УДК 517.9

ІСНУВАННЯ ТА АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ НЕЛІНІЙНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ НА ДІЙСНІЙ ОСІ

І. О. Парасюк

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
просп. акад. Глушкова, 4е, Київ, 03127, Україна
e-mail: parasyuk@knu.ua

Л. В. Процак

Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова
вул. Пирогова, 9, Київ, 01601, Україна
e-mail: protsak.l.v@gmail.com

We consider a nonlinear system of ordinary differential equations defined on the whole real axis with Dirichlet-type boundary conditions at $\pm\infty$. It is assumed that the linear part of the system has the property of nonuniform strong exponential dichotomy. To prove the existence theorem, we apply a Shauder–Tikhonov-type fixed-point principle. In addition, we establish conditions under which the obtained solution has the same asymptotic properties as that of the inhomogeneous linearized system.

Розглянуто визначену на всій дійсній осі нелінійну систему диференціальних рівнянь із умовами типу Діріхле на $\pm\infty$. Припускалося, що лінійна частина системи має властивість нерівномірної сильної експоненціальної дихотомії. Для доведення теореми існування застосовано принцип нерухомої точки типу Шаудера – Тихонова. Встановлено також умови, за яких отриманий розв'язок має ті ж самі асимптотичні властивості, що й розв'язок неоднорідної лінеаризованої системи.

Вступ. Одне з центральних місць у якісній теорії звичайних диференціальних рівнянь посідають проблеми, пов'язані з дослідженням поведінки розв'язків нелінійних систем на нескінченних проміжках незалежної змінної. До числа таких проблем належать, зокрема, задачі існування обмежених розв'язків та розв'язків крайових задач як на півосі, так і на всій дійсній осі. Не претендуючи на повний аналіз результатів та перелік посилань із зазначеної тематики, згадаємо лише кілька важливих праць, ідейно близьких до задачі, якій присвячено цю статтю: [1 – 9]. У цих же працях можна знайти відповідну бібліографію.

Важливу роль у задачі про обмежені розв'язки лінійних неоднорідних систем відіграють поняття експоненціальної дихотомії та функції Гріна [1 – 3, 5, 7, 8]. Аналоги цих понять, зокрема функція Гріна–Самойленка, є базовими в теорії лінійних розширень динамічних систем на многовидах [3, 4].

Як відомо, за допомогою функції Гріна задачу про обмежені розв'язки нелінійних систем із виділеною експоненціально дихотомічною лінійною частиною можна звести до інтегрального рівняння, а отже, до питання про існування нерухомої точки відповідного нелінійного інтегрального оператора. При такому підході техніка доведення існування нерухомої точки тривалий час базувалася на методі послідовних наближень (або принципі стиснених відображень). При цьому областю визначення зазначеного інтегрального оператора слугував банахів простір $\mathcal{C}$ обмежених на $\mathbb{R}$ (або $\mathbb{R}_+$) відображень, що має стандартну $\sup$-норму. Класичний приклад — теорема Боля (див., наприклад, [1, 2]). У загальному випадку інтегральний оператор, про який йдеться, не є цілком неперервним у просторі $\mathcal{C}$. Ця обставина перешкоджала безпосередньому застосуванню стандартних топологічних принципів нерухомої точки, таких, наприклад, як принцип Шаудера. Подолання зазначеної перешкоди стало можливим значною мірою завдяки розвитку теорії c-неперервних і c-компактних операторів [10 – 12]. Так, у [10, 13] для розв'язання задачі існування обмежених на $\mathbb{R}$ розв'язків нелінійних систем із виділеною експоненціально дихотомічною лінійною частиною було з успіхом застосовано теорему Шаудера – Тихонова (див., наприклад, [14]). Ця теорема гарантує існування нерухомої точки нелінійного цілком неперервного оператора, заданого на опуклій замкненій підмножині локально опуклого гаусдорфового простору. Саме таким є простір $\mathcal{C}$, наділений топологією рівномірної збіжності на замкнених відрізках дійсної прямої.

