УДК 517.9

НЕЛІНІЙНА РІЗНИЦЕВО-АЛГЕБРАЇЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА У ВИПАДКУ ПАРАМЕТРИЧНОГО РЕЗОНАНСУ*

С. М. Чуйко, О. В. Чуйко, Я. В. Калініченко

Донбас. держ. пед. ун-т
вул. Генерала Батюка, 19, Слов'янськ, 84116, Україна
e-mail: chujko-slav@ukr.net
kalinichenkoddpu@ukr.net

We determine necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of the nonlinear boundary-value problem for the system of difference-algebraic equations in the case of parametric resonance. We construct the convergent iterative algorithm for finding approximations of solutions of the nonlinear boundary-value problem for the system of difference-algebraic equations in the case of parametric resonance. As an example of application of the constructed iterative scheme, we obtain approximations of solutions of the two-point boundary-value problem for a system of Mathieu-type difference-algebraic equations with parametric perturbation. For the control of accuracy of the obtained approximations of solutions of the two-point boundary-value problem for a system of Mathieu-type difference-algebraic equations with parametric perturbation, discrepancies in the original equation are used.

Одержано необхідні й достатні умови існування розв'язків нелінійної крайової задачі для системи різницево-алгебраїчних рівнянь у випадку параметричного резонансу. Побудовано збіжну ітераційну схему для знаходження наближень до розв'язків нелінійної крайової задачі для системи різницево-алгебраїчних рівнянь у випадку параметричного резонансу. Як приклад застосування побудованої ітераційної схеми отримано наближення до розв'язків двоточкової крайової задачі для системи різницево-алгебраїчних рівнянь типу Матьє з параметричним збуренням. Для контролю точності здобутих наближень до розв'язків двоточкової крайової задачі для системи різницево-алгебраїчних рівнянь типу Матьє з параметричним збуренням використовуються нев'язки у вихідному рівнянні.

Актуальність вивчення періодичних крайових задач у випадку параметричного резонансу пов'язана з численними додатками в електроніці [1, 2], теорії плазми [3], нелінійній оптиці, механіці [4] та верстатобудуванні [5]. Традиційне вивчення крайових задач у випадку параметричного резонансу пов'язане з дослідженням, насамперед, питань стійкості [6, 7]. Як правило, при вивченні крайових задач диференціальне рівняння вважалося фіксованим.

Таким чином, основною відмінністю цієї статті є вивчення умов розв'язності різницево-алгебраїчних крайових задач у випадку параметричного резонансу залежно від власної функції різницево-алгебраїчного рівняння. Використовувана класифікація різницево-алгебраїчних крайових задач у випадку параметричного резонансу залежно від простоти або кратності рівняння для породжуючих констант істотно відрізняється від аналогічної класифікації періодичних задач у випадку параметричного резонансу [6, 7] і відповідає загальній класифікації нетерових крайових задач [8, 9].

1. Постановка задачі. Досліджуємо задачу про знаходження обмежених розв'язків [9]

$$z(k,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \Omega := \{0,1,2,\ldots,\omega\}, \quad z(k,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

* Роботу виконано за фінансової підтримки Міністерства освіти і науки України, р/н 0118U003390.

і власної функції $h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$ нелінійної крайової задачі для системи різницево-алгебраїчних рівнянь

$$A(k)z(k+1,\varepsilon) = B(k)z(k,\varepsilon) + f(k) + \varepsilon Z(z(k,\varepsilon), h(\varepsilon), k, \varepsilon), \tag{1}$$

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon\, J(z(\cdot,\varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon) \tag{2}$$

у малому околі розв'язку породжуючої нетерової $(p \neq n)$ крайової задачі

$$A(k)z_0(k+1) = B(k)z_0(k) + f(k), \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^p, \tag{3}$$

де $A(k), B(k) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — взагалі кажучи, прямокутні $(m \neq n)$ обмежені матриці; якщо ж матриця $A(k)$ квадратна $(m = n)$, то припускаємо, що вона вироджена; $f(k)$ — дійсний обмежений вектор-стовпець, нелінійна функція $Z(z(k,\varepsilon), h(\varepsilon), k, \varepsilon)$ неперервно-диференційовна за невідомими $z(k,\varepsilon)$ і $h(\varepsilon)$ у малому околі розв'язку породжуючої задачі та у малому околі точки $h_0 := h(0) \in \mathbb{R}^q$ і обмежена за незалежною змінною, а також неперервна за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot,\varepsilon) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ — лінійний обмежений векторний функціонал, визначений на просторі обмежених функцій, $J(z(\cdot,\varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon)$ — нелінійний обмежений векторний функціонал, неперервно-диференційовний (по Фреше) за невідомими $z(k,\varepsilon)$ та $h(\varepsilon)$ у малому околі розв'язку породжуючої задачі й у малому околі точки $h_0 := h(0) \in \mathbb{R}^q$, а також неперервний за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$.

