\widetilde{B}_0\bar{x}-\widetilde{B}_0\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)}\bar{x}=\widetilde{B}_0\bar{x},$$

тому що $\widetilde{B}_0\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)}=0.$

Таким чином, оператор $\widetilde{B}_0$ є звуженням оператора B_0 на підпростір $X_{\widetilde{B}_0}$, тобто $B_0x= =\widetilde{B}_0x$ для всіх $x\in X_{\widetilde{B}_0}$.

Обмежений проєктор $\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}$ розбиває банаховий простір $\mathbf{B}_3\times\mathbf{B}_4$ на доповнювальні підпростори $Y_{\widetilde{B}_0}$ та $R(\widetilde{B}_0)$:

$$\mathbf{B}_3\times\mathbf{B}_4=Y_{\widetilde{B}_0}\oplus R(\widetilde{B}_0).$$

До того ж, внаслідок рівності $\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}K=K$ обмежений проєктор $\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}$ розбиває підпростір $Y_{\widetilde{B}_0}$ на доповнювальні підпростори Y_{B_0} та $R(K)$:

$$Y_{\widetilde{B}_0}=Y_{B_0}\oplus R(K).$$

Таким чином, $R(\widetilde{B}_0)\subseteq R(B_0)$ і

$$\mathbf{B}_3\times\mathbf{B}_4=Y_{B_0}\oplus R(K)\oplus R(\widetilde{B}_0).$$

Далі перевіримо властивості, які визначають узагальнено обернену операторну матрицю, аналогічні (17), (18):

$$B_0\widetilde{B}_0^- B_0 = B_0, \tag{20}$$

$$\widetilde{B}_0^- B_0\widetilde{B}_0^- = \widetilde{B}_0^-. \tag{21}$$

Використаємо доведені співвідношення (17), (18):

$$\widetilde{B}_0\widetilde{B}_0^-\widetilde{B}_0 = (B_0 - K)\widetilde{B}_0^-(B_0 - K) = \Big(B_0\widetilde{B}_0^- - K\widetilde{B}_0^-\Big)(B_0 - K) =$$

$$= B_0\widetilde{B}_0^-(B_0 - K) = B_0\widetilde{B}_0^- B_0 - K\widetilde{B}_0^- K = B_0\widetilde{B}_0^- B_0 = \widetilde{B}_0 = B_0,$$

оскільки $B_0 = \widetilde{B}_0$ на підпросторі $X_{\widetilde{B}_0}$;

$$\widetilde{B}_0^-\widetilde{B}_0\widetilde{B}_0^- = \widetilde{B}_0^-(B_0 - K)\widetilde{B}_0^- = \widetilde{B}_0^- B_0\widetilde{B}_0^- - \widetilde{B}_0^- K\widetilde{B}_0^- = \widetilde{B}_0^- B_0\widetilde{B}_0^- = \widetilde{B}_0^-,$$

позаяк $K\widetilde{B}_0^- = 0$.

Таким чином, властивості (20), (21) виконуються, тобто операторна матриця $\widetilde{B}_0^- : R(\widetilde{B}_0) \to X_{\widetilde{B}_0}$ є обмеженою узагальнено оберненою до операторної матриці B_0.

Зауваження 1. Якщо оператор B_{11} має обернений B_{11}^{-1}, то формули (12) – (15) значно спрощуються. Дійсно, у цьому випадку $\mathcal{P}_{N(B_{11})} \equiv 0$, $\mathcal{P}_{Y_{B_{11}}} \equiv 0$ і $K = 0$;

$$\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)} = \begin{bmatrix} 0 & -B_{11}^{-1}B_{12}\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_{22})} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}}B_{21}B_{11}^{-1} & \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_{22}}} \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{B}_0^- = \begin{bmatrix} B_{11}^{-1} + B_{11}^{-1}\widetilde{B}_{22}^- B_{11}^{-1} & -B_{11}^{-1}B_{12}\widetilde{B}_{22}^- \\ -\widetilde{B}_{22}^- B_{21}B_{11}^{-1} & \widetilde{B}_{22}^- \end{bmatrix}.$$

Зауваження 2. Якщо задача розглядається у гільбертових просторах, то формули (12) – (15) набувають вигляду

$$K = \begin{bmatrix} -P_{N(B_{11}^*)}\widehat{B}_{22}^+ P_{N(B_{11})} & P_{N(B_{11}^*)}B_{12}P_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ P_{N(B_{22}^*)}B_{21}P_{N(B_{11})} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)} = \begin{bmatrix} P_{N(B_{11})} + B_{11}^+\widehat{B}_{22}^+ P_{N(B_{11})} & -B_{11}^+B_{12}P_{N(\widetilde{B}_{22})} \\ -\widetilde{B}_{22}^+ B_{21}P_{N(B_{11})} & P_{N(\widetilde{B}_{22})} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}} = \begin{bmatrix} P_{N(B_{11}^*)} + P_{N(B_{11}^*)}\widehat{B}_{22}^+ B_{11}^+ & -P_{N(B_{11}^*)}B_{12}\widetilde{B}_{22}^+ \\ -P_{N(B_{22}^*)}B_{21}B_{11}^+ & P_{N(B_{22}^*)} \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{B}_0^- = \begin{bmatrix} B_{11}^+ + B_{11}^+\widehat{B}_{22}^+ B_{11}^+ & -B_{11}^+B_{12}\widetilde{B}_{22}^+ \\ -\widetilde{B}_{22}^+ B_{21}B_{11}^+ & \widetilde{B}_{22}^+ \end{bmatrix},$$

тому що у гільбертових просторах існують псевдообернені оператори B_{11}^{+}, B_{22}^{+} і ортопроєктори $P_{N(B_{11})}$, $P_{N(B_{11}^{*})}$, $P_{N(B_{22})}$, $P_{N(B_{22}^{*})}$.

