УДК 517.9

НОВА ЦІЛКОМ ІНТЕГРОВНА БЕЗДИСПЕРСІЙНА ДИНАМІЧНА СИСТЕМА НЕБЕСНОГО ТИПУ, ПОРОДЖЕНА ВЕКТОРНИМИ ПОЛЯМИ НА ТОРІ

М. М. Притула

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79602, Україна,
email: mykola.prytula@gmail.com

The problem of derivation of a new spatially two-dimensional dispersion-free Lax – Sato completely integrable equation of celestial type is studied.

Розглянуто задачу про виведення нового просторово-двовимірного бездисперсійного рівняння небесного типу, цілком інтегровного за Лаксом – Сато.

1. Вступ. Небесні рівняння, вперше впроваджені Є. Плєбанським [1], являють собою новий тип бездисперсійних цілком інтегровних нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними. Їхня математична структура зумовлена глибоким зв'язком зі спеціальними Лі-алгебраїчними структурами на функціональних многовидах та властивостями, які детально вивчали протягом останніх десятиліть багато спеціалістів із нелінійного аналізу (див., наприклад, [2 – 17]). Зокрема в працях [7 – 9, 14 – 16] розвинуто Лі-алгебраїчну схему Адлера – Костанта – Суріо [9 – 11] на випадок нелінійних динамічних систем, породжених інваріантами Казіміра групи петлевих дифеоморфізмів тора $\mathbb{T}^n$, $n \in \mathbb{N}$, на коалгебрі Лі петлевих векторних полів на торі і які породжують потоки Лі – Пуассона на відповідно асоційованому функціональному многовиді. Враховуючи властивості інваріантів Казіміра, всі таким чином побудовані потоки є пуассоновими, що дає можливість зображення відповідних небесних рівнянь у вигляді комутативних векторних полів типу Лакса – Сато. Далі реалізовано вказану конструкцію для спеціального вигляду породжуючого елемента коалгебри Лі петель но торі $\mathbb{T}^2$, який характеризується двома особливостями типу полюс в $\lambda = 0$ та $\lambda = \infty$, що дало можливість навести нову нескінченну ієрархію інтегровних бездисперсійних диференціальних рівнянь небесного типу.

2. Виведення рівняння небесного типу. Використовуючи Лі-алгебраїчний підхід, розвинутий в роботах [7 – 9], ми побудуємо нові нескінченні ієрархії комутативних потоків систем еволюційних диференціальних рівнянь на певному функціональному многовиді $M \subset C^\infty(\mathbb{T}^2;\mathbb{R}^3)$ як спеціальних потоків на орбітах спряженого простору $\tilde{\mathcal{G}}^* := \widetilde{\operatorname{diff}}^*(\mathbb{T}^2)$ до алгебри Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ голоморфних векторних полів на двовимірному торі $\mathbb{T}^2$, породжених вибраним кореневим елементом $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$ і відповідними інваріантами Казіміра групи дифеоморфізмів $\widetilde{\operatorname{Diff}}^*(\mathbb{T}^2)$, причому умови сумісності цих потоків у формі Лакса – Сато точно збігаються з відповідними рівняннями небесного типу.

Нехай кореневий елемент $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$ задано у вигляді

$$\tilde{l} = a(x;\lambda)dx_1 + b(x;\lambda)dx_2, \tag{1}$$

де

$$a = l_1 = \frac{u}{\lambda} + v, \qquad b = l_2 = p + \lambda w, \tag{2}$$

а функції $u,\ v,\ p$ належать $C^\infty\big(\mathbb{R}^2\times\mathbb{T}^2;\mathbb{R}\big),\ x=(x_1,x_2)\in\mathbb{T}^2,\ \lambda\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Використаємо формулу (3.29) з [8] за змінною y:

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial x},\circ\nabla h^{(y)}(l)\right\rangle l+\left\langle l,\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\nabla h^{(y)}(l)\right)\right\rangle=$$

$$=\left\langle\nabla h^{(y)}(l),\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle l+\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial x},\nabla h^{(y)}(l)\right)\right\rangle l+\left\langle l,\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\nabla h^{(y)}(l)\right)\right\rangle:=$$

$$:=\left(\tilde{A}_{\nabla h^{(y)}}+B_{\nabla h^{(y)}}\right)l \tag{3}$$

або в подібній формі за змінною t:

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial x},\circ\nabla h^{(t)}(l)\right\rangle l+\left\langle l,\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\nabla h^{(t)}(l)\right)\right\rangle:=\left(\tilde{A}_{\nabla h^{(t)}}+B_{\nabla h^{(t)}}\right)l,$$

де

$$\tilde{A}_{\nabla h^{(y)}}:=\left\langle\nabla h^{(y)}(l),\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle,\qquad \tilde{A}_{\nabla h^{(t)}}:=\left\langle\nabla h^{(t)}(l),\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle,$$

а векторні поля на торі $\mathbb{T}^2$ визначаються виразами

$$B_{\nabla h^{(y)}}:=\left\langle\frac{\partial}{\partial x},\nabla h^{(y)}(l)\right\rangle+\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\nabla h^{(y)}(l)\right),$$

$$B_{\nabla h^{(t)}}:=\left\langle\frac{\partial}{\partial x},\nabla h^{(t)}(l)\right\rangle+\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\nabla h^{(t)}(l)\right),$$

які, як правило, є матричними гомоморфізмами в евклідовому просторі $E^n,\ y,t\in\mathbb{R}$ — відповідно еволюційні параметри.

Розглянемо випадок, коли кореневий елемент $\tilde{l}\in\tilde{\mathcal{G}}^*$ сингулярний при $|\lambda|\to 0$. У цьому випадку отримаємо асимптотичну формулу (3.19) з [8] у вигляді

$$\nabla h(l)_{-}:=\nabla h^{(p)}(l)_{-}\sim\lambda^{-p}\sum_{j\ge 0}\nabla h_j^{(p)}(l)\lambda^j$$

або у вигляді

$$\nabla h(l)_{-}:=(\nabla h_1,\nabla h_2)_{-}^T=\sum_{j\ge 0}(f_j,g_j)^T\lambda^j,\quad |\lambda|\to 0, \tag{4}$$

де

$$l=(a,b)^T,\quad x\in\mathbb{R}^2.$$

Для знаходження елементів $f_j,\ g_j,\ j=0,1,2,\ldots,$ підставимо (2), (4) у (3) і отримаємо співвідношення

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}+\frac{\partial g_j}{\partial x_2}\right)v+u\left(\frac{\partial f_{j+1}}{\partial x_1}+\frac{\partial g_{j+1}}{\partial x_2}\right)+f_{j+1}u_{x_1}+g_{j+1}u_{x_2}+$$

$$+f_jv_{x_1}+g_jv_{x_2}+v\,\frac{\partial f_j}{\partial x_1}+u\,\frac{\partial f_{j+1}}{\partial x_1}+p\,\frac{\partial g_j}{\partial x_1}+w\,\frac{\partial g_{j-1}}{\partial x_1}=0, \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}+\frac{\partial g_j}{\partial x_2}\right)p+w\left(\frac{\partial f_{j-1}}{\partial x_1}+\frac{\partial g_{j-1}}{\partial x_2}\right)+f_jp_{x_1}+f_{j-1}w_{x_1}+$$
$$+g_jp_{x_2}+g_{j-1}w_{x_2}+v\,\frac{\partial f_j}{\partial x_2}+u\,\frac{\partial f_{j+1}}{\partial x_2}+p\,\frac{\partial g_j}{\partial x_2}+w\,\frac{\partial g_{j-1}}{\partial x_2}=0. \tag{6}$$

Із співвідношень (5), (6) послідовно знаходимо $f_j,\ g_j$ для $j=-1,0,1,$

$$f_0=1,\qquad g_0=\frac{q_{x_1}}{u},\qquad f_1=r_{x_1}-\frac{pq_{x_1}}{u^2},\qquad g_1=\frac{z_{x_1}}{u}-\frac{vq_{x_1}}{u^2}, \tag{7}$$
$$f_2=\rho_{x_1}+r_{x_2}z_{x_1}+(r_{x_1})^2-2\alpha_1pz_{x_2}-4\alpha_1pr_{x_1}-\alpha_1w+4\alpha_1^2p^2,$$
$$g_2=\gamma_{x_1}-vg_1-r_{x_1}z_{x_1}-\alpha_1r_{x_1}^2,$$

де

$$u=-q_{x_2},\qquad p=q_{x_2}r_{x_2},\qquad z_{x_1}=g_0v+ug_1,\qquad v=-z_{x_2}-2uf_1. \tag{8}$$