Поставлена задача (1) є узагальненням задачі, розв'язаної О. А. Бойчуком [9], а також аналогом нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу [7, 10, 11]. За умови [12]

$$P_{A^*(k)} = 0, \quad k \in \Omega, \tag{4}$$

систему (3) можна привести до традиційної системи різницевих рівнянь [9]

$$z(k+1) = A^+(k)B(k)z(k) + \mathfrak{F}_0(k, \nu_0(k)), \tag{5}$$

де

$$\operatorname{rank} A(k) := m < n.$$

Крім того,

$$\mathfrak{F}_0(k, \nu_0(k)) := A^+(k)f(k) + P_{A_{\rho_0}(k)}\nu_0(k),$$

$A^+(k)$ — псевдообернена (за Муром – Пенроузом) матриця, $P_{A^*(k)}$ — матриця-ортопроектор

$$P_{A^*(k)} \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(A^*(k)),$$

$P_{A_{\rho_0}(k)}$ — $(n \times \rho_0)$-вимірна матриця, утворена з ρ_0 лінійно незалежних стовпців $(n \times n)$–вимірної матриці-ортопроектора [8]:

$$P_{A(k)} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(A(k)),$$

$\nu_0(k) \in \mathbb{R}^{\rho_0}$ — довільна обмежена вектор-функція. Загальний розв'язок задачі Коші

$$z(0) = c \in \mathbb{R}^n$$

для однорідної частини системи різницевих рівнянь (5)

$$z(k) = X_0(k)\,c, \quad c \in \mathbb{R}^n,$$

визначає нормальна фундаментальна матриця

$$X_0(k+1) = A^+(k)B(k)X_0(k), \quad X_0(0) = I_n,$$

яка зображується у вигляді

$$X_0(k) = \prod_{j=1}^{k-1} A^+(j)B(j).$$

За умови (4) ця матриця, взагалі кажучи, вироджена:

$$\det X_0(k) = 0,$$

тому для побудови загального розв'язку задачі Коші $z(0) = c \in \mathbb{R}^n$ для системи (5) схему [9], взагалі кажучи, не можна застосувати. Разом із тим оператор Гріна задачі Коші для системи (5) можна знайти таким чином [12]:

$$K[\mathfrak{F}_0(j,\nu_0(j))](0) := 0, \qquad K[\mathfrak{F}_0(j,\nu_0(j))](1) := \mathfrak{F}_0(0,\nu_0(0)), \ldots,$$

$$K[\mathfrak{F}_0(j,\nu_0(j))](k+1) := A^+(k)B(k)K[\mathfrak{F}_0(j,\nu_0(j))](k) + \mathfrak{F}_0(k,\nu_0(k)), \ldots.$$

Отже, поставлена задача для системи (5) за умови (4) має розв'язок

$$z(k,c) = X_0(k)\,c + K[f(j),\nu_0(j)](k), \quad c \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

де

$$K[f(j),\nu_0(j)](k) := K[\mathfrak{F}_0(j,\nu_0(j))](k)$$

— оператор Гріна задачі Коші для системи (3). По аналогії з класифікацією диференціально-алгебраїчних рівнянь [13 – 15] за умови (4) будемо казати, що система лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь (3) є невиродженою. Зауважимо, що на відміну від традиційної системи лінійних різницевих рівнянь розв'язок системи лінійних різницево-алгебраїчних рівнянь (3) за умови (4) залежить від довільної обмеженої вектор-функції $\nu_0(k) \in \mathbb{R}^{\rho_0}$. Припустимо для початку цю функцію фіксованою. Позначимо матрицю $Q_0 := \ell X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{p\times n}$, а також

$$P_{Q_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q_0), \qquad P_{Q_0^*} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{N}\big(Q_0^*\big)$$

— матриці-ортопроектори [9]. Підставляючи загальний розв'язок задачі Коші $z(0) = c$ для системи (3) у крайову умову (3), приходимо до рівняння, розв'язного тоді й тільки тоді, коли

$$P_{Q_0^*}\Big\{\alpha - \ell K\big[f(j),\nu_0(j)\big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{7}$$

Задача про знаходження обмежених розв'язків лінійної нетерової $(n \neq p)$ крайової задачі для системи (3) за умов (4) і (7) має розв'язок

$$z(k,c_r) = X_r(k)\,c_r + G[f(j),\nu_0(j),\alpha](k), \quad k \in \Omega, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

де $X_r(k) := X_0(k)P_{Q_r}$ — фундаментальна матриця розв'язків однорідної частини крайової задачі (3) і

$$G[f(j),\nu_0(j),\alpha](k) := K\big[\mathfrak{F}_0(j,\nu_0(j))\big](k) + X_0(k)Q_0^+\big\{\alpha - \ell K[f(j),\nu_0(j)](\cdot)\big\}$$

— узагальнений оператор Гріна лінійної нетерової крайової задачі для системи (3), $Q_0^+ \in \in \mathbb{R}^{n\times p}$ — псевдообернена за Муром – Пенроузом матриця [9]; матриця $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ утворена з r лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{Q_0} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