У цій статті із застосуванням топологічного принципу типу Тихонова – Шаудера досліджено сингулярну крайову задачу на всій осі з крайовими умовами типу Діріхле на $\pm\infty$. Враховано обставину, що на виділену лінійну частину системи ми накладали умови нерівномірної сильної експоненціальної дихотомії в сенсі [15 – 17].

2. Формулювання задачі та основні припущення. Розглянемо систему

$$\dot{x} = F(t, x), \tag{2.1}$$

де

$$F(\cdot,\cdot) \in \mathrm{C}^{0,1}\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n\right), \qquad \lim_{t\to\pm\infty} F(t,0) = 0.$$

Проаналізуємо такі питання:

– чи існує хоча б один розв'язок системи (2.1), який задовольняє крайові умови Діріхле

$$x(\pm\infty) = 0 \tag{2.2}$$

на нескінченності?

– як пов'язані між собою асимптотичні властивості розв'язку задачі (2.1), (2.2) та функції $f_0(\cdot) := F(\cdot, 0)$?

Подамо праву частину системи (2.1) вигляді

$$F(t,x) = f_0(t) + F'_x(t,0)x + \left[F(t,x) - f_0(t) + F'_x(t,0)x\right]$$

і покладемо

$$A(t) := F'_x(t,0), \qquad f(t,x) := \left[F(t,x) - f_0(t) + F'_x(t,0)x\right].$$

Тепер запишемо систему (2.1) з урахуванням уведених позначень:

$$\dot{x} = A(t)x + f_0(t) + f(t,x). \tag{2.3}$$

Позначимо через X_s^t матрицант лінійної однорідної системи

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{2.4}$$

За означенням $\dfrac{\partial}{\partial t}X_s^t \equiv A(t)X_s^t,\ X_s^s \equiv \mathrm{Id}.$

Припущення 1. *Система (2.4) допускає нерівномірну сильну експоненціальну дихотомію з додатними сталими* $C, \ \alpha, \ \beta$ *[15 – 17], тобто існує розклад у пряму суму*

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{V}_- \oplus \mathbb{V}_+$$

лінійних підпросторів $\mathbb{V}_-$, $\mathbb{V}_+$ *такий, що*

$$\left\| X_0^t P_\pm X_s^0 \right\| \leq C e^{\pm\alpha(t-s)+\beta|s|} \quad \forall \pm t \leq \pm s,$$

де $P_\pm : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{V}_\pm$ *— проектори,* $P_+ + P_- = \mathrm{Id}$.

Простий приклад лінійної системи з нерівномірною сильною експоненціальною дихотомією можна знайти в [16].

Припущення 2. *Для функції* $f_0(\cdot)$ *справджується нерівність*

$$\|f_0(t)\| \leq e^{-\beta|t|}\eta(t)$$

з деякою функцією $\eta(\cdot) \in \mathrm{C}^1 \ (\mathbb{R} \mapsto (0,\infty))$, *що прямує до* 0, *коли* $|t| \to \infty$, *причому показники Ляпунова останньої задовольняють умови*

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\ln \eta(t)}{t} <:= \lambda_- < \alpha, \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \eta(t)}{t} = -\lambda_+ > -\alpha.$$

Увівши ядро Гріна

$$G(t,x) := \begin{cases} X(t)P_- X^{-1}(s), & s \leq t, \\ -X(t)P_+ X^{-1}(s), & t < s, \end{cases}$$

визначимо функцію

$$x_0(t) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t,s) f_0(s) ds. \tag{2.5}$$

З огляду на припущення 2 вона є обмеженим розв'язком лінійної неоднорідної системи

$$\dot{x} = A(t)x + f_0(t).$$

Покладемо

$$\xi\,(t) = C \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|}\eta(s) ds.$$

Тоді

$$\|x_0(t)\| \leq \xi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Лема 1. *Функції* $\eta(\cdot)$ *та* $\xi(\cdot)$ *мають однакові показники Ляпунова* λ_- *та* $-\lambda_+$.

