УДК 517.938

ФУНКЦІЯ ГРІНА – САМОЙЛЕНКА ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ

В. Л. Кулик

Сілез. техн. ун-т,
вул. Академічна 2а, Глівіце, 44-100, Польща
e-mail: Viktor.Kulyk@polsl.pl

Н. В. Степаненко

Нац. техн. ун-т України "КПІ ім. І. Сікорського"
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: nataliya.stepanenko@lll.kpi.ua

We consider criteria for the existence of the Green – Samoilenko function for linear extensions of dynamical systems on a torus. Structures of Lyapunov functions and Green – Samoilenko functions are analyzed.

Розглядаються критерії існування функції Гріна – Самойленка для лінійних розширень динамічних систем на торі. Аналізуються конструкції функцій Ляпунова і функцій Гріна – Самойленка.

Систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \tag{1}$$

де $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, називають лінійним розширенням динамічної системи на торі. Векторна функція $a(\varphi) = \{a_1(\varphi), \dots, a_m(\varphi)\}$, $m \geq 1$, є 2π-періодичною по кожній змінній φ_i, $i = \overline{1,m}$, і задовольняє умову Ліпшиця. Ця умова дозволяє стверджувати, що початкова задача Коші $\dfrac{d\varphi}{dt} = a(\varphi)$, $\varphi|_{t=0} = \varphi_0$ має єдиний розв'язок $\varphi_t(\varphi_0)$. Очевидно, цей розв'язок $\varphi_t(\varphi_0)$ завжди визначений при всіх $t \in R$. Матриця $A(\varphi)$ є $(n \times n)$-вимірною, її елементами є неперервні дійсні скалярні функції, 2π-періодичні за кожною змінною φ_i, $A(\varphi) \in C^0(T_m)$.

Нормовану фундаментальну матрицю лінійної системи $\dfrac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi_0))x$ з параметрами φ_0 позначимо $\Omega^t_\tau(\varphi_0)$, $\Omega^t_\tau(\varphi_0)\big|_{t=\tau} = I_n$, де I_n — одинична n-вимірна матриця. Далі будемо використовувати такі позначення: $\langle y, x\rangle = \sum_{i=1}^n y_i x_i$ — скалярний добуток в R^n, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$ — норма матриці A, $C^1(T_m)$ — простір дійсних функцій $F(\varphi)$ неперервно диференційовних і 2π-періодичних за кожною змінною φ_i, $i = \overline{1,m}$.

Означення. *Система (1) має функцію Гріна – Самойленка $G_0(\tau, \varphi)$ задачі про інваріантні тори, якщо існує така неперервна матриця $\mathrm{C}(\varphi) \in \mathrm{C}^0(T_m)$, при якій функція*

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega^0_\tau(\varphi)\mathrm{C}\left(\varphi_\tau(\varphi)\right), & \tau \leq 0, \\ \Omega^0_\tau(\varphi)\left[\mathrm{C}\left(\varphi_\tau(\varphi)\right) - I_n\right], & \tau > 0, \end{cases} \tag{2}$$

задовольняє оцінку $\left\|G_0(\tau,\varphi)\right\| \leq K\exp\{-\gamma|\tau|\}$ *з додатними постійними* K, γ, *незалежними від* $\tau \in R$ *і* $\varphi \in T_m$. *Якщо існує єдина така функція (2), то систему (1) називають регулярною. Якщо ж існує безліч різних функцій Гріна – Самойленка (2), то систему (1) називають слабко регулярною.*

Слід зауважити, що вперше функція Гріна (2) з'явилась у відомій роботі А. М. Самойленка [1]. З того часу багато його учнів досліджували цю функцію для різного вигляду систем (1) у різних просторах. Опубліковано велику кількість статей і цілий ряд важливих для цієї теорії книг (деякі з них наведено в [2 – 15]).

Нагадаємо відоме твердження.