Покладемо $u=1.$ Тоді з (8) отримаємо, що $q_{x_2}=-1,\ q=-x_2+\alpha_1x_1,$ тобто

$$q_{x_1}=ug_0=g_0=\alpha_1=\mathrm{const},$$

а співвідношення (7) набувають вигляду

$$f_0=1,\qquad g_0=\alpha_1=\mathrm{const},$$
$$f_1=r_{x_1}-\alpha_1p,\qquad g_1=z_{x_1}-\alpha_1v=z_{x_1}+\alpha_1z_{x_2}+2\alpha_1r_{x_1}+2\alpha_1^2r_{x_2}, \tag{9}$$
$$v=-z_{x_2}-2r_{x_1}-2\alpha_1r_{x_2},\qquad p=-r_{x_2}. \tag{10}$$

Беремо до уваги формулу (3.19) з [8] за еволюційним параметром y:

$$\nabla h^{(y)}(l)_-=\lambda\times\left(\lambda^{-p_y-1}\nabla h(l)\right)_-,\quad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{11}$$

Тоді при $p_y=0$ із співвідношення (11) отримаємо обчислювальну формулу

$$\nabla h^{(y)}(l)_-=\lambda\times\left(\lambda^{-1}\nabla h(l)\right)_-=$$
$$=\lambda\times\left[\lambda^{-1}\nabla h_0(l)+\lambda^0\nabla h_1(l)+\lambda^1\nabla h_2(l)+\lambda^2\nabla h_3(l)\ldots\right]_-=$$
$$=\lambda\times\left[\lambda^{-1}\nabla h_0(l)\right]=\nabla h_0(l)=\begin{pmatrix}f_0\\ g_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \alpha_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\nabla h_1^{(y)}\\ \nabla h_2^{(y)}\end{pmatrix}. \tag{12}$$

Підставляючи (12), (2) у (5), (6) і розв'язуючи ці співвідношення, одержуємо рівняння

$$u_y=0,$$
$$v_y=v_{x_1}+\alpha_1v_{x_2},$$
$$p_y=p_{x_1}+\alpha_1p_{x_2},$$

$$w_y = w_{x_1} + \alpha_1 w_{x_2},$$

де $v,\ p$ мають вигляд (10), а

$$w = -\rho_{x_2} - pr_{x_1} - pz_{x_2} + 2\alpha_1 p^2.$$

Беремо до уваги формулу (3.19) з [8] за еволюційним параметром t:

$$\nabla h^{(t)}(l)_{-} = \lambda \times \left(\lambda^{-p_t-1}\nabla h(l)\right)_{-}. \tag{13}$$

Тоді при $p_t = 1$ з (13) отримуємо обчислювальну формулу за еволюційним параметром t:

$$\begin{aligned}\nabla h^{(t)}(l)_{-} &= \lambda \times \left(\lambda^{-1-1}\nabla h(l)\right)_{-} = \\ &= \lambda \times \left[\lambda^{-2}\nabla h_0(l) + \lambda^{-1}\nabla h_1(l) + \lambda^{0}\nabla h_2(l) + \lambda^{1}\nabla h_3(l) + \ldots\right]_{-} = \\ &= \lambda \times \left[\lambda^{-2}\nabla h_0(l) + \lambda^{-1}\nabla h_1(l)\right] = \lambda^{-1}\nabla h_0(l) + \lambda^{0}\nabla h_1(l) = \\ &= \lambda^{-1}\begin{pmatrix} f_0 \\ g_0 \end{pmatrix} + \lambda^{0}\begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} = \lambda^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \lambda^{0}\begin{pmatrix} r_{x_1} + \alpha_1 r_{x_2} \\ z_{x_1} - \alpha_1 v \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda} + r_{x_1} - \alpha_1 p \\ \dfrac{1}{\lambda}\,\alpha_1 + z_{x_1} - \alpha_1 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla h_1^{(t)} \\ \nabla h_2^{(t)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{14}$$

Підставляючи (14), (2) у (5), (6) і розв'язуючи ці співвідношення, одержуємо рівняння

$$u_t = 0,$$

$$v_t = 2vf_{1,x_1} + vg_{1,x_2} + v_{x_1} f_1 + v_{x_2} g_1 + pg_{1,x_1}, \tag{15}$$

$$wz_{x_1x_1} - \alpha_1 w v_{x_1} = 0, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} p_t = pr_{x_1x_1} + 2pz_{x_1x_2} + w_{x_1} + r_{x_1}p_{x_1} + p_{x_2}z_{x_1} + vr_{x_1x_2} + \\ + \alpha_1 pr_{x_1x_2} + \alpha_1 r_{x_2}p_{x_1} + \alpha_1 vr_{x_2x_2} - 2\alpha_1 pv_{x_2} - \alpha_1 p_{x_2} v + \alpha_1 w_{x_2}, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} w_t = wr_{x_1x_1} + r_{x_1}w_{x_1} + z_{x_1}w_{x_2} + 2wz_{x_1x_2} - \\ - \alpha_1 p_{x_1} w - 2\alpha_1 v_{x_2} w - \alpha_1 p w_{x_1} - \alpha_1 v w_{x_2}. \end{aligned} \tag{18}$$

З рівняння (16) маємо

$$w(z_{x_1} - \alpha_1 v)_{x_1} = wg_{1,x_1} = 0. \tag{19}$$

З урахуванням (19) розглянемо два випадки:

1) $w = 0,\ g_{1,x_1} \neq 0$;
2) $w \neq 0,\ g_{1,x_1} = 0$.

Випадок 1: $w = 0,\ g_{1,x_1} \neq 0.$

Виразимо змінні $v,\ p,\ f_1,\ g_1$ у лівій і правій частинах (15) через змінні $r,\ z$. З цією метою, підставляючи (9), (10) у (15), отримуємо таке співвідношення (виділяємо повні похідні за змінними $x_1,\ x_2$):

$$\begin{aligned}(-z_{x_2} - 2r_{x_1} - 2\alpha_1 r_{x_2})_t &= -(z_t)_{x_2} - (2r_t)_{x_1} - (2\alpha_1 r_t)_{x_2} = \\ &= -2z_{x_2} r_{x_1x_1} - 6r_{x_1} r_{x_1x_1} - z_{x_2} z_{x_1x_2} - 3r_{x_1} z_{x_1x_2} - z_{x_1} z_{x_2x_2} - \\ &\quad - 2z_{x_1} r_{x_1x_2} - r_{x_2} z_{x_1x_1} - 8\alpha_1 r_{x_2} r_{x_1x_1} - 4\alpha_1 r_{x_2} z_{x_1x_2} - \\ &\quad - 14\alpha_1 r_{x_1} r_{x_1x_2} - 2\alpha_1 z_{x_1} r_{x_2x_2} - 6\alpha_1 z_{x_2} r_{x_1x_2} - \\ &\quad - 2\alpha_1 z_{x_2} z_{x_2x_2} - 4\alpha_1 r_{x_1} z_{x_2x_2} - 4\alpha_1^2 z_{x_2} r_{x_2x_2} - \\ &\quad - 8\alpha_1^2 r_{x_1} r_{x_2x_2} - 4\alpha_1^2 r_{x_2} z_{x_2x_2} - 16\alpha_1^2 r_{x_2} r_{x_1x_2} - 8\alpha_1^3 r_{x_2} r_{x_2x_2} = \\ &= -(2r_{x_1} z_{x_2})_{x_1} - \left(3r_{x_1}^2\right)_{x_1} - (z_{x_1} z_{x_2})_{x_2} - (r_{x_1} z_{x_1})_{x_2} - (r_{x_2} z_{x_1})_{x_1} - \\ &\quad - (8\alpha_1 r_{x_1} r_{x_2})_{x_1} - \left(3\alpha_1 r_{x_1}^2\right)_{x_2} - (4\alpha_1 r_{x_1} z_{x_2})_{x_2} - (2\alpha_1 r_{x_2} z_{x_1})_{x_2} - \\ &\quad - (2\alpha_1 r_{x_2} z_{x_2})_{x_1} - \left(\alpha_1 z_{x_2}^2\right)_{x_2} - \left(4\alpha_1^2 r_{x_2} z_{x_2}\right)_{x_2} - \\ &\quad - \left(8\alpha_1^2 r_{x_1} r_{x_2}\right)_{x_2} - \left(4\alpha_1^2 r_{x_2}^2\right)_{x_1} - \left(4\alpha_1^3 r_{x_2}^2\right)_{x_2}. \end{aligned} \tag{20}$$

З (20) виділяємо доданки при похідних за змінною x_2 і одержуємо

$$\begin{aligned}-(z_t)_{x_2} - (2\alpha_1 r_t)_{x_2} &= -(z_{x_1} z_{x_2})_{x_2} - (r_{x_1} z_{x_1})_{x_2} - \left(3\alpha_1 r_{x_1}^2\right)_{x_2} - \\ &\quad - (4\alpha_1 r_{x_1} z_{x_2})_{x_2} - (2\alpha_1 r_{x_2} z_{x_1})_{x_2} - \left(\alpha_1 z_{x_2}^2\right)_{x_2} - \\ &\quad - \left(4\alpha_1^2 r_{x_2} z_{x_2}\right)_{x_2} - \left(8\alpha_1^2 r_{x_1} r_{x_2}\right)_{x_2} - \left(4\alpha_1^3 r_{x_2}^2\right)_{x_2}. \end{aligned} \tag{21}$$

