УДК 517.9

НЕПЕРЕРВНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІЗНИЦЕВО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ БАГАТЬМА ВІДХИЛЕННЯМИ АРГУМЕНТУ

Н. Л. Денисенко, Т. О. Єрьоміна, О. А. Поварова

Нац. техн. ун-т України "Київ. політех. ін-т ім. І. Сікорського"
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: natalia_den@bigmir.net
ierominat@ukr.net
olena_sivak@ukr.net

We obtain conditions for the existence of continuous solutions of a class of systems of linear difference-functional equations with many deviations of the argument and investigate their properties.

Одержано умови існування неперервних розв'язків одного класу систем лінійних різницево-функціональних рівнянь із багатьма відхиленнями аргументу та досліджено їхні властивості.

У цій роботі досліджується лінійне різницево-функціональне рівняння вигляду

$$x(qt) = ax(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j x(t+\delta_j), \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, a, q, b_j, δ_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, — дійсні сталі ($\delta_j \geq 1$). При різних припущеннях окремі класи таких рівнянь були основним об'єктом дослідження багатьох математиків (див. [1 – 4] і цитовану в них літературу), і на сьогодні низку питань з їхньої теорії досить детально вивчено. Зокрема, це стосується існування неперервних розв'язків і вивчення структури їхньої множини (див. [5, 6]). Продовжуючи ці дослідження, в цій роботі пропонується підхід до вивчення неперервних розв'язків таких рівнянь при певних припущеннях відносно a та q.

Розглянемо випадок, коли виконуються такі умови:

1) $0 < q < 1, \ a > 1$;

2) $\Delta = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} |b_j|}{a-1} < 1, \ \nu = \dfrac{\ln a}{\ln q} < 0.$

Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1), 2). Тоді рівняння (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ (T — деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків $x(t) = x\left(t, \omega\left(\dfrac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, що залежать від довільної неперервної 1-періодичної функції $\omega(\tau)$.*

Доведення. Покажемо, що рівняння (1) має неперервні розв'язки у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{2}$$

де $x_i(t),\ i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (2) в (1), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(qt) = a \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t + \delta_j).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $x_i(t),\ i = 0, 1, \ldots,$ задовольняють рівняння

$$x_0(qt) = a x_0(t), \tag{3_0}$$

$$x_i(qt) = a x_i(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j x_{i-1}(t + \delta_j), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{3_i}$$

то ряд (2) буде формальним розв'язком рівняння (1).

Рівняння (3_0) має сім'ю неперервних розв'язків вигляду

$$x_0(t) = t^{\frac{\ln a}{\ln q}} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \tag{4_0}$$

де $\omega(\tau + 1) = \omega(\tau)$.

Розглядаючи послідовно рівняння (3_i), $i = 1, 2, \ldots,$ переконуємося, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів

$$x_i(t) = -\sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \sum_{j=1}^{k} b_j x_{i-1}\big(q^l t + \delta_j\big), \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{4_i}$$

Покажемо, що при виконанні умов 1), 2) ряди (4_i), $i = 1, 2, \ldots,$ рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $x_i(t),\ i = 1, 2, \ldots,$ для яких виконуються оцінки

$$|x_i(t)| \le M\Delta^i, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{5_i}$$

Дійсно, оскільки $|x_0(t)| \le M t^v$, де $M = \max_\tau |\omega(\tau)|$, то завдяки ($4_1$) і $\nu < 0$ отримуємо

$$|x_1(t)| \le \sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \left[\sum_{j=1}^{k} |b_j| \left|x_0\big(q^l t + \delta_j\big)\right|\right] \le \sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \left[\sum_{j=1}^{k} |b_j| M \big(q^l t + \delta_j\big)^{\nu}\right] \le$$

$$\le M \sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \left[\sum_{j=1}^{k} \frac{|b_j|}{\big(q^l t + \delta_j\big)^{|\nu|}}\right] \le \frac{M}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^l \left[\sum_{j=1}^{k} |b_j|\right].$$

Звідси випливає

$$|x_1(t)| \le \frac{M}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{a}\right)^l \sum_{j=1}^{k} |b_j|\right] \le \frac{M}{a} \frac{\sum_{j=1}^{k} |b_j|}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{M \sum_{j=1}^{k} |b_j|}{a - 1} = M\Delta,$$

де $\Delta = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} |b_j|}{a - 1} < 1$.

