УДК 517.929.2

ОБМЕЖЕНІ НА $\mathbb{Z}$ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ

М. Ф. Городній

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
вул. Володимирська, 64, 01033, Київ, Україна
e-mail: gorodnii@univ.kiev.ua

We obtain necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution bounded on $\mathbb{Z}$ of a numerical linear difference equation in the case where a jump of coefficients leads to a change in the order of the difference equation.

Отримано необхідні й достатні умови існування та єдиності обмеженого на $\mathbb{Z}$ розв'язку числового лінійного різницевого рівняння у випадку, коли стрибок коефіцієнтів призводить до зміни порядку різницевого рівняння.

1. Вступ. Нехай k, l — фіксовані натуральні числа такі, що $k \geq l$, $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $b_1, b_2, \ldots, b_l$ — фіксовані комплексні числа, $a_k \neq 0$, $b_l \neq 0$. Розглянемо різницеве рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} - a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \ldots - a_k x_{n-k+1} = y_n, & n \geq 1, \\ x_{n+1} - b_1 x_n - b_2 x_{n-1} - \ldots - b_l x_{n-l+1} = y_n, & n \leq 0, \end{cases} \tag{1}$$

у якому $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — задана, а $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — шукана послідовність комплексних чисел. Мета цієї статті — отримати необхідні й достатні умови для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $b_1, b_2, \ldots, b_l$, при виконанні яких справджується така умова.

Умова обмеженості. Для довільної обмеженої в $\mathbb{C}$ послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ у множині $\mathbb{C}$.

В [1, 2] доведено, що для лінійного різницевого рівняння першого порядку зі змінним операторним коефіцієнтом умова обмеженості еквівалентна умові експоненціальної дихотомії. Для лінійного різницевого рівняння першого порядку з кусково-сталими операторними коефіцієнтами більш зручні для застосувань необхідні й достатні умови для виконання умови обмеженості отримано в [3 – 5], а для різницевого рівняння другого порядку — в [6]. Про дослідження задач щодо існування, зображення й властивостей обмежених розв'язків лінійних різницевих рівнянь див., наприклад, [5, 7 – 11] та наведені там посилання.

2. Допоміжні твердження. Розглянемо лінійні оператори A, B, що діють із $\mathbb{C}^k$ в $\mathbb{C}^k$ і задані формулами

$$A\bar{x} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \\ \ldots \\ x^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$B\bar{x} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_l & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \\ \ldots \\ x^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ x^{(3)} \\ \ldots \\ x^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^k.$$

У подальшому використовуються такі твердження.

Лема 1. *Для різницевого рівняння (1) умова обмеженості виконується тоді й тільки тоді, коли вона виконується у просторі $\mathbb{C}^k$ для різницевого рівняння*

$$\begin{cases} \bar{x}_{n+1} = A\bar{x}_n + \bar{y}_n, & n \geq 1, \\ \bar{x}_{n+1} = B\bar{x}_n + \bar{y}_n, & n \leq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Доведення. *Достатність.* Нехай умова обмеженості виконується для рівняння (2). Зафіксуємо обмежену послідовність $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$. Покладемо $\bar{y}_n = (y_n, 0, \ldots, 0)^t \in \mathbb{C}^k$, $n \in \mathbb{Z}$. Нехай

$$\left\{ \bar{x}_n = \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(k)} \right)^t, \; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

— відповідний до $\{\bar{y}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ єдиний обмежений розв'язок різницевого рівняння (2). Записавши для цих послідовностей рівності (2) покоординатно, одержимо

$$\forall n \geq 1\colon \;\; x_{n+1}^{(1)} = a_1 x_n^{(1)} + a_2 x_n^{(2)} + \ldots + a_k x_n^{(k)} + y_n,$$

$$\forall n \leq 0\colon \;\; x_{n+1}^{(1)} = b_1 x_n^{(1)} + b_2 x_n^{(2)} + \ldots + b_l x_n^{(l)} + y_n,$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}\colon \;\; x_{n+1}^{(2)} = x_n^{(1)}, x_{n+1}^{(3)} = x_n^{(2)}, \ldots, x_{n+1}^{(k)} = x_n^{(k-1)}.$$

Звідси випливає, що послідовність $\left\{ x_n^{(1)}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ є відповідним до $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ обмеженим розв'язком рівняння (1).