З (21) маємо рівняння для $r,\ z$:

$$\begin{aligned} z_t + 2\alpha_1 r_t &= z_{x_1} z_{x_2} + r_{x_1} z_{x_1} + 3\alpha_1 r_{x_1}^2 + 4\alpha_1 r_{x_1} z_{x_2} + \\ &\quad + 2\alpha_1 r_{x_2} z_{x_1} + +\alpha_1 z_{x_2}^2 + 4\alpha_1^2 r_{x_2} z_{x_2} + 8\alpha_1^2 r_{x_1} r_{x_2} + 4\alpha_1^3 r_{x_2}^2, \end{aligned} \tag{22}$$

а з (20) отримуємо рівняння для r (прирівняли вирази при похідних за змінною x_1):

$$r_t = r_{x_1} z_{x_2} + \left(\frac{1}{2}\right) r_{x_2} z_{x_1} + \left(\frac{3}{2}\right) r_{x_1}^2 + 4\alpha_1 r_{x_1} r_{x_2} + \alpha_1 r_{x_2} z_{x_2} + 2\alpha_1^2 r_{x_2}^2. \tag{23}$$

Підставимо вираз (23) у (22) і одержимо рівняння для z:

$$\begin{aligned} z_t &= -2\alpha_1 r_t + z_{x_1} z_{x_2} + r_{x_1} z_{x_1} + 3\alpha_1 r_{x_1}^2 + 4\alpha_1 r_{x_1} z_{x_2} + 2\alpha_1 r_{x_2} z_{x_1} + \\ &\quad + \alpha_1 z_{x_2}^2 + 4\alpha_1^2 r_{x_2} z_{x_2} + 8\alpha_1^2 r_{x_1} r_{x_2} + 4\alpha_1^3 r_{x_2}^2 = \\ &= z_{x_1} z_{x_2} + r_{x_1} z_{x_1} + 2\alpha_1 r_{x_1} z_{x_2} + \alpha_1 r_{x_2} z_{x_1} + \alpha_1 z_{x_2}^2 + 2\alpha_1^2 r_{x_2} z_{x_2}. \end{aligned} \tag{24}$$

Враховуючи випадок 1 ($w = 0,\ g_{1,x_1} \neq 0$), виразимо змінні $v,\ p$ у лівій і правій частинах (17) через змінні $r,\ z$. З цією метою підставимо (9), (10) у (17) і отримаємо вираз (виділяємо повні похідні)

$$
\begin{aligned}
p_t &= (-r_{x_2})_t = -(r_t)_{x_2} = pr_{x_1x_1} + 2pz_{x_1x_2} + w_{x_1} + r_{x_1}p_{x_1} + p_{x_2}z_{x_1} + vr_{x_1x_2} + \\
&\quad + \alpha_1 pr_{x_1x_2} + \alpha_1 r_{x_2}p_{x_1} + \alpha_1 vr_{x_2x_2} - 2\alpha_1 pv_{x_2} - \alpha_1 p_{x_2}v + \alpha_1 w_{x_2} = \\
&= -z_{x_2}r_{x_1x_2} - 3r_{x_1}r_{x_1x_2} - 2r_{x_2}z_{x_1x_2} - z_{x_1}r_{x_2x_2} - r_{x_2}r_{x_1x_1} - \\
&\quad - 8\alpha_1 r_{x_2}r_{x_1x_2} - 2\alpha_1 r_{x_2}z_{x_2x_2} - 2\alpha_1 z_{x_2}r_{x_2x_2} - 4\alpha_1 r_{x_1}r_{x_2x_2} - 8\alpha_1^2 r_{x_2}r_{x_2x_2} = \\
&= -(r_{x_2}z_{x_1})_{x_2} - \left(r_{x_1}^2\right)_{x_2} - (z_{x_2}r_{x_2})_{x_1} - (r_{x_1}r_{x_2})_{x_1} - \\
&\quad - (2\alpha_1 r_{x_2}z_{x_2})_{x_2} - (4\alpha_1 r_{x_1}r_{x_2})_{x_2} - \left(4\alpha_1^2 r_{x_2}^2\right)_{x_2} - \left(2\alpha_1 r_{x_2}^2\right)_{x_1}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Із співвідношення (25) одержуємо рівняння для r (прирівняли похідні за змінною x_2):

$$
r_t = r_{x_2}z_{x_1} + r_{x_1}^2 + 2\alpha_1 r_{x_2}z_{x_2} + 4\alpha_1 r_{x_1}r_{x_2} + 4\alpha_1^2 r_{x_2}^2. \tag{26}
$$

Об'єднуючи отримані вище результати обчислень, можна сформулювати таку теорему.

Теорема 1. *Кореневий елемент (1), (2) коалгебри Лі алгебри Лі векторних полів на торі* $\mathbb{T}^2$ *при умові, що функціональний параметр* $w = 0$, *породжує нескінченну ієрархію інтегровних бездисперсійних рівнянь небесного типу, першими представниками якої є система еволюційних пуассонових потоків (24), (26) відповідно.*

Розглянемо *випадок 2* ($w \neq 0,\ g_{1,x_1} = 0$).

При цій умові з рівняння (17) отримаємо співвідношення

$$
\begin{aligned}
p_t &= (-r_{x_2})_t = -(r_t)_{x_2} = pr_{x_1x_1} + 2pz_{x_1x_2} + w_{x_1} + r_{x_1}p_{x_1} + p_{x_2}z_{x_1} + vr_{x_1x_2} + \\
&\quad + \alpha_1 pr_{x_1x_2} + \alpha_1 r_{x_2}p_{x_1} + \alpha_1 vr_{x_2x_2} - 2\alpha_1 pv_{x_2} - \alpha_1 p_{x_2}v + \alpha_1 w_{x_2} = \\
&= w_{x_1} - z_{x_2}r_{x_1x_2} - 3r_{x_1}r_{x_1x_2} - 2r_{x_2}z_{x_1x_2} - z_{x_1}r_{x_2x_2} - r_{x_2}r_{x_1x_1} - \alpha_1 w_{x_2} - \\
&\quad - 8\alpha_1 r_{x_2}r_{x_1x_2} - 2\alpha_1 r_{x_2}z_{x_2x_2} - 2\alpha_1 z_{x_2}r_{x_2x_2} - 4\alpha_1 r_{x_1}r_{x_2x_2} - 8\alpha_1^2 r_{x_2}r_{x_2x_2} = \\
&= (w)_{x_1} - (r_{x_2}z_{x_1})_{x_2} - (r_{x_1}^2)_{x_2} - (r_{x_2}z_{x_2})_{x_1} - (r_{x_1}r_{x_2})_{x_1} + \\
&\quad + (\alpha_1 w)_{x_2} - (2\alpha_1 r_{x_2}z_{x_2})_{x_2} - (4\alpha_1 r_{x_1}r_{x_2})_{x_2} - \left(4\alpha_1^2 r_{x_2}^2\right)_{x_2} - \left(2\alpha_1 r_{x_2}^2\right)_{x_1}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Із співвідношення (27) одержимо рівняння для r (прирівняли похідні за змінною x_2):

$$
r_t = r_{x_2}z_{x_1} + r_{x_1}^2 + 2\alpha_1 r_{x_2}z_{x_2} + 4\alpha_1 r_{x_1}r_{x_2} + 4\alpha_1^2 r_{x_2}^2 + \alpha_1 w. \tag{28}
$$

З рівняння (18), виразивши $v,\ p$ через $r,\ z$, отримаємо рівняння на w:

$$
\begin{aligned}
w_t &= 2wz_{x_1x_2} + w_{x_1}r_{x_1} + w_{x_2}z_{x_1} + wr_{x_1x_1} + 5\alpha_1 wr_{x_1x_2} + 2\alpha_1 wz_{x_2x_2} + \\
&\quad + \alpha_1 w_{x_1}r_{x_2} + \alpha_1 w_{x_2}z_{x_2} + 2\alpha_1 w_{x_2}r_{x_1} + 4\alpha_1^2 wr_{x_2x_2} + 2\alpha_1^2 w_{x_2}r_{x_2}.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Як наслідок виконаних вище аналітичних обчислень можемо сформулювати таку теорему.