Отже, оцінка (5_i) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припускаємо, що оцінку (5_i) вже доведено для деякого $i \geq 1$. Покажемо її справедливість для $i + 1$. Дійсно, оскільки

$$x_{i+1}(t) = -\sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \sum_{j=1}^{k} b_j x_i\big(q^l t + \delta_j\big),$$

то

$$|x_{i+1}(t)| \leq \sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \left[\sum_{j=1}^{k} |b_j| \left|x_i\big(q^l t + \delta_j\big)\right|\right] \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \left[\sum_{j=1}^{k} |b_j|\, M\Delta^i\right] \leq \frac{M}{a}\,\Delta^i\, \frac{\sum_{j=1}^{k}|b_j|}{1-\dfrac{1}{a}} = M\Delta^{i+1}.$$

Отже, ряди (4_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деяких неперервних функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки (5_i), $i = 1, 2, \ldots$. Із (5_i), $i = 1, 2, \ldots$, безпосередньо випливає, що ряд (2) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної функції $x(t)$, яка задовольняє умову

$$|x(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |x_i(t)| \leq M \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i \leq \frac{M}{1-\Delta} \quad \forall t \geq T > 0.$$

Теорему 1 доведено.

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння вигляду

$$y(qt) = ay(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j y(t+\delta_j) + f(t), \tag{6}$$

де a, b_j, δ_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, q — деякі сталі; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Припустимо, що виконуються умови

1) $0 < q < 1$, $a > 1$;

2) $\Delta = \dfrac{\sum_{j=1}^{k}|b_j|}{a-1} < 1$;

3) функція $f(t)$ є неперервною й обмеженою при всіх $t \in \mathbb{R}$ і такою, що $\sup_t |f(t)| = \tilde{M} < \infty$.

Справедлива така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1) – 3). Тоді рівняння (6) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\bar{y}(t)$.*

Доведення. Покажемо, що (6) має неперервний розв'язок у вигляді ряду

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \tag{7}$$

де $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (7) у (6), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(qt) = a\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t+\delta_j) + f(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $\bar{y}_i(t),\ i = 0, 1, \ldots,$ задовольняють рівняння

$$\bar{y}_0(qt) = a\bar{y}_0(t) + f(t), \tag{8_0}$$

$$\bar{y}_i(qt) = a\bar{y}_i(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j \bar{y}_{i-1}(t + \delta_j), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{8_i}$$

то ряд (7) буде формальним розв'язком рівняння (6).

Рівняння (8_0) має формальний розв'язок вигляду

$$\bar{y}_0(t) = -\sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} f\big(q^l t\big). \tag{9_0}$$

Розглядаючи послідовно рівняння (8_i), $i = 1, 2, \ldots,$ переконуємося, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів

$$\bar{y}_i(t) = -\sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \sum_{j=1}^{k} b_j \bar{y}_{i-1}\big(q^l t + \delta_j\big), \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{9_i}$$

Покажемо, що ряди (9_i), $i = 0, 1, \ldots,$ рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $\bar{y}_i(t),\ i = 0, 1, \ldots,$ для яких виконуються оцінки

$$|\bar{y}_i(t)| \le \tilde{M}'\Delta^i, \quad i = 0, 1, \ldots . \tag{10}$$

Дійсно, оскільки

$$|\bar{y}_0(t)| \le \sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \big|f(q^l t)\big| \le \frac{\tilde{M}}{a} \sum_{l=0}^{\infty} a^{-l} \le \frac{\tilde{M}}{a} \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{\tilde{M}}{a - 1} = \tilde{M}',$$

то

$$|\bar{y}_1(t)| \le \sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \left[\sum_{j=1}^{k} |b_j| \left|\bar{y}_0\big(q^l t + \delta_j\big)\right|\right] \le \sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \left[\sum_{j=1}^{k} |b_j| \tilde{M}'\right] \le$$

$$\le \frac{\tilde{M}'}{a} \frac{\sum_{j=1}^{k} |b_j|}{1 - \dfrac{1}{a}} = \frac{\tilde{M}' \sum_{j=1}^{k} |b_j|}{a - 1} = \tilde{M}'\Delta.$$