З обмеженості проєкторів $\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)}$ і $\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}}$ маємо, що підпростори $N(\widetilde{B}_0)$ та $Y_{\widetilde{B}_0} \subset \subset \mathbf{B}_3 \times \mathbf{B}_4 \ominus R(\widetilde{B}_0)$ доповнювальні відповідно у банахових просторах $\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$ і $\mathbf{B}_3 \times \mathbf{B}_4$ [8]. А це свідчить про те, що оператор $\widetilde{B}_0$ нормально розв'язний.

Теорема 4. *Нехай оператор B_{11} належить $\mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_3)$ і $\widetilde{B}_{22} = B_{21}B_{11}^{-}B_{12}$ належить $\mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_4)$.*

Тоді при виконанні умови

$$\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{22}$$

операторне рівняння (1) має принаймні один розв'язок

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \widetilde{B}_0^{-} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Доведення. Дійсно, підставивши розв'язок (23) у рівняння (1) з урахуванням (19), отримаємо

$$B_0\widetilde{B}_0^{-} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \left(I_{\mathbf{B}_3 \times \mathbf{B}_4} - \mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}} \right) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

оскільки виконується умова (22).

Узагальнення теореми Фробеніуса. Нехай B_0 — $n \times n$-вимірна невироджена матриця, яка розбита на блоки

$$B_0 = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

де B_{11} — $(k \times k)$-вимірна матриця, B_{22} — $(n-k) \times (n-k)$-вимірна матриця, а B_{12} і B_{21} — прямокутні матриці відповідних розмірів.

Нехай $\det B_{11} \neq 0$, тоді $\widetilde{B}_{22} = B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12}$ — доповнення по Шуру [10], де показано, що $\det \widetilde{B}_{22} \neq 0$, оскільки в протилежному випадку блочна матриця B_0 буде виродженою.

Тоді $P_{N(B_{11})} \neq 0$, $P_{N(B_{11}^{*})} \neq 0$, $P_{N(\widetilde{B}_{22})} \neq 0$, $P_{N(\widetilde{B}_{22}^{*})} \neq 0$ і, як наслідок, $K = 0$, $\mathcal{P}_{N(\widetilde{B}_0)} = 0$, $\mathcal{P}_{Y_{\widetilde{B}_0}} = 0$, а формула (16) перетворюється у формулу Фробеніуса для побудови оберненої матриці до блочної:

$$\widetilde{B}_0^{-} = B_0^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11}^{-1} + B_{11}^{-1}\widehat{B}_{22}^{-1}B_{11}^{-1} & -B_{11}^{-1}B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-1} \\ -\widetilde{B}_{22}^{-1}B_{21}B_{11}^{-1} & \widetilde{B}_{22}^{-1} \end{bmatrix},$$

де $\widehat{B}_{22}^{-1} = B_{12}\widetilde{B}_{22}^{-1}B_{21}$.

Література

1. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Нормально разрешимые краевые задачи*, Наук. думка, Киев (2019).

2. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. А. Покутный, *Нормально разрешимые операторные уравнения в банаховом пространстве*, Укр. мат. журн., **65**, № 2, 163 – 174 (2013); ***English translation:*** Ukr. Math. J., **65**, № 2, 179 – 192 (2013).
3. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems, Second ed.*, De Gruyter, Berlin (2016).
4. A. M. Samoilenko, A. A. Boichuk, V. F. Zhuravlev, *Linear boundary-value problems for normally solvable operator equations in a Banach space*, Differ. Equ., **50**, № 3, 1 – 11 (2014).
5. В. Ф. Журавлев, Н. П. Фомин, *Слабовозмущенные краевые задачи для интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром в банаховых пространствах*, Нелін. коливання, **20**, № 4, 488 – 501 (2017).
6. В. Ф. Журавлев, Н. П. Фомин, П. Н. Забродский, *Условия разрешимости и представление решений уравнений с операторными матрицами в банаховых пространствах*, Укр. мат. журн., **71**, № 4, 471 – 485 (2019); ***English translation:*** Ukr. Math. J., **71**, № 4, 537 – 553 (2019).
7. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов*, Штиинца, Кишинев (1973).
8. М. М. Попов, *Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха*, Математика сьогодні'07, Вип. 13, 78 – 116 (2007).
9. В. Ф. Журавлев, *Критерий разрешимости и представление решений линейных n (d)-нормальных операторных уравнений в банаховом пространстве*, Укр. мат. журн., **62**, № 2, 167 – 182 (2010); ***English translation:*** Ukr. Math. J., **62**, № 2, 186 – 202 (2010).
10. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, Москва (1988).

Одержано 26.09.22