2. Необхідна умова розв'язності. За умов (4) і (7) розв'язок нелінійної крайової задачі (1), (2) шукаємо в малому околі розв'язку породжуючої крайової задачі (3):

$$z(k,\varepsilon) = z_0(k,c_r) + x(k,\varepsilon), \quad h(\varepsilon) = h_0 + \mu(\varepsilon).$$

Для знаходження відхилень

$$x(k,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \Omega, \qquad x(k,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \quad \mu(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

отримуємо крайову задачу

$$\begin{aligned} x(k+1,\varepsilon) = A^+(k)B(k)x(k,\varepsilon) + \\ + \varepsilon\, A^+(k)Z(z_0(k,c_0) + x(k,\varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), k, \varepsilon), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\ell x(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\, J(z_0(\cdot,c_r) + x(\cdot,\varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), \varepsilon). \tag{9}$$

Позначимо вектор

$$\check{c}_0 := \begin{bmatrix} c_r^* \\ h_0^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r+q}.$$

За умов (4) і (7) крайова задача (1), (2) розв'язна тоді й тільки тоді, коли

$$\begin{aligned} P_{Q_d^*}\Big\{ J(z_0(\cdot,c_r) + x(\cdot,\varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), \varepsilon) - \\ - \ell K\left[Z(z_0\big(k,c_r^*\big) + x(k,\varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), k, \varepsilon)\right](\cdot)\Big\} = 0. \end{aligned}$$

Таким чином, доведено таку лему.

Лема. *За умов (4) і (7) розв'язок породжуючої крайової задачі (3) має вигляд*

$$z_0(k,c_r) = X_r(k)\,c_r + G[f(j),\nu_0(j),\alpha](k), \quad k \in \Omega, \quad c_r \in \mathbb{R}^r. \tag{10}$$

Припустимо, що в малому околі породжуючого розв'язку $z_0\big(k,c_r^*\big)$ крайова задача (1), (2) має розв'язок

$$z(k,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \Omega, \quad z(k,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \quad z(k,0) = z_0\big(k,c_r^*\big),$$

при цьому в малому околі константи h_0^* існує власна функція $h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$. Тоді виконується рівність

$$P_{Q_d^*}\Big\{ J(z_0\big(\cdot,c_r^*\big), h_0^*, 0) - \ell K\big[Z\big(z_0\big(k,c_r^*\big), h_0^*, k, 0\big)\big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{11}$$

Рівняння (11) за аналогією з нетеровими крайовими задачами в критичному випадку [8] будемо називати рівнянням для породжуючих констант задачі про знаходження розв'язку і власної функції крайової задачі (1), (2). Корені рівняння для породжуючих констант визначають породжуючий розв'язок $z_0\big(k, c_r^*\big)$, у малому околі якого можуть існувати шукані розв'язки вихідної крайової задачі (1), (2), а також початкове значення власної функції h_0^*. Якщо ж рівняння (11) не має дійсних коренів, то вихідна задача про знаходження розв'язку крайової задачі (1), (2) і власної функції не має шуканих розв'язків.

3. Достатня умова розв'язності. Фіксуючи один із розв'язків

$$\check{c}_0 \in \mathbb{R}^{r+q}$$

рівняння (11), приходимо до задачі про знаходження розв'язку крайової задачі (1), (2)

$$z(k,\varepsilon) = z_0\big(k, c_r^*\big) + x(k,\varepsilon)$$

в околі породжуючого розв'язку $z_0\big(k, c_r^*\big)$, а також власної функції

$$h(\varepsilon) := h_0^* + \mu(\varepsilon), \quad \mu(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

у малому околі точки h_0^*. У зазначеному околі має місце наступне розвинення

$$\begin{aligned} Z\left(z_0\big(k, c_r^*\big) + x(k,\varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), k, \varepsilon\right) = \\ = Z\left(z_0\big(k, c_r^*\big), h_0^*, k, 0\right) + \mathcal{A}_1\big(z_0\big(k, c_r^*\big), h_0^*, k\big) x(k,\varepsilon) + \\ + \mathcal{A}_2\big(z_0\big(k, c_r^*\big), h_0^*, k\big)\mu(\varepsilon) + \varepsilon\, \mathcal{A}_3\big(z_0\big(k, c_r^*\big), h_0^*, k\big) + \\ + \mathcal{R}\big(z_0\big(k, c_r^*\big) + x(k,\varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), k, \varepsilon\big), \end{aligned}$$