Теорема 2. *Кореневий елемент (1), (2) коалгебри Лі алгебри Лі векторних полів на торі* $\mathbb{T}^2$ *при умові, що функціональний параметр* $w \neq 0$, *породжує нескінченну ієрархію інтегровних бездисперсійних рівнянь небесного типу, першими представниками якої є система еволюційних пуассонових потоків (28), (29) відповідно.*

Прокомутуємо два векторні поля за формулою Лакса – Сато (30) (отримаємо два рівняння на r і z за еволюційним параметром y):

$$\frac{\partial \tilde{A}_{\nabla h_-^{(y)}}}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{A}_{\nabla h_-^{(t)}}}{\partial y} = \left[\tilde{A}_{\nabla h_-^{(y)}}, \tilde{A}_{\nabla h_-^{(t)}}\right], \tag{30}$$

де

$$\tilde{A}_{\nabla h_-^{(y)}} := \left\langle \nabla h_-^{(y)}(l), \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = 1\,\frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_1\,\frac{\partial}{\partial x_2}, \tag{31}$$

$$\tilde{A}_{\nabla h_-^{(t)}} := \left\langle \nabla h_-^{(t)}(l), \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \left(\frac{1}{\lambda} + r_{x_1} + \alpha_1 r_{x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{1}{\lambda}\,\alpha_1 + z_{x_1} - \alpha_1 v\right)\frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{32}$$

Підставимо (31), (32) у (30) і одержимо

$$\begin{aligned} &-\left\{[(r_{x_1})_y + \alpha_1 (r_{x_2})_y]\,\frac{\partial}{\partial x_1} + [(z_{x_1})_y - \alpha_1 (v)_y]\,\frac{\partial}{\partial x_2}\right\} = \\ &\qquad = \left[r_{x_1x_1} + 2\alpha_1 r_{x_1x_2} + \alpha_1^2 r_{x_2x_2}\right]\frac{\partial}{\partial x_1} + \left[z_{x_1x_1} - \alpha_1 v_{x_1} + \alpha_1 z_{x_1x_2} - \alpha_1^2 v_{x_2}\right]\frac{\partial}{\partial x_2}. \end{aligned} \tag{33}$$

Прирівнюючи в (33) вирази при $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ і $\dfrac{\partial}{\partial x_2}$, отримуємо відповідно співвідношення

$$-[(r_{x_1})_y + \alpha_1 (r_{x_2})_y] = \left[r_{x_1x_1} + 2\alpha_1 r_{x_1x_2} + \alpha_1^2 r_{x_2x_2}\right], \tag{34}$$

$$-[(z_{x_1})_y - \alpha_1 (v)_y] = \left[z_{x_1x_1} - \alpha_1 v_{x_1} + \alpha_1 z_{x_1x_2} - \alpha_1^2 v_{x_2}\right]. \tag{35}$$

Виділяючи в (34) повні похідні, маємо вираз

$$-(r_y)_{x_1} - \alpha_1 (r_y)_{x_2} = (r_{x_1})_{x_1} + (\alpha_1 r_{x_2})_{x_1} + (\alpha_1 r_{x_1})_{x_2} + \left(\alpha_1^2 r_{x_2}\right)_{x_2}. \tag{36}$$

Прирівнюючи похідні в (36) за змінними x_1 і x_2, отримуємо два однакові рівняння вигляду

$$r_y = -r_{x_1} - \alpha_1 r_{x_2}. \tag{37}$$

Підставимо v з (10) у (35) і виділимо повні похідні за змінними x_1 і x_2. Одержимо вираз

$$\begin{aligned} &-\left[(z_y)_{x_1} + (\alpha_1 z_y)_{x_2} + (2\alpha_1 r_y)_{x_1} + (2\alpha_1^2 r_y)_{x_2}\right] = \\ &\quad = (z_{x_1})_{x_1} + (\alpha_1 z_{x_2})_{x_1} + (\alpha_1 z_{x_1})_{x_2} + (2\alpha_1 r_{x_1})_{x_1} + \\ &\quad + \left(2\alpha_1^2 r_{x_2}\right)_{x_1} + \left(2\alpha_1^2 r_{x_1}\right)_{x_2} + \left(\alpha_1^2 z_{x_2}\right)_{x_2} + \left(2\alpha_1^3 r_{x_2}\right)_{x_2}. \end{aligned} \tag{38}$$

Прирівнюючи похідні в (38) за змінними x_1 і x_2, отримуємо два однакові рівняння вигляду

$$z_y + 2\alpha_1 r_y = -z_{x_1} - \alpha_1 z_{x_2} - 2\alpha_1 r_{x_1} - 2\alpha_1^2 r_{x_2}. \tag{39}$$

Підставимо (37) у (39) і одержимо рівняння для z:

$$z_y = -z_{x_1} - \alpha_1 z_{x_2}.$$

З іншого боку, умова (30) еквівалентна спареній умові двох лінійних рівнянь з [8]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \tilde{A}_{\nabla h_-^{(y)}}\right)\psi_1 = 0, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{A}_{\nabla h_-^{(t)}}\right)\psi_2 = 0, \tag{40}$$

де функція ψ належить $\left(C^2\left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2_{\mathbb{C}}\right); \mathbb{C}\right)$ для всіх $y, t \in \mathbb{R}$ і деякого $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

З першого рівняння (40), врахувавши співвідношення (31), отримуємо рівняння для ψ_1 за еволюційним параметром y:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \alpha_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} = 0, \tag{41}$$

розв'язок якого шукаємо у формі

$$\psi_1 \cong \sum_{j \geq 0} \psi_1^{(j)} \lambda^j.$$

Цей розв'язок набуває вигляду

$$\psi_1 = y - (\alpha + 1)x_1 + x_2 + C_1(\text{const}). \tag{42}$$

З другого рівняння (40), враховуючи співвідношення (32), отримуємо рівняння для ψ_2 за еволюційним параметром t:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \left(\frac{1}{\lambda} + r_{x_1} + \alpha_1 r_{x_2}\right)\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \left(\frac{1}{\lambda}\alpha_1 + z_{x_1} + \alpha_1 z_{x_2} + 2\alpha_1 r_{x_1} + 2\alpha_1^2 r_{x_2}\right)\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} = 0. \tag{43}$$

Розв'язок рівняння (43) шукаємо у вигляді

$$\psi_2 \cong \sum_{j \geq -1} \psi_2^{(j)} \lambda^j = \psi_2^{(-1)} \frac{1}{\lambda} + \psi_2^{(0)} \lambda^0 + \psi_2^{(1)} \lambda^1 + \ldots,$$

яке підставляємо у (43) і отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left[\psi_2^{(-1)} \frac{1}{\lambda} + \psi_2^{(0)} \lambda^0 + \psi_2^{(1)} \lambda^1 + \ldots\right] + \\ &\quad + \left(\frac{1}{\lambda} + r_{x_1} + \alpha_1 r_{x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\psi_2^{(-1)} \frac{1}{\lambda} + \psi_2^{(0)} \lambda^0 + \psi_2^{(1)} \lambda^1 + \ldots\right] + \\ &\quad + \left(\frac{1}{\lambda}\alpha_1 + z_{x_1} + \alpha_1 z_{x_2} + 2\alpha_1 r_{x_1} + 2\alpha_1^2 r_{x_2}\right) \times \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\psi_2^{(-1)} \frac{1}{\lambda} + \psi_2^{(0)} \lambda^0 + \psi_2^{(1)} \lambda^1 + \ldots\right] = 0. \end{aligned} \tag{44}$$

Із (44) при $\dfrac{1}{\lambda^2}$ маємо рівняння

$$\frac{\partial \psi_2^{(-1)}}{\partial x_1} + \alpha_1 \frac{\partial \psi_2^{(-1)}}{\partial x_2} = 0,$$

розв'язок якого набуває вигляду

$$\psi_2^{(-1)} = -\alpha_1 x_1 + x_2 + C_2(\mathrm{const}). \tag{45}$$

Із (44) при $\dfrac{1}{\lambda}$ маємо рівняння

$$\frac{\partial \psi_2^{(-1)}}{\partial t} + \frac{\partial \psi_2^{(0)}}{\partial x_1} + (r_{x_1} + \alpha_1 r_{x_2}) \frac{\partial \psi_2^{(-1)}}{\partial x_1} + \\ + \alpha_1 \frac{\partial \psi_2^{(0)}}{\partial x_2} + \left(z_{x_1} + \alpha_1 z_{x_2} + 2\alpha_1 r_{x_1} + 2\alpha_1^2 r_{x_2}\right) \frac{\partial \psi_2^{(-1)}}{\partial x_2} = 0. \tag{46}$$

Підставимо розв'язок (45) у (46) і одержимо рівняння для $\psi_2^{(0)}$:

$$\frac{\partial \psi_2^{(0)}}{\partial x_1} + (r_{x_1} + \alpha_1 r_{x_2}) \cdot (-\alpha_1) + \alpha_1 \frac{\partial \psi_2^{(0)}}{\partial x_2} + \left(z_{x_1} + \alpha_1 z_{x_2} + 2\alpha_1 r_{x_1} + 2\alpha_1^2 r_{x_2}\right) \cdot (1) = 0. \tag{47}$$

Із (47) отримуємо рівняння (виділяємо повні похідні)

$$\frac{\partial \psi_2^{(0)}}{\partial x_1} + \alpha_1 \frac{\partial \psi_2^{(0)}}{\partial x_2} = (\alpha_1 r)_{x_1} + \left(\alpha_1^2 r\right)_{x_2} - (z)_{x_1} - (\alpha_1 z)_{x_2} - (2\alpha_1 r)_{x_1} - \left(2\alpha_1^2 r\right)_{x_2}. \tag{48}$$

Із (48) маємо рівняння

$$\frac{\partial \psi_2^{(0)}}{\partial x_1} = (-z - \alpha_1 r)_{x_1},$$

розв'язок якого набуває вигляду

$$\psi_2^{(0)} = -z - \alpha_1 r + C_3(\mathrm{const}). \tag{49}$$

Із (48) одержуємо рівняння (прирівняли похідні при x_2)

$$\alpha_1 \frac{\partial \psi_2^{(0)}}{\partial x_2} = \left(\alpha_1^2 r - \alpha_1 z - 2\alpha_1^2 r\right)_{x_2},$$

розв'язок якого співпадає з розв'язком (49).