Отже, оцінка (10) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припускаємо, що оцінку (10) вже доведено для деякого $i \ge 1$. Покажемо її справедливість для $i + 1$. Дійсно, оскільки

$$\bar{y}_{i+1}(t) = -\sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \sum_{j=1}^{k} b_j \bar{y}_i\big(q^l t + \delta_j\big),$$

то

$$|\bar{y}_{i+1}(t)| \le \sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \left(\sum_{j=1}^{k} |b_j| \left|\bar{y}_i\big(q^l t + \delta_j\big)\right|\right) \le \sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \sum_{j=1}^{k} |b_j| \tilde{M}'\Delta^i \le$$

$$\leq \frac{\tilde{M}' \sum_{j=1}^{k} |b_j|}{a} \frac{\Delta^i}{1 - \dfrac{1}{a}} = \tilde{M}' \frac{\sum_{j=1}^{k} |b_j|}{a-1} \Delta^i = \tilde{M}' \Delta^{i+1}.$$

Отже, ряди (9_i), $i = 1, 2, \ldots,$ рівномірно збігаються при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деяких неперервних функцій $\bar{y}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots,$ для яких виконуються оцінки (10). Звідси випливає, що ряд (7) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної функції $\bar{y}(t)$, яка задовольняє умову

$$|\bar{y}(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\bar{y}_i(t)| \leq \tilde{M}' \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i \leq \frac{\tilde{M}'}{1 - \Delta}.$$

Теорему 2 доведено.

Зауваження 1. Виконуючи в (6) заміну змінних

$$y(t) = x(t) + \bar{y}(t), \tag{11}$$

отримуємо рівняння (1) відносно функції $x(t)$. Оскільки для цього рівняння справедлива теорема 1, то, беручи до уваги заміну змінних (11), можна побудувати сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків рівняння (6).

У зв'язку з доведеними вище теоремами виникає питання про опис структури множини неперервних розв'язків рівняння (6) у випадку, коли $b_j = \tilde{b_j}(t)$, $j = 1, 2, \ldots, k,$ — деякі дійсні функції дійсної змінної t.

Розглянемо, наприклад, рівняння вигляду

$$y(qt) = ay(t) + \sum_{j=1}^{k} \tilde{b_j}(t) y(t + \delta_j) + \tilde{f}(t), \tag{12}$$

де a, q — деякі дійсні сталі, $\tilde{b_j}(t) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, $\tilde{f}(t) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тоді аналогічно тому, як доводили теорему 2, можна довести, що рівняння (12) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови:*

1) $0 < q < 1$, $a > 1$;

2) $\tilde{\Delta} = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} b_j^*}{a - 1} < 1$*;*

3) функції $\tilde{b_j}(t)$, $\tilde{f}(t)$ *є неперервними й обмеженими при всіх* $t \in \mathbb{R}$ *і такими, що* $\sup_t \left|\tilde{b_j}(t)\right| = b_j^* < \infty$, $j = 1, 2, \ldots, k$, $\sup_t \left|\tilde{f}(t)\right| = f^* < \infty$.

Тоді рівняння (12) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок* $\bar{\bar{y}}(t)$.

Доведення. Покажемо, що (12) має неперервний розв'язок у вигляді ряду

$$\bar{\bar{y}}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\bar{y}}_i(t), \tag{13}$$

де $\bar{\bar{y}}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$ — деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (13) в (12), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \bar{\bar{y}}_i(qt) = a \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\bar{y}}_i(t) + \sum_{j=1}^{k} \tilde{b_j}(t) \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\bar{y}}_i(t + \delta_j) + \tilde{f}(t).$$

Звідси випливає, що якщо функції $\bar{\bar{y}}_i(t),\ i=0,1,\ldots,$ задовольняють рівняння

$$\bar{\bar{y}}_0(qt)=a\bar{\bar{y}}_0(t)+\tilde{f}(t), \tag{14_0}$$

$$\bar{\bar{y}}_i(qt)=a\bar{\bar{y}}_i(t)+\sum_{j=1}^{k}\tilde{b_j}(t)\bar{\bar{y}}_{i-1}(t+\delta_j),\quad i=1,2,\ldots, \tag{14_i}$$

то ряд (13) буде формальним розв'язком рівняння (12).