Доведення. Легко переконатися, що внаслідок припущення 2

$$\lim_{|s|\to\infty} e^{\alpha|s|}\eta(s) = \infty.$$

Оскільки $\eta(t) \to +0$ при $t \to \pm\infty$, то $\lambda_+, \lambda_- \geq 0$, і тоді за правилом Лопіталя маємо

$$\mp\lambda_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{\ln \eta(t)}{t} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{\dot{\eta}(t)}{\eta(t)},$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\xi(t)}{\eta(t)} = C \lim_{t\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{\alpha s}\eta(s)ds}{e^{\alpha t}\eta(t)} + C \lim_{t\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{t}^{\infty} e^{-\alpha s}\eta(s)ds}{e^{-\alpha t}\eta(t)} =$$

$$= C \lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{\alpha\eta(t) + \dot{\eta}(t)} + C \lim_{t\to\infty} \frac{-\eta(t)}{\dot{\eta}(t) - \alpha\eta(t)} = \frac{2\alpha C}{(\alpha - \lambda_+)(\lambda_+ + \alpha)} =: C_+, \quad (2.6)$$

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\xi(t)}{\eta(t)} = \frac{2\alpha C}{(\alpha + \lambda_-)(\alpha - \lambda_-)} =: C_-. \quad (2.7)$$

Відтак твердження леми є наслідком рівностей (2.6), (2.7).

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{\alpha t}\xi(t) &= 2\alpha e^{\alpha t} \int_{t}^{\infty} e^{-\alpha s}\eta(s)ds > 0, \\ \frac{d}{dt} e^{-\alpha t}\xi(t) &= -2\alpha e^{-\alpha t} \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha s}\eta(s)ds < 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Тепер ми використаємо функцію $\xi(\cdot)$ як ефективну характеристику асимптотичної поведінки функції $x_0(\cdot)$ і посилимо крайові умови (2.2) додатковою вимогою щодо асимптотики шуканого розв'язку

$$\|x(t) - x_0(t)\| = o\left(\xi(t)\right), \quad t \to \pm\infty. \quad (2.9)$$

Добре відомо, що обмежений розв'язок системи (2.3) задовольняє інтегральне рівняння

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s)\big[f(s,x(s)) + f_0(s)\big]ds,$$

і навпаки, кожний неперервний обмежений розв'язок цього рівняння є обмеженим розв'язком системи (2.3).

Шукатимемо розв'язок задачі (2.1), (2.9) у вигляді $x(t) = x_0(t) + \xi(t)y(t)$. З огляду на (2.5) функція $y(t)$ має бути розв'язком інтегрального рівняння

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(t,s)}{\xi(t)} g(s,y(s))ds, \quad (2.10)$$

де

$$g(s,y(s)) := f(s, x_0(s) + \xi(s)y(s)).$$

Припущення 3. *Для всіх $r \in \mathbb{R}_+$ коректно визначена функція*

$$\varphi(r) := \sup\left\{\frac{e^{\beta|t|}}{\xi(t)}\big\|f(t,x)\big\| : \|x\| \leq \xi(t)(1+r), \;\; t \in \mathbb{R}\right\} < \infty.$$

Нарешті, той факт, що $f(t,0) \equiv 0$ і $f'_x(t,0) \equiv 0$, дає достатні підстави для такого припущення.