Отже, розв'язок рівняння (44) набуває вигляду

$$\psi_2 \cong \psi_2^{(-1)} + \psi_2^{(0)} + \ldots = -\alpha_1 x_1 + x_2 - z - \alpha_1 r + O(\lambda). \tag{50}$$

Твердження 1. *Нехай задано кореневий елемент (1) із сингулярністю $|\lambda| \to 0$ і виконуються рівності (9), (10), (12), (14), (30) – (32). Тоді умова сумісності Лакса – Сато є еквівалентною збігові інваріантів векторних полів (41) і (43), частковими розв'язками яких є вирази (42), (50) відповідно.*

Розглянемо випадок, коли кореневий елемент $\tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$ сингулярний при $|\lambda| \to \infty$. Використаємо асимптотичну формулу (3.27) з [7]:

$$\nabla h(l)_+ := \nabla h^{(p)}(l)_+ \sim \lambda^p \sum_{j \geq 0} \nabla h_j^{(p)}(l) \lambda^{-j}$$

або ж у вигляді

$$\nabla h(l)_+ := (\nabla h_1, \nabla h_2)_+^T = \sum_{j \geq 0} (f_j, g_j)^T \lambda^{-j}, \quad |\lambda| \to \infty, \tag{51}$$

де $l = (a, b)^T$, $x \in \mathbb{T}^2$. Для знаходження елементів f_j, g_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, підставимо (2), (51) у (3) і отримаємо співвідношення

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1} + \frac{\partial g_j}{\partial x_2}\right) v + u \left(\frac{\partial f_{j-1}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{j-1}}{\partial x_2}\right) + f_{j-1} u_{x_1} + g_{j-1} u_{x_2} + \\ + f_j v_{x_1} + g_j v_{x_2} + v \frac{\partial f_j}{\partial x_1} + u \frac{\partial f_{j-1}}{\partial x_1} + p \frac{\partial g_j}{\partial x_1} + w \frac{\partial g_{j+1}}{\partial x_1} = 0,\end{gathered} \tag{52}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1} + \frac{\partial g_j}{\partial x_2}\right) p + w \left(\frac{\partial f_{j+1}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{j+1}}{\partial x_2}\right) + f_j p_{x_1} + f_{j+1} w_{x_1} + \\ + g_j p_{x_2} + g_{j+1} w_{x_2} + v \frac{\partial f_j}{\partial x_2} + u \frac{\partial f_{j-1}}{\partial x_2} + p \frac{\partial g_j}{\partial x_2} + w \frac{\partial g_{j+1}}{\partial x_2} = 0.\end{gathered} \tag{53}$$

Із співвідношень (52), (53), в яких покладемо $w = 1$, послідовно знаходимо f_j, g_j для $j = -1, 0, 1$:

$$g_0 = 1, \quad f_0 = q_{x_2} = \alpha_1 = \mathrm{const},$$

$$g_1 = r_{x_2} - v q_{x_2}, \quad f_1 = z_{x_2} - p q_{x_2}, \quad q = -x_1 + \alpha_1 x_2, \tag{54}$$

$$v = -r_{x_1}, \quad p = -z_{x_1} - 2 r_{x_2} - 2\alpha_1 r_{x_1}, \tag{55}$$

$$\begin{gathered}g_2 = \rho_{x_2} + r_{x_1} z_{x_2} + r_{x_1}^2 + 2\alpha_1 r_{x_1} z_{x_1} + 4\alpha_1 r_{x_1} r_{x_2} - \alpha_1 u + 4\alpha_1^2 r_{x_1}^2, \\ f_2 = \gamma_{x_2} + z_{x_1} z_{x_2} + r_{x_2} z_{x_2} + 3\alpha_1 r_{x_2}^2 + 2\alpha_1 r_{x_1} z_{x_2} + \\ + \alpha_1 z_{x_1}^2 + 4\alpha_1 r_{x_2} z_{x_1} + 8\alpha_1^2 r_{x_1} r_{x_2} + 4\alpha_1^2 r_{x_1} z_{x_1} + 4\alpha_1^3 r_{x_1}^2, \\ u = -\rho_{x_1} + r_{x_1} r_{x_2} + r_{x_1} z_{x_1} + 2\alpha_1 r_{x_1}^2.\end{gathered}$$

Використаємо формулу (3.28) з [7] за еволюційним параметром y:

$$\nabla h^{(y)}(l)_+ = (\lambda^{p_y} \nabla h(l))_+ . \tag{56}$$

Тоді при $p_y = 0$ з (56) отримаємо обчислювальну формулу

$$\nabla h^{(y)}(l)_+ = \left(\lambda^0 \nabla h^{(y)}(l)\right)_+ = \left[\lambda^0 \nabla h_0(l) + \frac{1}{\lambda} \nabla h_1(l) + \frac{1}{\lambda^2} \nabla h_2(l) + \ldots\right]_+ =$$

$$= \left[\lambda^0 \nabla h_0(l)\right] = \nabla h_0(l) = \begin{pmatrix} f_0 \\ g_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla h_1^{(y)} \\ \nabla h_2^{(y)} \end{pmatrix}. \tag{57}$$

Підставляючи (57), (2) у (52), (53) відповідно та використовуючи рівність (3.17) з [8]

$$\frac{\partial \tilde{l}}{\partial y} = -ad^*_{\nabla h_+^{(y)}}(\tilde{l}),$$

отримуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} u_y &= -(u_{x_2} + \alpha_1 u_{x_1}), \\ v_y &= -(v_{x_2} + \alpha_1 v_{x_1}), \\ p_y &= -(p_{x_2} + \alpha_1 p_{x_1}), \\ w_y &= 0, \end{aligned}$$

де $v,\ p$ набувають вигляду (55), а

$$u = -\rho_{x_1} + r_{x_1} r_{x_2} + r_{x_1} z_{x_1} + 2\alpha_1 r_{x_1}^2.$$

Використаємо формулу (3.28) з [7] за еволюційним параметром t:

$$\nabla h^{(t)}(l)_+ = (\lambda^{p_t} \nabla h(l))_+. \tag{58}$$

Тоді при $p_t = 1$ з (58) отримаємо обчислювальну формулу за еволюційним параметром t:

$$\begin{aligned} \nabla h^{(t)}(l)_+ &= \left(\lambda^1 \nabla h(l)\right)_+ = \\ &= \left(\lambda^1 \nabla h_0(l) + \lambda^0 \nabla h_1(l) + \frac{1}{\lambda}\nabla h_2(l) + \frac{1}{\lambda^2}\nabla h_3(l) + \ldots\right)_+ = \\ &= \lambda^1 \nabla h_0(l) + \lambda^0 \nabla h_1(l) = \\ &= \lambda^1 \begin{pmatrix} f_0 \\ g_0 \end{pmatrix} + \lambda^0 \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} = \lambda^1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda^0 \begin{pmatrix} z_{x_2} - \alpha_1 p \\ r_{x_2} - \alpha_1 v \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^1 \alpha_1 + z_{x_2} - \alpha_1 p \\ \lambda^1 + r_{x_2} - \alpha_1 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla h_1^{(t)} \\ \nabla h_2^{(t)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{59}$$

Підставляючи (59), (2) у (52), (53) відповідно та використовуючи рівність (3.17) з [8]

$$\frac{\partial \tilde{l}}{\partial t} = -ad^*_{\nabla h_+^{(t)}}(\tilde{l}),$$

одержуємо такі рівняння:

при λ^{-1}:

$$u_t = -\left[u r_{x_2 x_2} + u_{x_1} z_{x_2} + u_{x_2} r_{x_2} + \right.$$

$$+ 2uz_{x_1x_2} - \alpha_1 uv_{x_2} - 2\alpha_1 up_{x_1} - \alpha_1 pu_{x_1} - \alpha_1 vu_{x_2}\big]; \tag{60}$$