де

$$\mathcal{A}_1\big(z_0\big(k, c_r^*\big), h_0^*, k\big) := \frac{\partial Z(z(k,\varepsilon), h(\varepsilon), k, \varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z(k,\varepsilon)=z_0(k,c_r^*),\\ h(\varepsilon)=h_0^*,\\ \varepsilon=0}},$$

$$\mathcal{A}_2\big(z_0\big(k, c_r^*\big), h_0^*, k\big) := \frac{\partial Z(z(k,\varepsilon), h(\varepsilon), k, \varepsilon)}{\partial h}\Bigg|_{\substack{z(k,\varepsilon)=z_0(k,c_r^*),\\ h(\varepsilon)=h_0^*,\\ \varepsilon=0}},$$

$$\mathcal{A}_3\big(z_0\big(k, c_r^*\big), h_0^*, k\big) := \frac{\partial Z(z(k,\varepsilon), h(\varepsilon), k, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z(k,\varepsilon)=z_0(k,c_r^*),\\ h(\varepsilon)=h_0^*,\\ \varepsilon=0}}.$$

Залишок

$$\mathcal{R}\left(z_0\big(k, c_r^*\big) + x(k,\varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), k, \varepsilon\right)$$

розвинення функції

$$Z\left(z_0\big(k, c_r^*\big) + x(k,\varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), k, \varepsilon\right)$$

більш високого порядку малості за $x(k,\varepsilon),\ \mu(\varepsilon)$ і ε в околі породжуючого розв'язку $z_0(t,c_r^*)$ і точки h_0^*, ніж перші чотири члени розвинення, тому

$$\mathcal{R}(z_0(k,c_r^*)+x(k,\varepsilon),h_0^*+\mu(\varepsilon),k,\varepsilon)\Bigg|_{\substack{z(k,\varepsilon)=z_0(k,c_r^*),\\ h(\varepsilon)=h_0^*,\\ \varepsilon=0}}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{R}(z_0(k,c_r^*)+x(k,\varepsilon),h_0^*+\mu(\varepsilon),k,\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z(k,\varepsilon)=z_0(k,c_r^*),\\ h(\varepsilon)=h_0^*,\\ \varepsilon=0}}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{R}(z_0(k,c_r^*)+x(k,\varepsilon),h_0^*+\mu(\varepsilon),k,\varepsilon)}{\partial h}\Bigg|_{\substack{z(k,\varepsilon)=z_0(k,c_0^*),\\ h(\varepsilon)=h_0^*,\\ \varepsilon=0}}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{R}(z_0(k,c_0^*)+x(k,\varepsilon),h_0^*+\mu(\varepsilon),k,\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z(k,\varepsilon)=z_0(k,c_r^*),\\ h(\varepsilon)=h_0^*,\\ \varepsilon=0}}\equiv 0.$$

Аналогічно, використовуючи неперервну диференційовність (у сенсі Фреше) векторного функціонала $J(z(\cdot,\varepsilon),h(\varepsilon),\varepsilon)$ за першим аргументом і неперервність за другим аргументом, виділяємо лінійні за $x,\ \varepsilon$ і $\mu(\varepsilon)$ частини $\ell_1\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big),\ \ell_2\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big)$ і $\ell_3\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big)$ цих функціоналів та член $J\left(z_0\big(\cdot,c_0^*\big),h_0^*,0\right)$ нульового порядку малості за ε в околі точок $x=0$, $\varepsilon=0$ та $\mu(\varepsilon)=0$:

$$\begin{aligned}J\left(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)+x(\cdot,\varepsilon),h_0^*+\mu(\varepsilon),\varepsilon\right)&=J\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big),h_0^*,0\big)+\\&+\ell_1\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big)\,x(\cdot,\varepsilon)+\ell_2\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big)\mu(\varepsilon)+\varepsilon\,\ell_3\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big)+\\&+J_1\left(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)+x(\cdot,\varepsilon),h_0^*+\mu(\varepsilon),\varepsilon\right),\end{aligned}$$

де

$$\ell_1\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big):=\frac{\partial J(z(\cdot,\varepsilon),h(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z(k,\varepsilon)=z_0(k,c_r^*),\\ h(\varepsilon)=h_0^*,\\ \varepsilon=0}},$$

$$\ell_2\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big):=\frac{\partial J(z(\cdot,\varepsilon),h(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial h}\Bigg|_{\substack{z(k,\varepsilon)=z_0(k,c_r^*),\\ h(\varepsilon)=h_0^*,\\ \varepsilon=0}},$$

$$\ell_3\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big):=\frac{\partial J(z(\cdot,\varepsilon),h(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\substack{z(k,\varepsilon)=z_0(k,c_r^*),\\ h(\varepsilon)=h_0^*,\\ \varepsilon=0}}.$$

Розв'язок крайової задачі (8), (9) зображується у вигляді

$$x(k,\varepsilon)=X_r(k)\nu(\varepsilon)+x^{(1)}(k,\varepsilon),$$

де

$$x^{(1)}(k,\varepsilon):=\varepsilon\, G\Big[Z\big(z_0\big(j,c_r^*\big),h_0^*,j,0\big)+\mathcal{A}_1\big(z_0\big(j,c_r^*\big),h_0^*,j\big)x(j,\varepsilon)+$$

$$+\mathcal{A}_2\big(z_0\big(j,c_r^*\big),h_0^*,j\big)\mu(\varepsilon)+\varepsilon\,\mathcal{A}_3\big(z_0\big(j,c_r^*\big),h_0^*,j\big)+$$

$$+\mathcal{R}\big(z_0\big(j,c_r^*\big)+x(j,\varepsilon),h_0^*+\mu(\varepsilon),j,\varepsilon\big);J\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big),h_0^*,0\big)+$$

$$+\ell_1\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big)\,x(\cdot,\varepsilon)+\ell_2\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big)\mu(\varepsilon)+\varepsilon\,\ell_3\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big)+$$

$$+J_1\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)+x(\cdot,\varepsilon),h_0^*+\mu(\varepsilon),\varepsilon\big)\Big](k).$$