Рівняння (14_0) має формальний розв'язок у вигляді ряду

$$\bar{\bar{y}}_0(t)=-\sum_{l=0}^{\infty}a^{-(l+1)}\tilde{f}\big(q^lt\big). \tag{15_0}$$

Тоді, розглядаючи послідовно рівняння (14_i), $i=1,2,\ldots,$ можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів

$$\bar{\bar{y}}_i(t)=-\sum_{l=0}^{\infty}a^{-(l+1)}\sum_{j=1}^{k}\tilde{b_j}\big(q^lt\big)\bar{\bar{y}}_{i-1}\big(q^lt+\delta_j\big),\quad i=1,2,\ldots. \tag{15_i}$$

Покажемо, що ряди (16_i), $i=0,1,\ldots,$ рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $\bar{\bar{y}}_i(t),\ i=0,1,\ldots,$ для яких виконуються оцінки

$$|\bar{\bar{y}}_i(t)|\le\tilde{M''}\tilde{\Delta}^i,\quad i=0,1,\ldots. \tag{16}$$

Дійсно, оскільки

$$|\bar{\bar{y}}_0(t)|\le\sum_{l=1}^{\infty}a^{-(l+1)}\left|\tilde{f}\big(q^lt\big)\right|\le\frac{f^*}{a}\sum_{l=1}^{\infty}a^{-l}\le\frac{f^*}{a}\frac{1}{1-\dfrac{1}{a}}=\frac{f^*}{a-1}=\tilde{M''},$$

то

$$|\bar{\bar{y}}_1(t)|\le\sum_{l=0}^{\infty}a^{-(l+1)}\left[\sum_{j=1}^{k}\left|\tilde{b_j}\big(q^lt\big)\right|\left|\bar{\bar{y}}_0\big(q^lt+\delta_j\big)\right|\right]\le$$

$$\le\sum_{l=0}^{\infty}a^{-(l+1)}\left[\sum_{j=1}^{k}\left|\tilde{b_j}\big(q^lt\big)\right|\tilde{M''}\right]\le\frac{\tilde{M''}}{a}\frac{\sum_{j=1}^{k}|b_j^*|}{1-\dfrac{1}{a}}=\tilde{M''}\frac{\sum_{j=1}^{k}|b_j^*|}{a-1}=\tilde{M''}\tilde{\Delta}.$$

Отже, оцінка (16) має місце при $i=0,1$. Розмірковуючи за індукцією, припускаємо, що оцінку (16) вже доведено для деякого $i\ge1$. Покажемо її справедливість для $i+1$. Дійсно, оскільки

$$\bar{\bar{y}}_{i+1}(t)=-\sum_{l=0}^{\infty}a^{-(l+1)}\sum_{j=1}^{k}\tilde{b}_j\big(q^lt\big)\bar{\bar{y}}_i\big(q^lt+\delta_j\big),$$

то

$$|\bar{\bar{y}}_{i+1}(t)|\le\sum_{l=0}^{\infty}a^{-(l+1)}\left(\sum_{j=1}^{k}\left|\tilde{b}_j\big(q^lt\big)\right|\left|\bar{\bar{y}}_i\big(q^lt+\delta_j\big)\right|\right)\le$$

$$\leq \sum_{l=0}^{\infty} a^{-(l+1)} \sum_{j=1}^{k} \left|\tilde{b}_j\left(q^l t\right)\right| \tilde{M}'' \tilde{\Delta}^i \leq \frac{\tilde{M}'' \sum_{j=1}^{k} \left|\tilde{b}_j\left(q^l t\right)\right|}{a} \frac{\tilde{\Delta}^i}{1-\dfrac{1}{a}} =$$

$$= \tilde{M}'' \frac{\sum_{j=1}^{k} \left|\tilde{b}_j\left(q^l t\right)\right|}{a-1} \tilde{\Delta}^i = \tilde{M}'' \frac{\sum_{j=1}^{k} \left|\tilde{b}_j^*\right|}{a-1} \tilde{\Delta}^i = \tilde{M}'' \tilde{\Delta}^{i+1}.$$