Якщо, від супротивного, цей обмежений розв'язок не єдиний, то відповідне до (1) однорідне різницеве рівняння має деякий ненульовий обмежений розв'язок $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Але тоді обмежена послідовність $\left\{ \bar{u}_n = (u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-k+1})^t, \; n \in \mathbb{Z} \right\}$ буде ненульовим обмеженим розв'язком однорідного різницевого рівняння, відповідного до (2). Суперечність.

Необхідність. Нехай тепер умова обмеженості виконується для рівняння (1). Зафіксуємо обмежену послідовність $\left\{ \bar{y}_n = \left(y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \ldots, y_n^{(k)} \right)^t, \; n \in \mathbb{Z} \right\}$. Записавши рівності (2) покоординатно, отримаємо

$$\begin{gathered} \forall n \in \mathbb{Z}\colon x_n^{(2)} = x_{n-1}^{(1)} + y_{n-1}^{(2)}, \qquad x_n^{(3)} = x_{n-2}^{(1)} + y_{n-2}^{(2)} + y_{n-1}^{(3)}, \ldots, \\ x_n^{(k)} = x_{n-k+1}^{(1)} + y_{n-k+1}^{(2)} + y_{n-k+2}^{(3)} + \ldots + y_{n-1}^{(k)}, \end{gathered} \tag{3}$$

а також

$$x_{n+1}^{(1)} = a_1 x_n^{(1)} + a_2 x_{n-1}^{(1)} + \ldots + a_k x_{n-k+1}^{(1)} + y_n^{(1)} +$$

$$+ a_2 y_{n-1}^{(2)} + a_3 \left(y_{n-2}^{(2)} + y_{n-1}^{(3)} \right) + \ldots$$

$$\ldots + a_k \left(y_{n-k+1}^{(2)} + y_{n-k+2}^{(3)} + \ldots + y_{n-1}^{(k)} \right), \quad n \geq 1, \tag{4}$$

$$x_{n+1}^{(1)} = b_1 x_n^{(1)} + b_2 x_{n-1}^{(1)} + \ldots + b_l x_{n-l+1}^{(1)} + y_n^{(1)} +$$

$$+ b_2 y_{n-1}^{(2)} + b_3 \left(y_{n-2}^{(2)} + y_{n-1}^{(3)} \right) + \ldots$$

$$\ldots + b_l \left(y_{n-l+1}^{(2)} + y_{n-l+2}^{(3)} + \ldots + y_{n-1}^{(l)} \right), \quad n \leq 0.$$

Оскільки для (1) виконується умова обмеженості, то (4) має обмежений розв'язок $\left\{ x_n^{(1)}, n \in \in \mathbb{Z} \right\}$. За допомогою цього розв'язку й рівностей (3) шукаємо інші координати обмеженого розв'язку $\{\bar{x}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ різницевого рівняння (2), що відповідає обмеженій послідовності $\{\bar{y}_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Якщо, від супротивного, одержаний обмежений розв'язок не єдиний, то відповідне до (2) однорідне різницеве рівняння має деякий ненульовий обмежений розв'язок $\left\{ \bar{u}_n = = \left(u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \ldots, u_n^{(k)} \right)^t, \, n \in \mathbb{Z} \right\}$. Але тоді, скориставшись покоординатними рівностями для відповідного до (2) однорідного рівняння, можна перевірити, що обмежена послідовність $\left\{ u_n^{(1)}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ є ненульовим обмеженим розв'язком однорідного різницевого рівняння, відповідного до (1). Це суперечить умові обмеженості для рівняння (1).

Лему 1 доведено.

Відомо, що власними числами оператора A є корені многочлена

$$g(\lambda) = \lambda^k - a_1 \lambda^{k-1} - \ldots - a_k \tag{5}$$

і тільки вони.