Позначимо $(d\times(r+q))$-вимірну матрицю

$$D_0(\check{c}_0)=P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big)\,X_r(\cdot)-$$

$$-\,\ell K\left[\mathcal{A}_1\big(z_0(k,c_r^*),h_0^*,k\big)X_r(k)\right](\cdot);$$

$$\ell_2\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big)-\ell K\big[\mathcal{A}_2\big(z_0\big(k,c_r^*\big),h_0^*,k\big)\big](\cdot)\Big\}.$$

Для знаходження функцій $\nu(\varepsilon)$ та $\mu(\varepsilon)$ приходимо до рівняння

$$D_0(\check{c}_0)\begin{bmatrix}\nu(\varepsilon)\\ \mu(\varepsilon)\end{bmatrix}=-P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big)\,x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+$$

$$+\,\varepsilon\,\ell_3\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big)+J_1(z(\cdot,\varepsilon),h(\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\,\ell K\Big[\mathcal{A}_1\big(z_0\big(k,c_r^*\big),h_0^*,k\big)x^{(1)}(k,\varepsilon)+\varepsilon\,\mathcal{A}_3\big(z_0\big(k,c_r^*\big),h_0^*,k\big)+$$

$$+\,\mathcal{R}\big(z_0\big(k,c_r^*\big)+x(k,\varepsilon),h_0^*+\mu(\varepsilon),k,\varepsilon\big)\Big](\cdot)\Big\}.$$

Таким чином, за умови $P_{D_0^*(\check{c}_0)}P_{Q_d^*}=0$ задача (1), (2) має принаймні один розв'язок і власну функцію, які визначає операторна система

$$z(k,\varepsilon)=z_0\big(k,c_r^*\big)+x(k,\varepsilon),$$

$$x(k,\varepsilon)=X_r(k)\nu(\varepsilon)+x^{(1)}(k,\varepsilon),$$

$$x^{(1)}(k,\varepsilon):=\varepsilon\, G\Big[Z\big(z_0\big(j,c_r^*\big),h_0^*,j,0\big)+\mathcal{A}_1\big(z_0\big(j,c_r^*\big),h_0^*,j\big)x(j,\varepsilon)+$$

$$+\mathcal{A}_2\big(z_0\big(j,c_r^*\big),h_0^*,j\big)\mu(\varepsilon)+\varepsilon\,\mathcal{A}_3\big(z_0\big(j,c_r^*\big),h_0^*,j\big)+$$

$$+\mathcal{R}\left(z_0\big(j,c_r^*\big)+x(j,\varepsilon),h_0^*+\mu(\varepsilon),j,\varepsilon\right);J\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big),h_0^*,0\big)+$$

$$+\ell_1\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big)\,x(\cdot,\varepsilon)+\ell_2\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big)\mu(\varepsilon)+\varepsilon\,\ell_3\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big)+ \tag{12}$$

$$+J_1\left(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)+x(\cdot,\varepsilon),h_0^*+\mu(\varepsilon),\varepsilon\right)\Big](k),$$

$$\begin{bmatrix}\nu(\varepsilon)\\ \mu(\varepsilon)\end{bmatrix}=-D_0^+(\check{c}_0)P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big)\,x^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+$$

$$+\,\varepsilon\,\ell_3\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big)+J_1(z(\cdot,\varepsilon),h(\varepsilon),\varepsilon)-$$
$$-\,\ell K\Big[\mathcal{A}_1\big(z_0\big(k,c_r^*\big),h_0^*,k\big)x^{(1)}(k,\varepsilon)+\varepsilon\,\mathcal{A}_3\big(z_0\big(k,c_r^*\big),h_0^*,k\big)+$$
$$+\,\mathcal{R}\left(z_0\big(k,c_r^*\big)+x(k,\varepsilon),h_0^*+\mu(\varepsilon),k,\varepsilon\right)\Big](\cdot)\Big\},\quad h(\varepsilon)=h_0^*+\mu(\varepsilon).$$

Тут $P_{D_0^*(\check{c}_0)}$ — $(d\times d)$-вимірна матриця-ортопроектор

$$P_{D_0^*(\check{c}_0)}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{N}\left(D_0^*(\check{c}_0)\right),$$