Припущення 4. *Існує рівномірна границя*

$$\frac{e^{\beta|t|}\big\|f(t,x)\big\|}{\|x\|} \underset{t\in\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0 \quad \textit{при} \quad \|x\| \to 0.$$

3. Основні результати. Якщо вважати виконаним припущення 3, то на множині

$$\mathcal{B}_r := \left\{y(\cdot) \in \mathrm{C}\left(\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n\right) : \sup_{t\in\mathbb{R}}\big\|y(\cdot)\big\| \leq r\right\}$$

справджується нерівність

$$\left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{G(t,s)}{\xi(t)}g(s,y(s))ds\right\| \leq \frac{C}{\xi(t)}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|t-s|}\xi(s)ds\right]\varphi(r).$$

Оскільки з урахуванням леми 1 існує стала

$$K := \sup_{t\in\mathbb{R}}\frac{C}{\xi(t)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|t-s|}\xi(s)ds,$$

то, поклавши

$$\mathcal{G}[y](t) := \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{G(t,s)}{\xi(t)}g(s,y(s))ds,$$

одержимо

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\big\|\mathcal{G}[y](t)\big\| \leq K\varphi(r) \quad \forall y(\cdot) \in \mathcal{B}_r. \tag{3.1}$$

Отже, визначено дію оператора

$$\mathcal{B}_r \ni y(\cdot) \mapsto \mathcal{G}[y](\cdot) \in \mathcal{B}_{K\varphi(r)}.$$

Теорема 1. *Якщо справджуються припущення 1–3 і рівняння*

$$r - K\varphi(r) = 0$$

має додатний корінь r_*, то інтегральне рівняння (2.10) має принаймні один розв'язок $y_*(\cdot) \in$ $\in \mathcal{B}_{r_*}$.

Доведення. З нерівності (3.1) випливає, що оператор $\mathcal{G}[\cdot]$ відображає опуклу множину $\mathcal{B}_{r_*}$ в себе. Якщо за аналогією з [10, 13] показати, що у просторі $\mathcal{B}_{r_*}$, наділеному топологією рівномірної збіжності на кожному відрізку дійсної прямої, оператор $\mathcal{G}[\cdot]$ діє неперервно, а замикання множини $\mathcal{G}\left[\mathcal{B}_{r_*}\right]$ є компактом, то існування розв'язку $y_*(\cdot) \in \mathcal{B}_{r_*}$ рівняння (2.10) випливатиме з теореми Шаудера – Тихонова [14].

Замість перевірки виконання умов теореми Шаудера – Тихонова вважаємо за доцільне навести ad hoc доведення потрібного нам результату, використовуючи класичний принцип Шаудера.

З цією метою для кожного натурального k розглянемо інтегральне рівняння

$$y(t) = \int\limits_{-k}^{k} \frac{G(t,s)}{\xi(t)} g(s, y(s)) ds, \quad t \in [-k, k]. \tag{3.2}$$

Зауважимо, що ліва частина цього рівняння визначає оператор $\mathcal{G}_k[x(\cdot)]$, який діє у банаховому просторі

$$\mathcal{B}^{(k)} := \left(\mathrm{C}\left([-k,k] \mapsto \mathbb{R}^n\right), \ \ \|\cdot\|_\infty := \max_{t\in[-k,k]} \|\cdot\| \right).$$

Якщо $y(\cdot) \in \mathcal{B}^{(k)}_{r_*} := \left\{ y(\cdot) \in \mathcal{B}^{(k)} : \left\|y(\cdot)\right\|_\infty \le r_* \right\}$, то для всіх $t \in [-k, k]$ справджуються нерівності

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}_k[y(\cdot)](t)\| &= \left\| \int\limits_{-k}^{k} \frac{G(t,s)}{\xi(t)} \xi(s) \frac{g(s,y(s))}{\xi(s)} ds \right\| \le \\
&\le \frac{C}{\xi(t)} \left[\int\limits_{-k}^{k} e^{-\alpha|t-s|} \xi(s) ds \right] \varphi(r_*) \le \\
&\le \frac{C}{\xi(t)} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|} ds \right] \varphi(r_*) \le K\varphi(r_*) = r_*.
\end{aligned}$$