Лема 2. *Нехай $\lambda = z$ — корінь многочлена $g(\lambda)$ кратності m. Тоді для векторів*

$$\bar{x}(z, 0) = \left(z^{k-1}, z^{k-2}, \ldots, z, 1 \right)^t,$$

$$\bar{x}(z, j) = \left(C_{k-1}^j z^{k-j-1}, C_{k-2}^j z^{k-j-2}, \ldots, C_{j+1}^j z, C_j^j, 0, \ldots, 0 \right)^t, \quad 1 \leq j \leq m-1,$$

виконуються рівності

$$(A - zI)\bar{x}(z, 0) = \bar{0}, \qquad (A - zI)\bar{x}(z, j) = \bar{x}(z, j-1), \quad 1 \leq j \leq m-1, \tag{6}$$

де через I, $\bar{0}$ позначені одиничний оператор і нульовий елемент у просторі $\mathbb{C}^k$, а через C_m^j — відповідний біноміальний коефіцієнт.

Доведення. Рівності (6) перевіряються прямим обчисленням, якщо врахувати, що $\lambda = = z$ є коренем похідних $g'(\lambda), \ldots, g^{(m-1)}(\lambda)$ многочлена $g(\lambda)$, визначеного за допомогою формули (5), а також тотожність $C_m^j - C_{m-1}^j = C_{m-1}^{j-1}$ для біноміальних коефіцієнтів.

Лему 2 доведено.

Наслідком леми 2 є таке твердження.

Лема 3. *Кожному кореню многочлена $g(\lambda)$ відповідає рівно одна клітина Жордана у жордановій нормальній формі матриці оператора A, причому її порядок дорівнює кратності цього кореня.*

Нехай V — такий лінійний оператор в $\mathbb{C}^k$, що його спектр $\sigma(V)$ не перетинається з одиничним колом $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Визначимо простори $\mathbb{C}^k_-(V)$, $\mathbb{C}^k_+(V)$ за таким правилом. Якщо $\sigma(V)$ лежить усередині кола S, то $\mathbb{C}^k_-(V) = \mathbb{C}^k$, $\mathbb{C}^k_+(V) = \{\bar{0}\}$. Якщо $\sigma(V)$ лежить зовні S, то $\mathbb{C}^k_-(V) = \{\bar{0}\}$, $\mathbb{C}^k_+(V) = \mathbb{C}^k$. Якщо ж $\sigma(V)$ має непорожні перетини з множинами $S_- = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ і $S_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$, то зафіксуємо такий базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_\alpha, \bar{f}_{\alpha+1}, \bar{f}_{\alpha+2}, \ldots, \bar{f}_k$ у просторі $\mathbb{C}^k$, в якому матриця оператора V має жорданову нормальну форму і $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_\alpha$ відповідають клітини Жордана з власними числами із S_-, а $\bar{f}_{\alpha+1}, \bar{f}_{\alpha+2}, \ldots, \bar{f}_k$ — із S_+. Тоді $\mathbb{C}^k_-(V)$, $\mathbb{C}^k_+(V)$ — лінійні оболонки векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_\alpha$ та $\bar{f}_{\alpha+1}, \bar{f}_{\alpha+2}, \ldots, \bar{f}_k$ відповідно.

Внаслідок теореми 1 роботи [3] справджується таке твердження.

Теорема 1. *Для різницевого рівняння (2) умова обмеженості виконується тоді й тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

i$_1$) $\sigma(A) \cap S = \varnothing$, $\sigma(B) \cap S = \varnothing$,

i$_2$) $\mathbb{C}^k = \mathbb{C}^k_-(A) \dot{+} \mathbb{C}^k_+(B)$, *тобто* $\mathbb{C}^k$ *є прямою сумою просторів* $\mathbb{C}^k_-(A)$ *та* $\mathbb{C}^k_+(B)$.

3. Основний результат. Наступна терема, яка є основним результатом цієї статті, свідчить, що для відповіді на питання про виконання умови обмеженості для рівняння (1) досить мати інформацію про корені многочленів $g(\lambda)$ і $h(\lambda) = \lambda^l - b_1\lambda^{l-1} - \ldots - b_l$.