Теорема [3]. *Для того щоб система (1) була регулярною, необхідно і достатньо, щоб існувала невироджена квадратична форма*

$$V = \langle S(\varphi)x, x\rangle, \tag{3}$$

$S^T(\varphi) \equiv S(\varphi),\ \det S(\varphi) \neq 0\ \ \forall\varphi \in T_m,\ S(\varphi) \in C^1(T_m)$, *похідна якої вздовж розв'язків системи (1) є додатно визначеною, тобто виконується нерівність*

$$\left\langle \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi) + S(\varphi)A(\varphi) + A^T(\varphi)S(\varphi)\right]x, x\right\rangle \geq \|x\|^2. \tag{4}$$

Оскільки матриця $S(\varphi)$ є невиродженою, то для оберненої матриці $\overline{S}(\varphi) = S^{-1}(\varphi)$ з нерівності (4) випливає нерівність

$$\left\langle \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \overline{S}(\varphi)}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi) - \overline{S}(\varphi)A^T(\varphi) - A(\varphi)\overline{S}(\varphi)\right]y, y\right\rangle \leq -\beta\|y\|^2, \tag{5}$$

де $\beta = \mathrm{const} > 0$. Нерівність (5) означає, що похідна квадратичної форми $W = \langle \overline{S}(\varphi)y, y\rangle$ вздовж розв'язків спряженої до (1) системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dy}{dt} = -A^T(\varphi)y \tag{6}$$

є від'ємно визначеною. Таким чином, якщо система (1) є регулярною, то й спряжена система (6) також буде регулярною. Причому функція Гріна $\overline{G_0}(\tau,\varphi)$ для системи (6) пов'язана з функцією Гріна (2) такою тотожністю $\overline{G_0}(\tau,\varphi) \equiv -[G_\tau(0,\varphi)]^T$.

Якщо припустити існування симетричної матриці $\overline{S}(\varphi) \in \mathrm{C}^1(T_m)$, яка задовольняє нерівність (5) та $\det\overline{S}(\varphi_0) = 0$ для деякого значення $\varphi_0 \in T_m$, то система (1) буде мати безліч різних функцій Гріна – Самойленка (2), тобто буде слабко регулярною, а спряжена система (6) не матиме жодної такої функції. При цьому розширена система

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - A^T(\varphi)y \end{cases} \tag{7}$$

буде регулярною.

Розглянемо приклад регулярної системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sin\varphi, \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\cos\varphi, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y\cos\varphi. \end{cases} \tag{8}$$

Невироджену квадратичну форму (3) вибираємо у вигляді

$$V = \lambda xy - y^2 \cos\varphi. \tag{9}$$

Похідна цієї форми вздовж розв'язків системи (8) при значеннях параметра $\lambda > 1$ є додатно визначеною: $\dot{V} \geq (\lambda - 1)x_1^2 + x_2^2$. Таким чином, система (8) має єдину функцію Гріна – Самойленка (2). Для запису цієї функції знайдемо матрицю проектування $\mathrm{C}(\varphi)$. Для цього спочатку запишемо лінійну систему $\dfrac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi_0))x$ з параметром φ_0. Маємо

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^{-t}\cos^2\dfrac{\varphi_0}{2} - e^t\sin^2\dfrac{\varphi_0}{2}}{e^{-t}\cos^2\dfrac{\varphi_0}{2} + e^t\sin^2\dfrac{\varphi_0}{2}}x, \qquad \frac{dy}{dt} = x - \frac{e^{-t}\cos^2\dfrac{\varphi_0}{2} - e^t\sin^2\dfrac{\varphi_0}{2}}{e^{-t}\cos^2\dfrac{\varphi_0}{2} + e^t\sin^2\dfrac{\varphi_0}{2}}y.$$

Легко знаходимо розв'язки цієї системи:

$$x = \frac{x(0)}{e^{-t}\cos^2\dfrac{\varphi_0}{2} + e^t\sin^2\dfrac{\varphi_0}{2}}, \tag{10}$$

$$y = \left(e^{-t}\cos^2\frac{\varphi_0}{2} + e^t\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right)\left[y(0) + x(0)\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\left(e^{-\tau}\cos^2\dfrac{\varphi_0}{2} + e^{\tau}\sin^2\dfrac{\varphi_0}{2}\right)^2}\right]. \tag{11}$$

Звідси отримуємо рівняння підпросторів

$$E^+ : y(0) + x(0)k^+ = 0, \qquad E^- : y(0) - x(0)k^+ = 0,$$

де позначено

$$k^+ = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\tau}{\left(e^{-\tau}\cos^2\dfrac{\varphi_0}{2} + e^{\tau}\sin^2\dfrac{\varphi_0}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\sin^2\dfrac{\varphi_0}{2}},$$

$$k^- = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{d\tau}{\left(e^{-\tau}\cos^2\dfrac{\varphi_0}{2} + e^{\tau}\sin^2\dfrac{\varphi_0}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\cos^2\dfrac{\varphi_0}{2}}.$$