$D_0^+(\check{c}_0)$ — псевдообернена за Муром – Пенроузом матриця [8]. Для побудови наближеного розв'язку операторної системи (12) у випадку $P_{D_0^*(\check{c}_0)}P_{Q_d^*}=0$ можна застосувати метод простих ітерацій [8]. Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема. *Нехай для крайової задачі (1), (2) має місце критичний випадок* $P_{Q^*}\neq 0$. *За умов (4) і (7) розв'язок породжуючої крайової задачі має вигляд (10). Для кожного кореня* $c_r^*\in\mathbb{R}^r,\ h_0^*\in\mathbb{R}^q$ *рівняння для породжуючих констант (11) за умови* $P_{D_0^*(\check{c}_0)}P_{Q_d^*}=0$ *у малому околі розв'язку* $z_0\big(k,c_r^*\big)$ *породжуючої задачі й у достатньо малому околі початкового значення функції* h_0^* *задача (8), (9) має принаймні один обмежений розв'язок*

$$x(k,\varepsilon):\,x(k,\cdot)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

визначений операторною системою (12), якому відповідає власна неперервна функція

$$h(\varepsilon):\,h(0):=h_0^*\in\mathbb{R}^q.$$

Для побудови розв'язку операторної системи (12) для $\varepsilon\in\big[0,\varepsilon^*\big]$ *застосовна ітераційна схема*

$$z_{j+1}(k,\varepsilon)=z_0\big(k,c_r^*\big)+x_{j+1}(k,\varepsilon),$$
$$h_{j+1}(\varepsilon)=h_0^*+\mu_{j+1}(\varepsilon),$$
$$x_{j+1}(k,\varepsilon)=X_r(k)\nu_{j+1}(\varepsilon)+x_{j+1}^{(1)}(k,\varepsilon),\tag{13}$$
$$x_{j+1}^{(1)}(k,\varepsilon):=\varepsilon\,G\Big[Z\left(z_0\big(i,c_r^*\big),h_0^*,i,0\right)+\mathcal{A}\left(z_0\big(i,c_r^*\big),h_0^*,i\right)x_j(i,\varepsilon)+$$
$$+\,\mathcal{A}_2\left(z_0\big(i,c_r^*\big),h_0^*,i\right)\mu_j(\varepsilon)+\varepsilon\,\mathcal{A}_3\left(z_0\big(i,c_r^*\big),h_0^*,i\right)+$$
$$+\,\mathcal{R}\left(z_0\big(i,c_r^*\big)+x_j(i,\varepsilon),h_0^*+\mu_j(\varepsilon),i,\varepsilon\right);J\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big),h_0^*,0\big)+$$
$$+\,\ell_1\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big)\,x_j(\cdot,\varepsilon)+\ell_2\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big)\mu_j(\varepsilon)+\varepsilon\,\ell_3\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\big)+$$
$$+\,J_1\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)+x_j(\cdot,\varepsilon),h_0^*+\mu_j(\varepsilon),\varepsilon\big)\Big](k),$$

$$\begin{bmatrix}\nu_{j+1}(\varepsilon)\\ \mu_{j+1}(\varepsilon)\end{bmatrix} = -D_0^+(\check{c}_0)P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1\big(z_0\big(\cdot, c_r^*\big)\big)\, x_{j+1}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+$$

$$+\,\varepsilon\,\ell_3\big(z_0\big(\cdot, c_r^*\big)\big) + J_1(z_j(\cdot,\varepsilon), h_j(\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$-\,\ell K\Big[\mathcal{A}_1\big(z_0\big(k, c_r^*\big), h_0^*, k\big)x_{j+1}^{(1)}(k,\varepsilon)+$$

$$+\,\varepsilon\,\mathcal{A}_3\big(z_0\big(k, c_r^*\big), h_0^*, k\big) + \mathcal{R}\,\big(z_0\big(k, c_r^*\big)+$$

$$+x_j(k,\varepsilon), h_0^* + \mu_j(\varepsilon), k,\varepsilon\big)\Big](\cdot)\Big\}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Довжину відрізка $[0, \varepsilon^*]$, на якому може бути застосована ітераційна схема (13), можна оцінити як за допомогою мажоруючих рівнянь Ляпунова [8], так і безпосередньо з умови стиснення оператора, визначеного системою (12) аналогічно [16, 17].

Приклад. Досліджуємо задачу про знаходження обмежених розв'язків

$$z(k,\varepsilon) \in \mathbb{R}^3, \quad k \in \Omega := \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}, \quad z(k,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

і власної функції $h(\varepsilon)$ лінійної крайової задачі для системи різницево-алгебраїчних рівнянь типу Матьє

$$A(k)z(k+1,\varepsilon) = B(k)z(k,\varepsilon) + f(k) + \varepsilon Z(z(k,\varepsilon), h(\varepsilon), k), \quad \ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha, \tag{14}$$

де

$$Z(z(k,\varepsilon), h(\varepsilon), k) := \Theta(k, h(\varepsilon))z(k,\varepsilon), \quad \ell z(\cdot,\varepsilon) := z(0,\varepsilon) - z(3,\varepsilon) = \alpha,$$