Теорема 2. *Для того щоб різницеве рівняння (1) задовольняло умову обмеженості, необхідно й достатньо, щоб виконувалися такі умови:*

j$_1$) жоден із коренів многочленів $g(\lambda)$ *та* $h(\lambda)$ *не лежить на колі* S;

j$_2$) якщо $t_1, t_2, \ldots, t_\beta$ *— набір усіх коренів* $g(\lambda)$, *що лежать всередині* S *і* p_j *— кратність кореня* t_j, $1 \le j \le \beta$, *а* $s_1, s_2, \ldots, s_\gamma$ *— набір усіх коренів* $h(\lambda)$, *що лежать зовні* S, *і* q_j *— кратність кореня* s_j, $1 \le j \le \gamma$, *то*

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_\beta + q_1 + q_2 + \ldots + q_\gamma = k. \tag{7}$$

Доведення. Внаслідок леми 1 досить перевірити, що умови j$_1$), j$_2$) виконуються тоді й тільки тоді, коли виконуються умови i$_1$), i$_2$) теореми 1.

Оскільки власні числа операторів A, B співпадають відповідно з коренями многочленів $g(\lambda)$ і $\lambda^{k-l}h(\lambda)$, то умови i$_1$) та j$_1$) рівносильні.

З урахуванням лем 2, 3 умова i$_2$) теореми 1 виконується тоді й тільки тоді, коли справджується рівність (7) і набір власних і приєднаних векторів описаного в лемі 2 вигляду, які задають відповідні до коренів $t_1, t_2, \ldots, t_\beta$ та $s_1, s_2, \ldots, s_\gamma$ клітини Жордана, утворює базис у $\mathbb{C}^k$. Але при виконанні (7) за допомогою саме цього набору векторів зводиться до жорданової нормальної форми матриця аналогічного до A оператора, власні числа якого є коренями многочлена

$$r(\lambda) = (\lambda - t_1)^{p_1} \ldots (\lambda - t_\beta)^{p_\beta} (\lambda - s_1)^{q_1} \ldots (\lambda - s_\gamma)^{q_\gamma}$$

замість многочлена $g(\lambda)$. Тому цей набір векторів задає базис у $\mathbb{C}^k$.

Теорему 2 доведено.

Зауваження. Твердження теореми 2 правильне й у випадку, коли $l > k$.

Справді, при $l > k$ у лемі 1 і теоремі 1 потрібно переходити до простору $\mathbb{C}^l$ замість $\mathbb{C}^k$. Про цьому власні числа оператора A будуть коренями многочлена $\lambda^{l-k}g(\lambda)$, у якого окрім $t_1, t_2, \ldots, t_\beta$ всередині кола S лежить корінь $\lambda = 0$ кратності $l - k$. Тому рівність (7) у теоремі 2 матиме вигляд $(l - k) + p_1 + p_2 + \ldots + p_\beta + q_1 + q_2 + \ldots + q_\gamma = l$.

4. Різницеве рівняння з випадковою правою частиною. Нехай (Ω, F, P) — повний імовірнісний простір. Зафіксуємо $p \in [1, \infty)$ і позначимо через L_p банахів простір усіх класів еквівалентних, інтегровних з p-м степенем випадкових величин $\xi\colon \Omega \to \mathbb{C}$ з нормою $\|\xi\|_p = \left(E|\xi|^p\right)^{1/p}$. Як звичайно, послідовність $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset L_p$ будемо називати обмеженою у середньому порядку p, якщо $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|\xi\|_p < \infty$.

Розглянемо різницеве рівняння

$$\begin{cases} \xi_{n+1} - a_1\xi_n - a_2\xi_{n-1} - \ldots - a_k\xi_{n-k+1} = \eta_n, & n \geq 1, \\ \xi_{n+1} - b_1\xi_n - b_2\xi_{n-1} - \ldots - b_l\xi_{n-l+1} = \eta_n, & n \leq 0, \end{cases} \tag{8}$$

у якому $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — задана, $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — шукана послідовність елементів простору L_p.

У подальшому досліджується питання про виконання такої умови.

Умова p-обмеженості. Для довільної обмеженої в середньому порядку p послідовності $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (8) має єдиний обмежений в середньому порядку p розв'язок $\{\xi_n, n \in \in \mathbb{Z}\}$.

Справджується такий стохастичний аналог теореми 2.