Крім того, безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що

$$\frac{d}{dt}\mathcal{G}_k[y(\cdot)](t) = \left[A(t) - \frac{\dot{\xi}(t)}{\xi(t)} \mathtt{Id} \right] \mathcal{G}_k[y(\cdot)](t) + g(t, y(t)).$$

Звідси випливає існування додатної сталої L_k такої, що

$$\max_{t\in[-k,k]} \left\| \frac{d}{dt}\mathcal{G}_k[y(\cdot)](t) \right\| \le L_k \quad \forall y(\cdot) \in \mathcal{B}^{(k)}_{r_*}.$$

Отже, оператор $\mathcal{G}_k[\cdot]$ відображає опуклу множину $\mathcal{B}^{(k)}_{r_*}$ у її компактну підмножину, утворену функціями, що задовольняють умову Ліпшиця зі сталою L_k. Тому згідно з принципом Шаудера оператор має нерухому точку $y_k(\cdot) \in \mathcal{B}^{(k)}_{r_*}$. Продовживши цю функцію на всю дійсну вісь за правилом

$$y_k(t) := \begin{cases} y_k(-k), & t < -k, \\ y_k(k), & t > k, \end{cases}$$

дістанемо рівномірно обмежену послідовність $\left\{y_k(\cdot) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n\right\}_{k\in\mathbb{N}}$, одностайно неперервну на кожному відрізку дійсної прямої. При цьому

$$y_k(t) \equiv \int_{-k}^{k} \frac{G(t,s)}{\xi(t)} g(s, y_k(s))ds, \quad t \in [-k, k].$$

Далі, застосувавши теорему Асколі – Арцели, визначимо послідовність підмножин

$$\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2 \supset \ldots \supset \mathbb{N}_i \supset \ldots$$

у такий спосіб, щоб послідовність $\{y_k(\cdot)\}_{k\in\mathbb{N}_i}$ рівномірно збігалася на $[-i, i]$ і

$$\{y_k(\cdot)\}_{k\in\mathbb{N}_{i+1}} \subset \{y_k(\cdot)\}_{k\in\mathbb{N}_i}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Звідси випливає, що існує функція $y_*(\cdot) \in \mathcal{B}_{r_*}$ така, що

$$y_k(t) \underset{t\in[-i,i]}{\rightrightarrows} y_*(t), \quad \mathbb{N}_i \ni k \to \infty.$$

Залишається довести, що $y_*(\cdot)$ — розв'язок рівняння (2.10). Нехай числа $T > 0$, $i \in \mathbb{N}$ та $k \in \mathbb{N}_i$ задовольняють нерівність $k > i > T$ і $t \in [-T, T]$. Оскільки $y_k(\cdot)$ задовольняє (3.2), то

$$\begin{aligned}
\left\|y_*(t) - \mathcal{G}[y_*](t)\right\| \leq \left\|y_*(t) - y_k(t)\right\| + \left\|\mathcal{G}_k[y_k](t) - \mathcal{G}_i[y_*](t)\right\| + \\
+ \left\|\int_{-\infty}^{-i} \frac{G(t,s)}{\xi(t)} g(s, y_*(s))ds\right\| + \left\|\int_{i}^{\infty} \frac{G(t,s)}{\xi(t)} g(s, y_*(s))ds\right\| \leq \\
\leq \left\|y_*(t) - y_k(t)\right\| + \left\|\int_{-i}^{i} \frac{G(t,s)}{\xi(t)} \left[g\left(s, y_k(s)\right) - g(s, y_*(s))\right] ds\right\| + \\
+ \left\|\int_{-k}^{-i} \frac{G(t,s)}{\xi(t)} g\left(s, y_k(s)\right) ds\right\| + \left\|\int_{i}^{k} \frac{G(t,s)}{\xi(t)} g\left(s, y_k(s)\right) ds\right\| + \\
+ \left\|\int_{-\infty}^{-i} \frac{G(t,s)}{\xi(t)} g\left(s, y_*(s)\right) ds\right\| + \left\|\int_{i}^{\infty} \frac{G(t,s)}{\xi(t)} g\left(s, y_*(s)\right) ds\right\|.
\end{aligned}$$