при λ^0:

$$v_t = -\big[vr_{x_2x_2} + 2vz_{x_1x_2} + u_{x_2} + z_{x_2}v_{x_1} + r_{x_2}v_{x_2} +$$
$$+ pr_{x_1x_2} - 2\alpha_1 vp_{x_1} - 2\alpha_1 vv_{x_2} - 2\alpha_1 pv_{x_1} + \alpha_1 u_{x_1}\big]; \tag{61}$$

при λ^1:

$$\alpha_1 v_{x_1} + v_{x_2} + r_{x_1x_2} - \alpha_1 v_{x_1} \equiv 0, \tag{62}$$

$$uz_{z_2x_2} - \alpha_1 up_{x_2} = 0; \tag{63}$$

при λ^0:

$$p_t = -\big[pz_{x_1x_2} + z_{x_2}p_{x_1} + vz_{x_2x_2} + 2pr_{x_2x_2} +$$
$$+ r_{x_2}p_{x_2} - 2\alpha_1 pp_{x_1} - 2\alpha_1 pv_{x_2} - 2\alpha_1 vp_{x_2}\big]; \tag{64}$$

при λ^1:

$$w_t \equiv 0.$$

У результаті проведених вище обчислень крім рівнянь (60), (61), (64) отримали ще дві додаткові умови (62) і (63). З рівняння (62) одержали тотожній нуль, а з (63) маємо співвідношення

$$u(z_{x_2} - \alpha_1 p)_{x_2} = uf_{1,x_2} = 0. \tag{65}$$

Для (65) розглянемо два випадки:

1) $u = 0,\ f_{1,x_2} \neq 0$;

2) $u \neq 0,\ f_{1,x_2} = 0$.

Розглянемо *випадок 1*: $u = 0,\ f_{1,x_2} \neq 0$.

Виразимо змінні $p,\ v$ у лівій і правій частинах (64) через змінні $r,\ z$. З цією метою підставимо (55) у (64) і отримаємо співвідношення (виділяємо повні похідні за змінними $x_1,\ x_2$):

$$(-z_{x_1} - 2r_{x_2} - 2\alpha_1 r_{x_1})_t = -(z_t)_{x_1} - (2r_t)_{x_2} - (2\alpha_1 r_t)_{x_1} =$$
$$= -\Big[-z_{x_1}z_{x_1x_2} - 2r_{x_2}z_{x_1x_2} - z_{x_2}z_{x_1x_1} - 2z_{x_2}r_{x_1x_2} -$$
$$- r_{x_1}z_{x_2x_2} - 2z_{x_1}r_{x_2x_2} - 6r_{x_2}r_{x_2x_2} - r_{x_2}z_{x_1x_2} -$$
$$- 4\alpha_1 r_{x_1}z_{x_1x_2} - 2\alpha_1 z_{x_2}r_{x_1x_1} - 8\alpha_1 r_{x_1}r_{x_2x_2} - 14\alpha_1 r_{x_2}r_{x_1x_2} -$$
$$- 2\alpha_1 z_{x_1}z_{x_1x_1} - 6\alpha_1 z_{x_1}r_{x_1x_2} - 4\alpha_1 r_{x_2}z_{x_1x_1} - 4\alpha_1^2 z_{x_1}r_{x_1x_1} -$$
$$- 8\alpha_1^2 r_{x_2}r_{x_1x_1} - 4\alpha_1^2 r_{x_1}z_{x_1x_1} - 16\alpha_1^2 z_{x_1}r_{x_1x_2} - 8\alpha_1^3 r_{x_1}r_{x_1x_1}\Big] =$$
$$= -\Big[-(2r_{x_2}z_{x_1})_{x_2} - \big(3r_{x_2}^2\big)_{x_2} - (z_{x_1}z_{x_2})_{x_1} -$$

$$-(r_{x_1}z_{x_2})_{x_2}-(r_{x_2}z_{x_2})_{x_1}-(8\alpha_1 r_{x_1}r_{x_2})_{x_2}-(3\alpha_1 r^2_{x_2})_{x_1}-$$
$$-(4\alpha_1 r_{x_2}z_{x_1})_{x_1}-(2\alpha_1 r_{x_1}z_{x_1})_{x_2}-(2\alpha_1 r_{x_1}z_{x_2})_{x_1}-\left(\alpha_1 z^2_{x_1}\right)_{x_1}-$$
$$-\left(4\alpha_1^2 r_{x_1}z_{x_1}\right)_{x_1}-\left(8\alpha_1^2 r_{x_1}r_{x_2}\right)_{x_1}-\left(4\alpha_1^2 r^2_{x_1}\right)_{x_2}-\left(4\alpha_1^3 r^2_{x_1}\right)_{x_1}\Big]. \tag{66}$$

З (66) одержимо рівняння для z і r (прирівняли вирази при похідних за змінною x_1):

$$z_t+2\alpha_1 r_t=-\Big[z_{x_1}z_{x_2}+r_{x_2}z_{x_2}+3\alpha_1 r^2_{x_2}+4\alpha_1 r_{x_2}z_{x_1}+2\alpha_1 r_{x_1}z_{x_2}+$$
$$+\alpha_1 z^2_{x_1}+4\alpha_1^2 r_{x_1}z_{x_1}+8\alpha_1^2 r_{x_1}r_{x_2}+4\alpha_1^3 r^2_{x_1}\Big], \tag{67}$$

і рівняння на r (прирівняли вирази при похідних за змінною x_2):

$$r_t=-\Big[r_{x_2}z_{x_1}+(1/2)r_{x_1}z_{x_2}+(3/2)r^2_{x_2}+4\alpha_1 r_{x_1}r_{x_2}+\alpha_1 r_{x_1}z_{x_1}+2\alpha_1^2 r^2_{x_1}\Big]. \tag{68}$$

Підставимо вираз (68) у (67) і одержимо рівняння для z:

$$z_t=-2\alpha_1 r_t-\Big[z_{x_1}z_{x_2}+r_{x_2}z_{x_2}+3\alpha_1 r^2_{x_2}+4\alpha_1 r_{x_2}z_{x_1}+2\alpha_1 r_{x_1}z_{x_2}+$$
$$+\alpha_1 z^2_{x_1}+4\alpha_1^2 r_{x_1}z_{x_1}+8\alpha_1^2 r_{x_1}r_{x_2}+4\alpha_1^3 r^2_{x_1}\Big]=$$
$$=-z_{x_1}z_{x_2}-r_{x_2}z_{x_2}+6\alpha_1 r_{x_2}z_{x_1}+3\alpha_1 r_{x_1}z_{x_2}+$$
$$+6\alpha_1 r^2_{x_2}+\alpha_1 z^2_{x_1}+6\alpha_1^2 r_{x_1}z_{x_1}+16\alpha_1^2 r_{x_1}r_{x_2}+8\alpha_1^3 r^2_{x_1}.$$

З урахуванням випадку 1 ($u=0,\ f_{1,x_2}\neq 0$) виразимо змінні $v,\ p$ у лівій і правій частинах (61) через $r,\ z$. З цією метою підставимо (55) у (61) і здобудемо вираз (виділяємо повні похідні)

$$v_t=-[-(r_{x_1})_t]=-[-(r_t)_{x_1}]=$$
$$=-\Big[vr_{x_2x_2}+2vz_{x_1x_2}+z_{x_2}v_{x_1}+r_{x_2}v_{x_2}+$$
$$+pr_{x_1x_2}-2\alpha_1 vp_{x_1}-2\alpha_1 vv_{x_2}-2\alpha_1 pv_{x_1}\Big]=$$
$$=-\Big[-(r_{x_1}r_{x_2})_{x_2}-(r_{x_1}z_{x_1})_{x_2}-(z_{x_2}r_{x_1})_{x_1}-\left(r^2_{x_2}\right)_{x_1}-$$
$$-\left(\alpha_1 r^2_{x_1}\right)_{x_2}-\left(2\alpha_1 r_{x_1}z_{x_1}\right)_{x_1}-\left(4\alpha_1 r_{x_1}r_{x_2}\right)_{x_1}-\left(4\alpha_1^2 r^2_{x_1}\right)_{x_1}\Big]. \tag{69}$$

З виразу (69) (прирівнюємо похідні при x_1) маємо рівняння для r:

$$r_t=-\Big[r_{x_1}z_{x_2}+r^2_{x_2}+2\alpha_1 r_{x_1}z_{x_1}+4\alpha_1 r_{x_1}r_{x_2}+4\alpha_1^2 r^2_{x_1}\Big].$$