крім того,

$$A(k) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}, \quad B(k) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \quad f(k) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},$$

$$\Theta(k, h(\varepsilon)) := \begin{pmatrix} h(\varepsilon) & 0 & 1 & 0\\ 0 & h(\varepsilon)+\cos k\pi & 0 & h(\varepsilon)+\cos k\pi\\ 1 & 0 & h(\varepsilon) & 0\end{pmatrix}, \quad \alpha := \begin{pmatrix}1\\-3\\3\\-1\end{pmatrix}.$$

Оскільки умову (4) виконано, то породжуюча система (3) має розв'язок вигляду (6), де

$$X_0(0) = I_4, \qquad X_0(1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$X_0(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad X_0(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}^4.$$

Також

$$K[f(j)](0) := 0, \qquad K[f(j)](1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$K[f(j)](2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad K[f(j)](3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

У даному випадку матриця $A(k)$ прямокутна, при цьому $\rho_0 = 1 \neq 0$, тому знайдений розв'язок залежить від довільної неперервної функції; в даному випадку $\nu_0(k) := 0$. Оскільки виконується нерівність $P_{Q_0^*} \neq 0$, то для породжуючої крайової задачі має місце критичний випадок, при цьому виконано умову розв'язності (7); тут

$$Q_0 = X_0(0) - X_0(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

крім того, $r = d = 1$,

$$P_{Q_0^*} = P_{Q_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{Q_r} = P^*_{Q_d^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок (10) породжуючої крайової задачі

$$z_0(k, c_r) = X_r(k)\, c_r + G\big[f(j), \nu_0(j), \alpha\big](k), \quad c_r \in \mathbb{R}^1,$$

визначає узагальнений оператор Гріна породжуючої крайової задачі

$$G\big[f(j), \nu_0(j), \alpha\big](k) = K\big[f(j), \nu_0(j)\big](k),$$

а також

$$X_r(k) := X_0(k) P_{Q_r} = P_{Q_r}, \quad k \in \Omega,$$

— фундаментальна матриця розв'язків однорідної частини породжуючої крайової задачі. Крім того,

$$G[f(j), \nu_0(j), \alpha](0) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad G[f(j), \nu_0(j), \alpha](1) := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$G[f(j),\nu_0(j),\alpha](0):=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\qquad G[f(j),\nu_0(j),\alpha](1):=\begin{pmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{pmatrix}.$$

Рівняння для породжуючих констант у випадку крайової задачі (14) має корінь

$$\check{c}_0\in\mathbb{R}^2,\qquad c_0^*=1,\qquad h_0^*=-\frac{3}{2},$$

якому відповідає матриця повного рангу

$$D_0(\check{c}_0)=\begin{pmatrix}0&2\end{pmatrix}.$$

Таким чином, згідно з доведеною теоремою крайова задача (14) має принаймні один розв'язок, який при $\varepsilon=0$ перетворюється на породжуючий $z_0\big(k,c_r^*\big)$:

$$z_0\big(0,c_r^*\big)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad z_0\big(1,c_r^*\big)=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\\1\end{pmatrix},$$

$$z_0\big(2,c_r^*\big)=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\1\end{pmatrix},\qquad z_0\big(3,c_r^*\big)=\begin{pmatrix}-1\\4\\-3\\1\end{pmatrix},$$

для знаходження якого може бути застосована ітераційна схема (13). Перше наближення до розв'язку крайової задачі (14)

$$z_1(k,\varepsilon)=z_0\big(k,c_0^*\big)+x_1(k,\varepsilon),$$

$$x_1(k,\varepsilon)=X_r(k)\nu_1(\varepsilon)+x_1^{(1)}(k,\varepsilon),\qquad h_1(\varepsilon)=h_0^*+\mu_1(\varepsilon)$$

визначає функція

$$x_1^{(1)}(0,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{4}\begin{pmatrix}8\\0\\15\\-8\end{pmatrix},\qquad x_1^{(1)}(1,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{4}\begin{pmatrix}1\\0\\-15\\-1\end{pmatrix},$$

$$x_1^{(1)}(2,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{4}\begin{pmatrix}15\\-6\\1\\-15\end{pmatrix},\qquad x_1^{(1)}(3,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{4}\begin{pmatrix}4\\0\\3\\-4\end{pmatrix}$$

і вектор

$$\check{c}_1(\varepsilon) = -\frac{35\,\varepsilon}{8}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}^*.$$