Отже, ряди (15_i), $i = 0, 1, \ldots,$ рівномірно збігаються при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деяких неперервних функцій $\bar{\bar{y}}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ для яких виконуються оцінки (16). Звідси випливає, що ряд (13) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної функції $\bar{\bar{y}}(t)$, яка задовольняє умову

$$|\bar{\bar{y}}(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\bar{\bar{y}}_i(t)| \leq \tilde{M}'' \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\Delta}^i \leq \frac{\tilde{M}''}{1-\tilde{\Delta}}.$$

Теорему 3 доведено.

Дослідимо тепер рівняння (1) у випадку, коли $0 < a < 1,\ q > 1$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови*

1) $0 < a < 1,\ q > 1$*;*

2) $\tilde{\tilde{\Delta}} = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} |b_j|}{1-a} < 1,\ \nu = \dfrac{\ln a}{\ln q} < 0.$

Тоді рівняння (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(*T *— деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $x(t) = x\left(t, \omega\left(\dfrac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$*, що залежать від довільної неперервної 1-періодичної функції* $\omega(\tau)$*.*

Доведення. Покажемо, що (1) має неперервні розв'язки у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{17}$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (17) в (1), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(qt) = a \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t+\delta_j).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ задовольняють рівняння:

$$x_0(qt) = a x_0(t), \tag{18_0}$$

$$x_i(qt) = a x_i(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j x_{i-1}(t+\delta_j), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{18_i}$$

то ряд (17) буде формальним розв'язком рівняння (1).

Рівняння (3_0) має сім'ю неперервних розв'язків вигляду

$$x_0(t) = t^{\frac{\ln a}{\ln q}} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \tag{19_0}$$

де $\omega(\tau+1) = \omega(\tau)$.

Розглядаючи послідовно рівняння (18_i), $i = 1, 2, \ldots,$ переконуємося, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів

$$x_i(t) = \sum_{l=0}^{\infty} a^l \sum_{j=1}^{k} b_j x_{i-1}\big(q^{-(l+1)}t + \delta_j\big), \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{19_i}$$

Покажемо, що при виконанні умов 1), 2) ряди (19_i), $i = 1, 2, \ldots,$ рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $x_i(t),\ i = 1, 2, \ldots,$ для яких виконуються оцінки

$$|x_i(t)| \leq M\tilde{\tilde{\Delta}}^i, \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{20_i}$$

Дійсно, оскільки $|x_0(t)| \leq Mt^v$, де $M = \max\limits_{\tau} |\omega(\tau)|$, то завдяки (19_1) і $\nu < 0$ отримуємо

$$|x_1(t)| \leq \sum_{l=0}^{\infty} a^l \left[\sum_{j=1}^{k} |b_j| \left|x_0\big(q^{-(l+1)}t + \delta_j\big)\right|\right] \leq \sum_{l=0}^{\infty} a^l \left[\sum_{j=1}^{k} |b_j| M\big(q^{-(l+1)}t + \delta_j\big)^{\nu}\right] \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{\infty} a^l \left[\sum_{j=1}^{k} |b_j| M\left(\frac{1}{q^{l+1}}\,t + \delta_j\right)^{\nu}\right] \leq M \sum_{j=1}^{k} |b_j| \sum_{l=0}^{\infty} a^l.$$

Звідси випливає

$$|x_1(t)| \leq \frac{M \sum_{j=1}^{k} |b_j|}{1-a} = M\tilde{\tilde{\Delta}},$$

де $\tilde{\tilde{\Delta}} = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} |b_j|}{1-a} < 1.$

Отже, оцінка (20_i) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припускаємо, що оцінку (20_i) вже доведено для деякого $i \geq 1$. Покажемо її справедливість для $i+1$. Дійсно, оскільки

$$x_{i+1}(t) = \sum_{l=0}^{\infty} a^l \sum_{j=1}^{k} b_j x_i\big(q^{-(l+1)}t + \delta_j\big),$$