Розглянемо *випадок 2* ($u\neq 0,\ f_{1,x_2}=0$). При цьому з рівняння (61) отримаємо співвідношення

$$v_t=(-r_{x_1})_t=-(r_t)_{x_1}=-\Big[vr_{x_2x_2}+2vz_{x_1x_2}+u_{x_2}+z_{x_2}v_{x_1}+r_{x_2}v_{x_2}+$$

$$+ pr_{x_1x_2} - 2\alpha_1 vp_{x_1} - 2\alpha_1 vv_{x_2} - 2\alpha_1 pv_{x_1} + \alpha_1 u_{x_1} =$$

$$= -(r_{x_1}r_{x_2})_{x_2} - (r_{x_1}z_{x_1})_{x_2} + (u)_{x_2} - (z_{x_2}r_{x_1})_{x_1} - \left(r_{x_2}^2\right)_{x_1} -$$

$$- \left(\alpha_1 r_{x_1}^2\right)_{x_2} - \left(2\alpha_1 r_{x_1}z_{x_1}\right)_{x_1} - \left(4\alpha_1 r_{x_1}r_{x_2}\right)_{x_1} - \left(4\alpha_1^2 r_{x_1}^2\right)_{x_1} + (\alpha_1 u)_{x_1}\Big],$$

з якого одержуємо рівняння на r:

$$r_t = -\Big[r_{x_1}z_{x_2} + r_{x_2}^2 + 2\alpha_1 r_{x_1}z_{x_1} + 4\alpha_1 r_{x_1}r_{x_2} + 4\alpha_1^2 r_{x_1}^2 - \alpha_1 u\Big]. \tag{70}$$

У рівнянні (60) виразимо $p,\ v$ через $r,\ z$ і здобудемо

$$u_t = -\Big[ur_{x_2x_2} + u_{x_1}z_{x_2} + u_{x_2}r_{x_2} + 2uz_{x_1x_2} -$$

$$- \alpha_1 uv_{x_2} - 2\alpha_1 up_{x_1} - \alpha_1 pu_{x_1} - \alpha_1 vu_{x_2}\Big] =$$

$$= -\Big[ur_{x_2x_2} + u_{x_1}z_{x_2} + u_{x_2}r_{x_2} + 2uz_{x_1x_2} + 5\alpha_1 ur_{x_1x_2} + 2\alpha_1 uz_{x_1x_1} +$$

$$+ \alpha_1 u_{x_1}z_{x_1} + 2\alpha_1 u_{x_1}r_{x_2} + \alpha_1 u_{x_2}r_{x_1} + 2\alpha_1^2 u_{x_1}r_{x_1} + 4\alpha_1^2 ur_{x_1x_1}\Big].$$

Прокомутуємо два векторні поля за формулою Лакса – Сато (71) (отримаємо два рівняння для r і z за еволюційним параметром y):

$$\frac{\partial \tilde{A}_{\nabla h_+^{(y)}}}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{A}_{\nabla h_+^{(t)}}}{\partial y} = \left[\tilde{A}_{\nabla h_+^{(y)}}, \tilde{A}_{\nabla h_+^{(t)}}\right], \tag{71}$$

де

$$\tilde{A}_{\nabla h_+^{(y)}} := \left\langle \nabla h_+^{(y)}(l), \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \alpha.\ \frac{\partial}{\partial x_1} + 1\,\frac{\partial}{\partial x_2}, \tag{72}$$

$$\tilde{A}_{\nabla h_+^{(t)}} := \left\langle \nabla h_+^{(t)}(l), \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \left(\lambda^0(z_{x_2} - \alpha_1 p) + \lambda\alpha_1\right)\frac{\partial}{\partial x_1} +$$

$$+ \left(\lambda^0(r_{x_2} - \alpha_1 v) + 1\lambda\right)\frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{73}$$

Підставимо (72), (73) у (71) і одержимо співвідношення

$$-\left\{\left[(z_{x_2})_y - \alpha_1(p)_y\right]\frac{\partial}{\partial x_1} + \left[(r_{x_2})_y - \alpha_1(v)_y\right]\frac{\partial}{\partial x_2}\right\} =$$

$$= \left[z_{x_2x_2} + 2\alpha_1 r_{x_2x_2} + 2\alpha_1 z_{x_1x_2} + \alpha_1^2 z_{x_1x_1} + 4\alpha_1^2 r_{x_1x_2} + 2\alpha_1^3 r_{x_1x_1}\right]\frac{\partial}{\partial x_1} +$$

$$+ \left[r_{x_2x_2} + 2\alpha_1 r_{x_1x_2} + \alpha_1^2 r_{x_1x_1}\right]\frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{74}$$

Прирівняємо в (74) вирази при $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ і $\dfrac{\partial}{\partial x_2}$, при цьому підставимо $p,\ v$ з (55) і виділимо повні похідні. Одержимо відповідно

$$\begin{aligned}-\big[(z_{x_2})_y+\alpha_1(-z_{x_1}-2r_{x_2}-2\alpha_1 r_{x_1})_y\big]&=\\ =\Big[z_{x_2x_2}+2\alpha_1 r_{x_2x_2}+2\alpha_1 z_{x_1x_2}+\alpha_1^2 z_{x_1x_1}+4\alpha_1^2 r_{x_1x_2}+2\alpha_1^3 r_{x_1x_1}\Big]&,\end{aligned} \tag{75}$$

$$-[(r_{x_2})_y-(\alpha_1 v)_y]=\big[r_{x_2x_2}+2\alpha_1 r_{x_1x_2}+\alpha_1^2 r_{x_1x_1}\big]. \tag{76}$$

У (75) виділимо повні похідні й отримаємо вираз

$$\begin{aligned}&(z_y+2\alpha_1 r_y)_{x_2}+\alpha_1(z_y+2\alpha_1 r_y)_{x_1}=\\ &=\big(-z_{x_2}-2\alpha_1 r_{x_2}-\alpha_1 z_{x_1}-2\alpha_1^2 r_{x_1}\big)_{x_2}+\alpha_1\big(-z_{x_2}-2\alpha_1 r_{x_2}-\alpha_1 z_{x_1}-2\alpha_1^2 r_{x_1}\big)_{x_1}.\end{aligned} \tag{77}$$

Прирівнявши похідні в (77) за змінними x_1 і x_2, одержимо два однакові рівняння вигляду

$$z_y+2\alpha_1 r_y=-z_{x_2}-2\alpha_1 r_{x_2}-\alpha_1 z_{x_1}-2\alpha_1^2 r_{x_1}. \tag{78}$$

Підставимо v з (55) у (76) і виділимо повні похідні за змінними x_1 і x_2:

$$-\big[(r_y)_{x_2}-\alpha_1(r_y)_{x_2}\big]=(r_{x_2})_{x_2}+(\alpha_1 r_{x_1})_{x_2}+(\alpha_1 r_{x_2})_{x_1}+\big(\alpha_1^2 r_{x_1}\big)_{x_1}. \tag{79}$$

Прирівнявши похідні в (79) за змінними x_1 і x_2, отримаємо два однакові рівняння вигляду

$$r_y=-r_{x_2}-\alpha_1 r_{x_1}. \tag{80}$$

Підставимо (80) у (78) і одержимо рівняння для z:

$$z_y=-2\alpha_1(-r_{x_2}-\alpha_1 r_{x_1})-z_{x_2}-2\alpha_1 r_{x_2}-\alpha_1 z_{x_1}-2\alpha_1^2 r_{x_1}=-z_{x_2}-\alpha_1 z_{x_1}.$$

З іншого боку, умова (71) еквівалентна спареній умові двох лінійних рівнянь [8]

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}+\tilde{A}_{\nabla h_+^{(y)}}\right)\psi_1=0,\qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}+\tilde{A}_{\nabla h_+^{(t)}}\right)\psi_2=0, \tag{81}$$

де функція $\psi=(\psi_1,\psi_2)^T\in\big(C^2\big(\mathbb{R}^2\times\mathbb{T}^2_{\mathbb{C}}\big);\mathbb{C}\big)$ для всіх $y,t\in\mathbb{R}$ і деякого $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

З першого рівняння (81) маємо рівняння для ψ_1 за еволюційним параметром y:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+\alpha_1\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}=0. \tag{82}$$

Розв'язок рівняння (82) шукаємо у формі

$$\psi_1\cong\sum_{j\geq 0}\psi_1^{(j)}\lambda^{-j},$$

і цей розв'язок має вигляд

$$\psi_1=y+x_1-(\alpha+1)x_2+C_3(\mathrm{const}). \tag{83}$$

З другого рівняння (81) маємо рівняння для ψ_2 за еволюційним параметром t:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} + (z_{x_2} - \alpha_1 p + \lambda \alpha_1)\,\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + (r_{x_2} - \alpha_1 v + \lambda)\,\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} = 0. \tag{84}$$

Підставимо $p,\ v$ із (55) у (84) і одержимо рівняння

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \left(z_{x_2} + \alpha_1 z_{x_1} + 2\alpha_1 r_{x_2} + 2\alpha_1^2 r_{x_1} + \lambda \alpha_1\right)\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + (r_{x_2} + \alpha_1 r_{x_1} + \lambda)\,\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} = 0. \tag{85}$$