Використовуючи рівняння підпросторів, знаходимо матрицю проектування на підпростір E^+ вздовж підпростору E^-:

$$\mathrm{C}(\varphi_0) = \frac{1}{k^+ + k^-}\begin{pmatrix} k^- & -1 \\ -k^+k^- & k^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\dfrac{\varphi_0}{2} & -2\sin^2\dfrac{\varphi_0}{2}\cos^2\dfrac{\varphi_0}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \cos^2\dfrac{\varphi_0}{2} \end{pmatrix}.$$

Звідси отримуємо суперпозицію

$$\mathrm{C}\left(\varphi_\tau(\varphi)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{\tau}\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}{e^{-\tau}\cos^2\dfrac{\varphi}{2} + e^{\tau}\sin^2\dfrac{\varphi}{2}} & \dfrac{-2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}{\left(e^{-\tau}\cos^2\dfrac{\varphi}{2} + e^{\tau}\sin^2\dfrac{\varphi}{2}\right)^2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{e^{-\tau}\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}{e^{-\tau}\cos^2\dfrac{\varphi}{2} + e^{\tau}\sin^2\dfrac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}.$$

Обчислюючи інтеграл

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\left(e^{-\tau}\cos^2\frac{\varphi_0}{2}+e^{\tau}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right)^2}=\frac{e^t-e^{-t}}{2\left(e^{-\tau}\cos^2\frac{\varphi_0}{2}+e^{\tau}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right)},$$

із розв’язків (10), (11) складаємо фундаментальну матрицю

$$X(t)=\begin{pmatrix}\left(e^{-t}\cos^2\frac{\varphi_0}{2}+e^{t}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right)^{-1} & 0\\ \frac{e^t-e^{-t}}{2} & e^{-t}\cos^2\frac{\varphi_0}{2}+e^{t}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\end{pmatrix}.$$

Звідси отримуємо нормовану в точці $t=\tau$ фундаментальну матрицю розв’язків

$$\Omega_\tau^t(\varphi_0)=X(t)X^{-1}(\tau)=\begin{pmatrix}\dfrac{e^{-\tau}\cos^2\frac{\varphi_0}{2}+e^{\tau}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}{e^{-t}\cos^2\frac{\varphi_0}{2}+e^{t}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}} & 0\\ \omega(t,\tau) & \dfrac{e^{-t}\cos^2\frac{\varphi_0}{2}+e^{t}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}{e^{-\tau}\cos^2\frac{\varphi_0}{2}+e^{\tau}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}\end{pmatrix},$$

де позначено

$$\omega(t,\tau)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}\left(e^{-\tau}\cos^2\frac{\varphi_0}{2}+e^{\tau}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right)-\frac{e^\tau-e^{-\tau}}{2}\left(e^{-t}\cos^2\frac{\varphi_0}{2}+e^{t}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right).$$

Тепер можемо записати функцію Гріна – Самойленка (2):

$$G_0(\tau,\varphi)=\begin{cases}\begin{pmatrix}\sin^2\frac{\varphi}{2} & -\dfrac{2\cos^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}+e^{2\tau}\sin^2\frac{\varphi}{2}}\\ -\frac{1}{2} & \dfrac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}+e^{2\tau}\sin^2\frac{\varphi}{2}}\end{pmatrix}e^{\tau}, & \tau\le 0,\\ \begin{pmatrix}-\cos^2\frac{\varphi}{2} & -\dfrac{2\cos^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}{e^{-2\tau}\cos^2\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}}\\ -\frac{1}{2} & \dfrac{-\sin^2\frac{\varphi}{2}}{e^{-2\tau}\cos^2\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}}\end{pmatrix}e^{-\tau}, & \tau>0.\end{cases}$$

Подальший приклад регулярної системи

$$\frac{d\varphi}{dt}=\sin\varphi,\qquad \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x\cos\varphi,\\ \dfrac{dy}{dt}=x(\sin\varphi)^{2k}-y\cos\varphi, \quad k\in N,\end{cases}\tag{12}$$

показує, що не завжди легко вдається знайти таку квадратичну форму, похідна якої вздовж розв'язків системи (12) є знаковизначеною. Пропонуємо для системи (12) таку квадратичну форму шукати у вигляді

$$V = x^2 \cos\varphi + 2\left(p + \frac{1}{2k}\sin^{2k}\varphi\right)xy - y^2\cos\varphi, \tag{13}$$