то

$$|x_{i+1}(t)| \leq \sum_{l=0}^{\infty} a^l \left[\sum_{j=1}^{k} |b_j| \left|x_i\big(q^{-(l+1)}t + \delta_j\big)\right|\right] \leq \sum_{l=0}^{\infty} a^l \left[\sum_{j=1}^{k} |b_j|\, M\tilde{\tilde{\Delta}}^i\right] \leq$$

$$\leq M\tilde{\tilde{\Delta}}^i\, \frac{\sum_{j=1}^{k} |b_j|}{1-a} = M\tilde{\tilde{\Delta}}^{i+1}.$$

Отже, ряди (19_i), $i = 1, 2, \ldots,$ рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деяких неперервних функцій $x_i(t),\ i = 1, 2, \ldots,$ для яких виконуються оцінки (20_i), $i = 1, 2, \ldots .$ Із (20_i), $i = 1, 2, \ldots,$ безпосередньо випливає, що ряд (17) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної функції $x(t)$, яка задовольняє умову

$$|x(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |x_i(t)| \leq M \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\tilde{\Delta}}^i \leq \frac{M}{1-\tilde{\tilde{\Delta}}} \quad \forall t \geq T > 0.$$

Теорему 4 доведено.

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння вигляду (6), для якого виконуються умови 1), 2) теореми 4 і функція $f(t)$ є неперервною й обмеженою при всіх $t \in \mathbb{R}$ і такою, що $\sup_t |f(t)| = \tilde{M} < \infty$.

Справедлива така теорема.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови*

1) $0 < a < 1,\ q > 1$*;*

2) $\tilde{\tilde{\Delta}} = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} |b_j|}{1-a} < 1,\ \nu = \dfrac{\ln a}{\ln q} < 0$*;*

3) функція $f(t)$ *є неперервною й обмеженою при всіх* $t \in \mathbb{R}$ *і такою, що* $\sup_t |f(t)| = \tilde{M} < \infty$.

Тоді рівняння (6) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ *розв'язок* $\bar{y}(t)$.

Доведення. Покажемо, що (6) має неперервний розв'язок у вигляді ряду

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \tag{21}$$

де $\bar{y}_i(t),\ i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (21) у (6), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(qt) = a \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t+\delta_j) + f(t). \tag{22}$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $\bar{y}_i(t),\ i = 0, 1, \ldots,$ задовольняють рівняння

$$\bar{y}_0(qt) = a\bar{y}_0(t) + f(t), \tag{23_0}$$

$$\bar{y}_i(qt) = a\bar{y}_i(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j \bar{y}_{i-1}(t+\delta_j), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{23_i}$$

то ряд (21) буде формальним розв'язком рівняння (6).

Рівняння (23_0) має формальний розв'язок вигляду

$$\bar{y}_0(t) = \sum_{l=0}^{\infty} a^l f\big(q^{-(l+1)}t\big). \tag{24_0}$$

Розглядаючи послідовно рівняння (23_i), $i = 1, 2, \ldots,$ переконуємося, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів

$$\bar{y}_i(t) = \sum_{l=0}^{\infty} a^l \sum_{j=1}^{k} b_j \bar{y}_{i-1}\big(q^{-(l+1)}t + \delta_j\big), \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{24_i}$$

Покажемо, що ряди (24_i), $i = 0, 1, \ldots,$ рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $\bar{y}_i(t),\ i = 0, 1, \ldots,$ для яких виконуються оцінки

$$|\bar{y}_i(t)| \le \tilde{\tilde{M}} \tilde{\tilde{\Delta}}^i, \quad i = 0, 1, \ldots . \tag{25}$$

Дійсно, оскільки

$$|\bar{y}_0(t)| \leq \sum_{l=0}^{\infty} a^l \left| f\big(q^{-(l+1)t}\big) \right| \leq \tilde{M} \sum_{l=0}^{\infty} a^l \leq \tilde{M}\, \frac{1}{1-a} = \tilde{\tilde{M}},$$