Для оцінки останніх чотирьох доданків на відрізку $[-T, T]$ використаємо нерівності (2.8) та

$$\left\|\int_{i}^{\infty} \frac{G(t,s)}{\xi(t)} g(s, y(s))ds\right\| \leq \frac{Cr_*}{K\xi(t)} \int_{i}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}\xi(s)ds \leq \frac{Cr_* e^{\alpha T}}{\alpha K\xi(T)} \sup_{s\geq T} \xi(s)e^{-\alpha i} \quad \forall t \leq T,$$

$$\left\|\int_{-\infty}^{-i} \frac{G(t,s)}{\xi(t)} g(s, y(s))ds\right\| \leq \frac{Cr_*}{K\xi(t)} \int_{-\infty}^{-i} e^{-\alpha(t-s)}\xi(s)ds \leq \frac{Cr_* e^{\alpha T}}{K\alpha\xi(-T)} \sup_{s\leq -T} \xi(s)e^{-\alpha i} \quad \forall t \geq -T$$

для довільного $y(\cdot) \in \mathcal{B}_{r_*}$. Тоді

$$\left\| y_*(t) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{G(t,s)}{\xi(t)} g(s, y_*(s)) ds \right\| \le$$

$$\le \big\| y_*(t) - y_k(t) \big\| + \left\| \int\limits_{-i}^{i} \frac{G(t,s)}{\xi(t)} \left[g\left(s, y_k(s)\right) - g(s, y_*(s)) \right] ds \right\| +$$

$$+ \frac{2Cr_* e^{\alpha T}}{\alpha K \xi(T)} \sup_{s \ge T} \xi(s) e^{-\alpha i} + \frac{2Ce^{\alpha T}}{\alpha \xi(-T)} \sup_{s \le -T} \xi(s) \varphi(r_*) e^{-\alpha i}.$$

Перейшовши тут до границі спочатку при $\mathbb{N}_i \ni k \to \infty$, а потім при $i \to \infty$, переконуємося в тому, що $y_*(\cdot)$ задовольняє рівняння (2.10) на відрізку $[-T, T]$, а отже, й на всій осі $\mathbb{R}$.

Нарешті, сформулюємо і доведемо основний результат роботи.

Теорема 2. *Якщо справджуються припущення 1 – 4, то задача (2.1), (2.2), (2.9) має принаймні один розв'язок.*

Доведення. Згідно з припущенням 4 існує функція $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ така, що

$$e^{\beta|t|} f(t,x) = \sigma(\|x\|)\|x\|, \qquad \lim_{r \to +0} \sigma(r) = 0.$$

Тоді

$$\big\| \mathcal{G}[y_*](t) \big\| \le \frac{C}{\xi(t)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|} \xi(s) \sigma\big(\|x_0(s) + \xi(s) y_*(s)\| \big) \frac{\|x_0(s) + \xi(s) y_*(s)\|}{\xi(s)} ds \le$$

$$\le \frac{C\,(1 + r_*)}{e^{\alpha t} \xi(t)} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\alpha s} \xi(s) \sigma\big(\|x_0(s) + \xi(s) y_*(s)\| \big) ds +$$

$$+ \frac{C\,(1 + r_*)}{e^{-\alpha t} \xi(t)} \int\limits_{t}^{\infty} e^{-\alpha s} \xi(s) \sigma\big(\|x_0(s) + \xi(s) y_*(s)\| \big) ds.$$

За лемою 1 показниками Ляпунова функції $\xi(\cdot)$ є λ_- та $-\lambda_+$. Тому з урахуванням припущення 2 так само, як і при доведенні зазначеної леми, знаходимо