Таким чином, знаходимо

$$z_1(0,\varepsilon) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8\,\varepsilon \\ 4 \\ 15\,\varepsilon \\ -8\,\varepsilon \end{pmatrix}, \qquad z_1(1,\varepsilon) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \varepsilon - 4 \\ 8 \\ -3\,(4 + 5\,\varepsilon) \\ 4 - \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$z_1(2,\varepsilon) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 15\,\varepsilon - 4 \\ 6\,(2 - \varepsilon) \\ \varepsilon \\ 4 - 15\,\varepsilon \end{pmatrix}, \qquad z_1(3,\varepsilon) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4\,(\varepsilon - 1) \\ 16 \\ 3\,(\varepsilon - 4) \\ 4 - 4\,\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Обмежимо проміжок зміни малого параметра ε відрізком $[0;0,1]$. Для оцінки точності знайдених наближень до розв'язку крайової задачі (14) визначимо нев'язки

$$\Delta_j := \Big\| \big\| A(k)z_j(k+1,\varepsilon) - B(k)z_j(k,\varepsilon) -$$

$$- f(k) - \varepsilon Z(z_j(k,\varepsilon), h_j(\varepsilon), k, \varepsilon)\big\|_\infty \Big\|_{\mathbb{C}[0;\varepsilon_0]}, \quad j = 0, 1.$$

Зокрема,

$$\Delta_0 \approx 0{,}75, \qquad \Delta_1 \approx 0{,}206\,406.$$

Зазначимо також, що знайдене нульове наближення до розв'язку крайової задачі (14) задовольняє крайову умову. Разом із тим при підстановці першого наближення до розв'язку крайової задачі (14) у крайову умову виникає нев'язка

$$\ell z_1(\cdot,\varepsilon) - \alpha = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 3\,\varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Щоб уникнути появи нев'язки крайовій умові, для наближень до розв'язку крайової задачі (1), (2) може бути використаний метод найменших квадратів [18, 19] і різні модифікації методу Ньютона – Канторовича [20 – 22].

У випадку параметричного резонансу доведена теорема узагальнює відповідні твердження [9, 12, 23, 24].

Література

1. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, *О параметрическом возбуждении электрических колебаний*, Журн. техн. физики, № 3, 5 – 29 (1934).
2. С. В. Сипаров, *Возникновение динамической анизотропии газа в условиях оптико-механического параметрического резонанса*, Журн. техн. физики, **72**, 125 – 128 (2002).

3. В. П. Силин, *Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму*, Наука, Москва (1973).
4. В. В. Болотин, *Динамическая устойчивость упругих систем*, Гостехиздат, Москва (1956).
5. Ю. Ф. Копелев, *Параметрические колебания станков*, Металлорежущие станки: респ. межвед. науч.-техн. сб., Киев, Вып. 12, 3 – 8 (1984).
6. Г. Шмидт, *Параметрические колебания*, Мир, Москва (1978).
7. В. А. Якубович, В. М. Старжинский, *Параметрический резонанс в линейных системах*, Наука, Москва (1987).
8. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition)*, Inverse and Ill-Posed Problems Series, **59**, Berlin, De Gruyter (2016).
9. А. А. Бойчук, *Краевые задачи для систем разностных уравнений*, Укр. мат. журн., **49**, № 6, 832 – 835 (1997).
10. С. М. Чуйко, *Нелинейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса*, Нелін. коливання, **205**, № 1, 137 – 148 (2014).
11. В. А. Якубович, В. М. Старжинский, *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения*, Наука, Москва (1972).
12. С. М. Чуйко, Е. В. Чуйко, Я. В. Калиниченко, *Краевые задачи для систем линейных разностно-агебраических уравнений*, Нелін. коливання, **22**, № 4, 560 – 573 (2019).
13. S. L. Campbell, *Limit behavior of solutions of singular difference equations*, Linear Algebra Appl., **23**, 167 – 178 (1979).
14. S. M. Chuiko, *On a reduction of the order in a differential-algebraic system*, J. Math. Sci., **235**, № 1, 2 – 18 (2018).
15. S. M. Chuiko, *A generalized Green operator for a linear Noetherian differential-algebraic boundary value problem*, Sib. Adv. Math., **30**, 177 – 191 (2020).
16. А. С. Чуйко, *Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи*, Нелін. коливання, **8**, № 2, 278 – 288 (2005).
17. С. М. Чуйко, *Область сходимости итерационной процедуры для автономной краевой задачи*, Нелін. коливання, **9**, № 3, 416 – 432 (2006).
18. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, Москва (1965).
19. С. М. Чуйко, *О приближенном решении краевых задач методом наименьших квадратов*, Нелін. коливання, **11**, № 4, 554 – 573 (2008).
20. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1977).
21. С. М. Чуйко, *Про узагальнення теореми Ньютона – Канторовича у банаховововому просторі*, Доп. НАН України, № 6, 22 – 31 (2018).
22. К. К. Романко, *Разностные уравнения*, Бином, Москва (2014).
23. А. А. Бойчук, С. М. Чуйко, Я. В. Калиниченко, *Линейная нетерова краевая задача для матричного разностного уравнения*, Укр. мат. журн., **72**, № 3, 340 – 354 (2020).
24. S. M. Chuiko, Ya. V. Kalinichenko, N. V. Popov, *Boundary-value problems for systems of non-degenerate difference-algebraic equations*, Вісн. Харк. нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна, **90**, 26 – 41 (2019).

Одержано 10.01.21,
після доопрацювання — 24.03.21