то

$$|\bar{y}_1(t)| \leq \sum_{l=0}^{\infty} a^l \left[\sum_{j=1}^{k} |b_j| \left| \bar{y}_0\big(q^{-(l+1)}t + \delta_j\big) \right| \right] \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^{\infty} a^l \left[\sum_{j=1}^{k} |b_j| \tilde{\tilde{M}} \right] \leq \tilde{\tilde{M}}\, \frac{\sum_{j=1}^{k} |b_j|}{1-a} = \tilde{\tilde{M}} \tilde{\tilde{\Delta}}. \tag{26}$$

Отже, оцінка (25) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припускаємо, що оцінку (25) вже доведено для деякого $i \geq 1$. Покажемо її справедливість для $i + 1$. Дійсно, оскільки

$$\bar{y}_{i+1}(t) = \sum_{l=0}^{\infty} a^l \sum_{j=1}^{k} b_j \bar{y}_i\big(q^{-(l+1)}t + \delta_j\big),$$

то

$$|\bar{y}_{i+1}(t)| \leq \sum_{l=0}^{\infty} a^l \sum_{j=1}^{k} |b_j| \left| \bar{y}_i\big(q^{-(l+1)}t + \delta_j\big) \right| \leq$$

$$\leq \tilde{\tilde{M}} \sum_{l=0}^{\infty} a^l \sum_{j=1}^{k} |b_j| \tilde{\tilde{\Delta}}^i \leq \tilde{\tilde{M}} \tilde{\tilde{\Delta}}^i\, \frac{\sum_{j=1}^{k} |b_j|}{1-a} = \tilde{\tilde{M}} \tilde{\tilde{\Delta}}^{i+1}.$$

Отже, ряди (24_i), $i = 0, 1, \ldots,$ рівномірно збігаються при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деяких неперервних функцій $\bar{y}_i(t),\ i = 0, 1, \ldots,$ для яких виконуються оцінки (25). Звідси випливає, що ряд (21) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної функції $\bar{y}(t)$, яка задовольняє умову

$$|\bar{y}(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\bar{y}_i(t)| \leq \tilde{\tilde{M}} \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\tilde{\Delta}}^i \leq \frac{\tilde{\tilde{M}}}{1 - \tilde{\tilde{\Delta}}}.$$

Теорему 5 доведено.

Зауваження 2. Виконуючи в (6) заміну змінних

$$y(t) = x(t) + \bar{y}(t), \tag{27}$$

отримуємо рівняння (1) відносно функції $x(t)$. Оскільки для цього рівняння справедлива теорема 4, то, беручи до уваги заміну змінних (27), можна побудувати сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків рівняння (6).

Аналогічно тому, як довели теорему 3, можна отримати подібний результат для рівняння (12) у випадку, коли $0 < a < 1,\ q > 1$ і функції $\tilde{b_j}(t),\ \tilde{f}(t)$ є неперервними й обмеженими при всіх $t \in \mathbb{R}$ і такими, що $\sup_t \left|\tilde{b_j}(t)\right| = b_j^* < \infty,\ j = 1, 2, \ldots, k,\ \sup_t \left|\tilde{f}\,(t)\right| = f^* < \infty.$

Література

1. G. D. Birkhoff, *General theory of linear difference equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **12**, 243 – 284 (1911).
2. R. P. Agarwal, *Difference equations and inequalities, theory, methods and applications. Second edition*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **228**, Marcel Dekker, Inc., New York (2000).
3. Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, Д. И. Мартынюк, *Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами*, Наукова думка, Киев (1985).
4. Г. П. Пелюх, *К теории систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом*, Докл. Акад. наук, **407**, № 5, 600 – 603 (2006).
5. Г. П. Пелюх, О. А. Сивак, *Про структуру множини неперервних розв'язків функціонально-різницевих рівнянь з лінійно перетвореним аргументом*, Нелін. коливання, **13**, № 1, 75 – 95 (2010).
6. Т. О. Єрьоміна, *Неперервні розв'язки одного класу різницево-функціональних рівнянь*, Наук. вісті НТУУ "КПІ", № 4, 75 – 95 (2014).

Одержано 02.08.21