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{e^{\alpha t} \xi(t)} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\alpha s} \xi(s) \sigma(\|x_0(s) + \xi(s) y_*(s)\|) ds = \lim_{t \to \infty} \frac{\sigma(\|x_0(t) + \xi(t) y_*(t)\|)}{\alpha + \dot{\xi}(t)/\xi(t)} = 0,$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{e^{-\alpha t} \xi(t)} \int\limits_{t}^{\infty} e^{-\alpha s} \xi(s) \sigma(\|x_0(s) + \xi(s) y_*(s)\|) ds = \lim_{t \to \infty} \frac{\sigma(\|x_0(t) + \xi(t) y_*(t)\|)}{\alpha - \dot{\xi}(t)/\xi(t)} = 0,$$

звідки $\lim_{t \to \infty} \|y_*(t)\| = \lim_{t \to \infty} \big\| \mathcal{G}[y_*](t) \big\| = 0$. Зрозуміло, що й $\lim_{t \to -\infty} \|y_*(t)\| = 0$.

Насамкінець зауважимо, що отримані результати для нелінійностей певного типу дають змогу знаходити розв'язки досліджуваної крайової задачі, які не є близькими до розв'язку $x_0(\cdot)$ відповідної лінеаризованої задачі, але мають таку саму асимптотику при $t \to \pm\infty$, що й $x_0(\cdot)$. Відповідним прикладам буде присвячено окрему статтю.

Література

1. Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, Москва (1967).
2. Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, Москва (1970).
3. Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, В. Л. Кулик, *Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова*, Наук. думка, Киев (1990).
4. A. M. Samoilenko, *Elements of the mathematical theory of multi-frequency oscillations*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht etc. (1991).
5. А. М. Самойленко, *Об экспоненциальной дихотомии на $\mathbb{R}$ линейных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$*, Укр. мат. журн., **53**, № 3, 356 – 371 (2001).
6. R. P. Agarwal, D. O'Regan, *Infinite interval problems for differential*, Difference and Integral Equations, Kluwer Academic, Dordrecht (2001).
7. А. М. Самойленко, А. А. Бойчук, Ан. А. Бойчук, *Ограниченные на всей оси решения линейных слабовозмущенных систем*, Укр. мат. журн., **54**, № 11, 1517 – 1530 (2002).
8. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems*, VSP, Utrecht; Boston (2004).
9. О. А. Бойчук, В. П. Журавльов, О. О. Покутний, *Обмежені розв'язки еволюційних рівнянь*, Укр. мат. журн., **70**, № 1, 7 – 28. (2018)
10. Э. Мухамадиев, Х. Нажмиддинов, Б. Н. Садовский, *Применение принципа Шаудера – Тихонова в задаче об ограниченных решениях дифференциальных уравнений*, Функцион. анализ и его прил., **6**, № 6, 83 – 84 (1972).
11. Э. М. Мухамадиев, *Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений*, Мат. заметки, **30**, № 3, 443 – 460 (1981).
12. В. Е. Слюсарчук, *Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов*, Мат. сб., **116**, № 4, 483 – 501 (1981).
13. О. А. Иванов, *Теорема Тихонова – Шаудера и существование ограниченных решений квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений*, Зап. науч. семинаров ПОМИ, **352**, 114 – 119 (2008).
14. Р. Эдвардс, *Функциональный анализ*, Мир, Москва (1969).
15. L. Barreira, Ya. Pesin, *Nonuniform hyperbolicity*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **115**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2007).
16. L. Barreira, C. Valls, *Stability of nonautonomous differential equations*, Lect. Notes Math., 1926, Springer, Berlin (2008).
17. D. Dragičević, W. Zhang, W. Zhang, *Smooth linearization of nonautonomous difference equations with a nonuniform dichotomy*, Math. Z., **292**, 1175 – 1193 (2019).

Одержано 30.12.20