Теорема 3. *Для того щоб різницеве рівняння (8) задовольняло умову p-обмеженості, необхідно й достатньо, щоб виконувалися умови j_1), j_2) теореми 2.*

Доведення. *Достатність.* Тим же способом, що й при доведенні леми 1, перевіряємо, що умова p-обмеженості для рівняння (8) виконується тоді й тільки тоді, коли різницеве рівняння

$$\begin{cases} \bar{\xi}_{n+1} = A\bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n, & n \geq 1, \\ \bar{\xi}_{n+1} = B\bar{\xi}_n + \bar{\eta}_n, & n \leq 0. \end{cases} \tag{9}$$

має для кожної обмеженої в середньому порядку p послідовності $\left\{\bar{\eta}_n\colon \Omega \to \mathbb{C}^k, n \in \mathbb{Z}\right\}$ єдиний обмежений в середньому порядку p розв'язок $\left\{\bar{\xi}_n\colon \Omega \to \mathbb{C}^k, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Оскільки умови j_1, j_2 еквівалентні умовам i_1), i_2) теореми 1, то, застосувавши теорему 2 з [12] до рівняння (9), робимо висновок, що рівняння (8) задовольняє умову p-обмеженості.

Для доведення необхідності досить перевірити, що внаслідок умови p-обмеженості для рівняння (8) виконується умова обмеженості для детермінованого різницевого рівняння (1).

Зафіксуємо обмежену послідовність $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$. Нехай $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — відповідний до обмеженої в середньому порядку p послідовності $\{\eta_n \equiv y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ обмежений в середньому порядку p розв'язок рівняння (8). Оскільки для кожного $n \in \mathbb{Z}$ існує $E\xi_n$ і $|E\xi_n| \leq \|\xi_n\|_p$, то, взявши математичне сподівання від кожної з рівностей (8), отримаємо, що (1) має відповідний до $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ обмежений розв'язок $\{x_n = E\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Якщо, від супротивного, цей розв'язок не єдиний, то відповідне до (1) однорідне різницеве рівняння має деякий ненульовий обмежений розв'язок $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Але тоді відповідне до (8) однорідне рівняння має обмежений в середньому порядку p розв'язок $\{\xi_n \equiv u_n, n \in \mathbb{Z}\}$, що суперечить умові p-обмеженості.

Теорему 3 доведено.

Література

1. В. Ю. Слюсарчук, *Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем*, Укр. мат. журн., **35**, № 1, 109 – 115 (1983).

2. Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, Москва (1985).
3. М. Ф. Городній, І. В. Гончар, *Про обмежені розв'язки різницевого рівняння зі змінним операторним коефіцієнтом*, Доп. НАН України, **12**, 12 – 16 (2016).
4. В. Ю. Слюсарчук, *Необхідні і достатні умови оборотності кусковоавтономних різницевих операторів у просторі обмежених двосторонніх послідовностей*, Нелін. коливання, **23**, № 1, 90 – 111 (2020).
5. В. Ю. Слюсарчук, *Експоненціально дихотомічні різницеві рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами*, Укр. мат. журн., **72**, № 6, 822 – 841 (2020).
6. М. Ф. Городній, В. П. Кравець, *Про обмежені розв'язки одного різницевого рівняння другого порядку*, Нелін. коливання, **22**, № 2, 196 – 201 (2019).
7. А. Я. Дороговцев, *Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем*, Вища шк., Киев (1992).
8. М. Ф. Городній, *Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве*, Укр. мат. журн., **43**, № 1, 42 – 46 (1991).
9. А. Г. Баскаков, *Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов*, Мат. заметки, **67**, вып. 6, 816 – 827 (2000).
10. В. Ю. Слюсарчук, *Зображення обмежених розв'язків лінійних дискретних рівнянь*, Нелін. коливання, **22**, № 2, 262 – 279 (2019).
11. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems*, Utrecht, VSP, Boston (2004).
12. М. Ф. Городній, І. В. Гончар, *Обмежені у середньому порядку р розв'язки різницевого рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта*, Теорія ймовірностей та мат. статистика, вип. 2(101), 93 – 97 (2019).

Одержано 20.01.21