де p — додатний параметр. Виберемо цей параметр так, щоб похідна квадратичної форми (13) вздовж розв'язків системи (12) була б додатно визначеною. Обчислюючи цю похідну, отримуємо

$$\dot V = x^2\left[-\sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi + 2\sin^{2k}\varphi\left(p + \frac{1}{2k}\sin^{2k}\varphi\right)\right] + y^2\left(\sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi\right) \ge$$

$$\ge x^2\left[2p\sin^{2k}\varphi - 3\sin^2\varphi + 2\right] + y^2. \tag{14}$$

Покажемо, що достатньо вибрати значення параметра $p = 3^k$ і тоді буде виконуватися нерівність

$$2{\cdot}3^k \sin^{2k}\varphi - 3\sin^2\varphi + 2 \ge 1 \quad \forall\varphi \in R. \tag{15}$$

Позначимо $\sigma = \sin^2\varphi$ і розглянемо функцію $f(\sigma) = 2p\sigma^k - 3\sigma + 2$. При значеннях $\sigma \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ виконується нерівність $f(\sigma) \ge -3\sigma + 2 \ge 1$. Якщо ж $\sigma \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$, то

$$f(\sigma) \ge 2p\sigma^k - 3 + 2 = 2p\sigma^k - 1 \ge 2p\left(\frac{1}{3}\right)^k - 1 \ge 1 \quad \text{при} \quad p \ge 3^k.$$

Таким чином, при значенні параметра $p = 3^k$ похідна квадратичної форми (13) вздовж розв'язків системи (12) є додатно визначеною. Оскільки квадратична форма (13) є невиродженою, то система (12) має єдину функцію Гріна – Самойленка.

Звернемо увагу на те, що коли в нерівності (4) матриця $S(\varphi) \equiv S$ є постійною, то, очевидно, вона буде невиродженою й система (1) буде регулярною при будь-яких функціях $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(T_m)$. Виявилося, що система (1) може бути регулярною при будь-яких функціях $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(T_m)$, а постійної матриці S, яка б задовольняла нерівність (4), не існує. У цьому можна переконатися, досліджуючи систему рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\sin\varphi + y\cos^2\varphi, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y\sin\varphi. \end{cases}$$

У випадку, коли в системі (1) матриця $A(\varphi) \equiv A$ є постійною, система (1) буде регулярною тільки тоді, коли дійсні частини всіх власних значень матриці A відмінні від нуля. Таким чином, якщо в цьому випадку $\det A = 0$, то система (1) функції Гріна – Самойленка не матиме. Виявилося, що у випадку змінної матриці $A(\varphi)$ можливий випадок, коли $\det A(\varphi) \equiv 0$ $\forall\varphi \in T_m$ і система (1) є регулярною. Це видно із системи

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2, \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\cos\varphi + y(\sin\varphi - 1), \\ \dfrac{dy}{dt} = x(\sin\varphi + 1) - y\cos\varphi. \end{cases}$$

Похідна квадратичної форми $V = x^2 \cos\varphi + 2xy \sin\varphi - y^2 \cos\varphi$ вздовж розв'язків записаної вище системи є додатно визначеною $\dot{V} = 2(x^2 + y^2)$.

Продовження досліджень властивості регулярності розширених систем (7) привело до розгляду систем такого вигляду:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad S(\varphi)\frac{dx}{dt} = \left[B(\varphi) + M(\varphi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi)\right] x, \tag{16}$$

де $S(\varphi)$ — деяка фіксована симетрична матриця, невироджена й неперервно диференційовна за кожною змінною φ_i, тобто належить простору $C^1(T_m)$, $B(\varphi)$ — неперервна симетрична матриця, $B(\varphi) \in C^0(T_m)$, яка задовольняє нерівність

$$\langle B(\varphi)x, x\rangle \geq 0, \tag{17}$$

$M(\varphi)$ — неперервна кососиметрична матриця, $M^T(\varphi) \equiv -M(\varphi)$, $M(\varphi) \in C^0(T_m)$.

Справджується таке твердження.