Розв'язок рівняння (85) шукаємо у формі

$$\psi_2 \cong \sum_{j \geq 0} \psi_2^{(j)} \lambda^{(-j)} = \psi_2^{(0)} \lambda^0 + \psi_2^{(1)}\,\frac{1}{\lambda} + \psi_2^{(2)}\,\frac{1}{\lambda^2} + \dots\,. \tag{86}$$

Підставимо (86) у (85):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\,&\left[\psi_2^{(0)} \lambda^0 + \psi_2^{(1)}\,\frac{1}{\lambda} + \psi_2^{(2)}\,\frac{1}{\lambda^2} + \dots\right] + \\ &+ (z_{x_2} + \alpha_1 z_{x_1} + 2\alpha_1 r_{x_2} + 2\alpha_1 r_{x_2} + \lambda \alpha_1) \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\psi_2^{(0)} \lambda^0 + \psi_2^{(1)}\,\frac{1}{\lambda} + \psi_2^{(2)}\,\frac{1}{\lambda^2} + \dots\right] + \\ &+ (r_{x_2} + \alpha_1 r_{x_1} + \lambda)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\psi_2^{(0)} \lambda^0 + \psi_2^{(1)}\,\frac{1}{\lambda} + \psi_2^{(2)}\,\frac{1}{\lambda^2} + \dots\right] = 0. \end{aligned} \tag{87}$$

З (87) при λ^0 отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \psi_2^{(0)}}{\partial t} + \left(z_{x_2} + \alpha_1 z_{x_1} + 2\alpha_1 r_{x_2} + 2\alpha_1^2 r_{x_1}\right)\frac{\partial \psi_2^{(0)}}{\partial x_1} + \\ &\qquad + \alpha_1\,\frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial x_1} + (r_{x_2} + \alpha_1 r_{x_1})\,\frac{\partial \psi_2^{(0)}}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial x_2} = 0. \end{aligned} \tag{88}$$

З (87) при λ^1 одержимо рівняння

$$\alpha_1\,\frac{\partial \psi_2^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2^{(0)}}{\partial x_2} = 0,$$

розв'язок якого має вигляд

$$\psi_2^{(0)} = x_1 - \alpha_1 x_2 + C_4(\mathrm{const}). \tag{89}$$

Підставимо (89) у (88) і отримаємо рівняння для $\psi_2^{(1)}$:

$$\left(z_{x_2} + \alpha_1 z_{x_1} + 2\alpha_1 r_{x_2} + 2\alpha_1^2 r_{x_1}\right) \cdot 1 + \alpha_1\,\frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial x_1} + (r_{x_2} + \alpha_1 r_{x_1})(-\alpha_1) + \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial x_2} = 0, \tag{90}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1\,\frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2^{(1)}}{\partial x_2} &= -z_{x_2} - \alpha_1 z_{x_1} - 2\alpha_1 r_{x_2} - 2\alpha_1^2 r_{x_1} + (r_{x_2} + \alpha_1 r_{x_1})\alpha_1 = \\ &= -(z + \alpha_1 r)_{x_2} - \alpha_1 (z + \alpha_1 r)_{x_1}. \end{aligned}$$

Із рівняння (90) маємо розв'язок

$$\psi_2^{(1)} = -z - \alpha_1 r.$$

Отже, розв'язок рівняння (85) набуває вигляду

$$\psi_2 \cong \psi_2^{(0)} + \psi_2^{(1)} + \ldots = x_1 - \alpha_1 x_2 - z - \alpha_1 r + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{91}$$

що сформулюємо як таке твердження.

Твердження 2. *Нехай задано кореневий елемент (1) із сингулярністю $|\lambda| \to \infty$, для якого справедлива система диференціальних співвідношень (54), (55), (57), (59), (71) – (73). Тоді умова сумісності Лакса – Сато є еквівалентною збігові інваріантів векторних полів (82) і (84), частковими розв'язками яких є вирази (83) і (91) відповідно.*

На закінчення нашого аналізу вкажемо, що, як легко перевірити, для заданого кореневого елемента (1) умова існування нетривіальних інваріантів Казіміра не призводить до умови замкнености $d\tilde{l} = 0$ для відповідної диференціальної форми $\tilde{l} \in \Lambda(\mathbb{T}^2)$ в алгебрі Грасмана диференціальних форм на торі $\mathbb{T}^2$, яка часто виникає [14 – 16] при дослідженні бездисперсійних ієрархій інтегровних небесних рівнянь з частинними похідними.

3. Висновки. Побудовано бездисперсійні рівняння небесного типу. Розглянуто два випадки сингулярності кореневого елемента $\tilde{l}$. У випадку кореневого елемента $\tilde{l}$ із сингулярністю $|\lambda| \to 0$ виведено нові динамічні системи бездисперсійного типу і отримано їхні частинні розв'язки. Аналогічно одержано нові бездисперсійні динамічні системи у випадку, коли кореневий елемент задано із сингулярністю $|\lambda| \to \infty$. Відповідно отримано їхні частинні розв'язки. Показано, що побудовані векторні потоки є пуассоновими. Це дало можливість вивести відповідні небесні рівняння у вигляді комутативних векторних полів типу Лакса – Сато. Виведені небесні рівняння цілком інтегровні за Лаксом – Сато на просторово-двовимірному функціональному многовиді.

Література

1. I. F. Plebanski, *Some solutions of complex Einstein equation*, J. Math. Phys., **16**, Issue 12, 2395 – 2402 (1975).
2. L. M. Alonso, A. B. Shabat, *Hydrodynamic reductions and solutions of a universal hierarchy*, Theor. Math. Phys., **104**, 1073 – 1085 (2004).
3. D. Blackmore, O. E. Hentosh, A. K. Prykarpatski, *The novel Lie-algebraic approach to studying integrable heavenly type multi-dimensional dynamical systems*, J. Generalized Lie Theory Appl., **11**, 1000287 (2017).
4. M. Błaszak, B. Szablikowski, *Classical R-matrix theory of dispersionless: II. $(2+1)$-dimension theory*, J. Phys. A, **35**, 10345 (2002).
5. L. V. Bohdanov, V. S. Dryuma, S. V. Manakov, *Dunajski generalization of the second heavenly equation: dressing method and the hierarchy*, J. Phys. A, **40**, 14383 – 14393 (2007).
6. M. Dunajski, W. Kryński, *Einstein – Weyl geometry, dispersionless Hirota equation and Veronese webs*; arXiv:1301.0621.
7. O. E. Hentosh, Y. A. Prykarpatsky, D. Blackmore, A. K. Prykarpatski, *Lie-algebraic structure of Lax – Sato integrable heavenly equations and the Lagrange – d'Alembert principle*, J. Geom. Phys., **120**, 208 – 227 (2017).
8. O. E. Hentosh, Y. A. Prykarpatsky, A. Balinsky, A. K. Prykarpatski, *The dispersionless completely integrable heavenly type Hamiltonian flows and their differential-geometric structure*, Ann. Math. Phys., **2(1)**, 11 – 25 (2019); DOI: http://dx.doi.org/10.17352/amp.000006.
9. O. E. Hentosh, Ya. A. Prikarpatsky, D. Blackmore, A. K. Prykarpatski, *Dispersionless multi-dimensional integrable systems and related conformal structure generating equations of mathematical aphysics*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl., **079** (2019).

10. S. V. Manakov, P. M. Santini, *On the solution of the second heavenly and Pavlov equation*, J. Phys. A, **42**, 404013 (2009).
11. O. I. Morozov, A. Sergyeyev, *The four-dimensional Martinez – Alonso – Shabat equation: reductions, nonlocal symmetries, and a four-dimensional integrable generalization of the ABC equation*, J. Geom. Phys., **85**, 40 – 45 (2014).
12. M. Pavlov, *Kupershmidt hydrodynamic chains and lattices*, Int. Math. Res. Not., Art. ID 46987 (2006).
13. M. Pavlov, *Integrable hydrodynamic chains*, J. Math. Phys., **44**, Issue 9, 4134 – 4156 (2003).
14. Ya. A. Prykarpatsky, A. K. Prykarpatski, *The integrable heavenly type equations and their Lie-algebraic structure*, arXiv: 1612.07760 [nlin.SI].
15. Прикарпатський Я. А., Самойленко А. М., *Класична задача М. А. Буля, її розв'язки Пфайфера – Сато і класичний принцип Лагранжа – Даламбера для інтегровних нелінійних рівнянь небесного типу*, Укр. мат. журн., **69**, № 12, 1652 – 1689 (2017).
16. M. M. Prytula, O. E. Hentosh, Ya. A. Prykarpatskyy, *Differential-geometric structure and the Lax – Sato integrability of a class of dispersionless heavenly type equation*, Укр. мат. журн., **70**, № 2, 293 – 297 (2018).
17. B. Szablikowski, M. Błaszak, *Meromorphic Lax representations of* $(1+1)$*-dimensional multi-Hamiltonian dispersionless systems*, J. Math. Phys., **47**, № 9, 092701 (2006).

Одержано 17.02.21