Теорема 1. *Нехай система рівнянь (16) при* $B(\varphi) \equiv 0$ *має хоча б одну функцію Гріна–Самойленка. Тоді ця функція буде єдиною, кількість змінних* x *буде парною* ($x \in R^n$) $n = 2k$ *і при кожній симетричній матриці* $B(\varphi) \in C^0(T_m)$, *яка задовольняє нерівність (17), система (16) буде регулярною.*

Тепер припустимо, що в системі (16) невироджена симетрична матриця $S(\varphi) \equiv S$ є постійною, а симетрична матриця $B(\varphi)$ має вигляд

$$B(\varphi) = \sum_{j=1}^{k} B_j(\varphi)\nu_j(\varphi),$$

де $\nu_j(\varphi)$ — неперервні скалярні функції, які задовольняють нерівності $\nu_j(\varphi) \geq 0$. Це можуть бути функції $|\cos\varphi|$, $\cos^{2k}\varphi$ і т. д. Неперервні симетричні матриці $B_j(\varphi)$ задовольняють умову

$$\sum_{j=1}^{k} \langle B_j(\varphi)x, x\rangle \geq \beta\|x\|^2, \quad \beta = \text{const} > 0.$$

Після цих припущень система (16) набирає вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad S\frac{dx}{dt} = \left[\sum_{j=1}^{k} B_j(\varphi)\nu_j(\varphi) + M(\varphi)\mu(\varphi)\right] x, \tag{18}$$

де $\mu(\varphi)$ — деяка скалярна функція, $\mu(\varphi) \in C^1(T_m)$, $M(\varphi)$ — неперервна кососиметрична матриця.

Позначимо

$$\nu_0(\varphi) = \min\{\nu_1(\varphi),\ \nu_2(\varphi), \ldots, \nu_k(\varphi)\},$$

$$\overline{\nu}(\varphi) = \max\{\nu_1(\varphi),\ \nu_2(\varphi), \ldots, \nu_k(\varphi)\}.$$

Справджується таке твердження.

Теорема 2. *Нехай в системі (18) скалярні функції* $\nu_j(\varphi),\ \mu(\varphi)$ *такі, що для будь-яких постійних* $L_1,\ L_2$ *завжди знайдеться таке значення параметра* $p>0$, *при якому виконується оцінка*

$$p\nu_0(\varphi)+\mu^2(\varphi)-L_1\sum_{i=1}^{m}\left|\frac{\partial\mu(\varphi)}{\partial\varphi_i}\right|-L_2\overline{\nu}(\varphi)\geq\varepsilon,\quad \varepsilon=\mathrm{const}>0, \tag{19}$$

і нехай існує постійна симетрична матриця Θ, *яка задовольняє нерівність*

$$\left\langle\left[\Theta S^{-1}M(\varphi)-M(\varphi)S^{-1}\Theta\right]x,x\right\rangle\geq\|x\|^2. \tag{20}$$

Тоді система (18) буде регулярною при кожній функції $a(\varphi)\in C_{\mathrm{Lip}}(T_m)$. *При цьому похідна квадратичної форми* $p\langle Sx,x\rangle+\langle\Theta x,x\rangle\mu(\varphi)$ *вздовж розв'язків системи (18) буде додатно визначеною при достатньо великих значеннях параметра* $p>0$.

Наведемо приклад, який ілюструє застосування теореми 2.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(\varphi),\qquad \frac{dx_1}{dt}=x_1\sin\varphi+3x_2\cos^4\varphi,\qquad \frac{dx_2}{dt}=2x_1\cos^2\varphi-x_2\sin\varphi. \tag{21}$$

Друге й третє рівняння запишемо у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\cos^2\varphi+\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}\cos^4\varphi+\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\sin\varphi\right]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}.$$

Порівнюючи з системою (18), у розглядуваному випадку маємо

$$S=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad B_1=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad B_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix},\qquad M=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},$$

$$\nu_1=\cos^2\varphi,\qquad \nu_2=\cos^4\varphi,\qquad \mu=\sin\varphi.$$

Матрицю Θ, яка задовольняє нерівність (20), вибираємо у вигляді

$$\Theta=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

Перевіримо оцінку (19). При цьому ліва сторона згаданої оцінки має вигляд

$$\begin{aligned}&p\cos^4\varphi+\sin^2\varphi-L_1|a|_0|\cos\varphi|-L_2\cos^2\varphi\geq\\&\geq p\cos^4\varphi+\sin^2\varphi-L|\cos\varphi|,\end{aligned} \tag{22}$$

де $|a|_0=\max\left|a(\varphi)\right|,\ L=L_1|a|_0+L_2$.

Позначаючи $|\cos\varphi|=s$, праву частину нерівності (22) запишемо у вигляді

$$f(s)=ps^4-s^2-Ls+1,\quad s\in[0,1]. \tag{23}$$

Оскільки $f(0)=1$, то, очевидно, існує таке значення $\delta>0$, що $f(s)\geq\dfrac{1}{2}$ при всіх $s\in[0,\delta]$. Знайдемо одне із можливих значень δ. Запишемо нерівності

$$f(s)=ps^4-s^2-Ls+1\geq-s^2-Ls+1\geq-s-Ls+1.$$

Звідси видно, що для виконання нерівності $f(s) \geq \dfrac{1}{2}$ достатньо вибирати s із відрізка $\left[0, \dfrac{1}{2(L+1)}\right]$, $\delta = \dfrac{1}{2(L+1)}$. Тепер розглянемо функцію (23) на відрізку $[\delta, 1]$. Маємо $f(s) = ps^4 - s^2 - Ls + 1 \geq p\delta^4 - L \geq \dfrac{1}{2}$. Звідси випливає, що коли вибрати значення параметра $p \geq \delta^{-4}\left(L + \dfrac{1}{2}\right) = 8(2L+1)(L+1)^4$, тоді буде виконуватися нерівність $f(s) \geq \dfrac{1}{2}$ при всіх $s \in [0, 1]$. Таким чином, у нашому випадку оцінка (19) виконується. Із теореми 2 тепер можна зробити висновок, що записана система (21) є регулярною при будь-яких скалярних функціях $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(T_1)$.

Література

1. А. М. Самойленко, *О сохранении инвариантного тора при возмущении*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **34**, № 6, 1219 – 1240 (1970).
2. А. М. Самойленко, В. Л. Кулик, *Экспоненциальная дихотомия инвариантного тора динамических систем*, Дифференц. уравнения, **15**, № 8, 1434 – 1444 (1979).
3. Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, В. Л. Кулик, *Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова*, Наук. думка, Киев (1990).
4. Yu. A. Mitropolsky, A. M. Samoilenko, V. L. Kulik, *Dichotomies and stability in nonautonomous linear systems*, Stability and control: theory, methods and applications, **14**, Taylor & Francis, London (2003).
5. А. М. Самойленко, *Элементы математической теории многочастотных колебаний*, Наука, Москва (1987).
6. А. М. Самойленко, *О некоторых проблемах теории возмущений гладких инвариантных торов динамических систем*, Укр. мат. журн., **46**, № 12, 1665 – 1699 (1994).
7. А. М. Самойленко, *К вопросу существования единственной функции Грина линейного расширения динамической системы на торе*, Укр. мат. журн., **53**, № 4, 513 – 521 (2001).
8. А. А. Бойчук, *Условие существования единственной функции Грина – Самойленко задачи об инвариантном торе*, Укр. мат. журн., **53**, № 4, 556 – 559 (2001).
9. А. М. Самойленко, І. М. Грод, *Про регулярні лінійні розширення динамічних систем на торі*, Нелін. коливання, № 1, 95 – 103 (1998).
10. І. М. Грод, В. Л. Кулик, *Про зв'язок функції Гріна і Ляпунова в лінійних розширеннях динамічних систем*, Укр. мат. журн., **66**, № 4, 551 – 557 (2014).
11. Kenneth J. Palmer, *On the reducibility of almost periodic systems of linear differential systems*, J. Differential Equations, **36**, № 3, 374 – 390 (1980).
12. М. О. Перестюк, В. Ю. Слюсарчук, *Оператор Гріна – Самойленка в теорії інваріантних множин нелінійних диференціальних рівнянь*, Укр. мат. журн., **60**, № 7, 948 – 957 (2008).
13. В. А. Лагода, І. О. Парасюк, *Теорема існування інваріантного перерізу над $\mathbb{R}^m$ індефінітно монотонної системи в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$*, Укр. мат. журн., **65**, № 1, 103 – 118 (2013).
14. W. A. Coppel, *Dichotomies and Lyapunov functions*, J. Differential Equations, **52**, № 1, 58 – 65 (1984).
15. V. Kulyk, G. Kulyk, N. Stepanenko, *Regularity of linear systems of differential equations on the axes and pencils of quadratic forms*, Commun. Adv. Math. Sci., Vol. II, № 3, 176 – 181 (2019); https://doi.org/10.33434/cams.550428

Одержано 25.12.20