

ДИНАМІКА ТРЬОХ ТІЛ, РОЗМІЩЕНИХ НА ПРЯМІЙ, З УРАХУВАННЯМ СКІНЧЕННОСТІ ШВИДКОСТІ ГРАВІТАЦІЇ

В. Ю. Слюсарчук

*Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, Україна
e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com*

Given the finiteness of the speed of gravity, the dynamics of three bodies located on a straight line is studied in the case where the masses of external bodies and their distances to the central body are the same. It is shown that the motion of these bodies is unstable and the escape velocity is greater than the corresponding velocity of classical celestial mechanics.

З урахуванням скінченності швидкості гравітації досліджено динаміку трьох тіл, розміщених на прямій, у випадку, коли маси зовнішніх тіл і їхні відстані до центрального тіла є однаковими. Показано, що рух цих тіл є нестійким і друга космічна швидкість більша відповідної швидкості класичної небесної механіки.

1. Вступ. У теорії гравітації Ньютона швидкість гравітації c_g не входить до жодної формули і вважається нескінченно великою ($c_g = \infty$).

У загальній теорії відносності А. Ейнштейна для швидкості гравітації приймається, що $c_g = c$, де c — швидкість світла [1, 2].

Швидкість гравітації можна оцінити за швидкістю передачі впливу гравітаційного поля на результати вимірювань. Так, у 2002 р. Копейкін і Фомалонт провели експеримент на основі радіоінтерферометрії, в якому випромінювання від далекого квазара QSO J0842+1835, що проходило поблизу Юпітера, реєструвалося радіотелескопами на Землі [3]. Аналіз даних експерименту дав швидкість гравітації, близьку по величині до швидкості світла, з точністю порядку 20 %.

Другий спосіб вимірювання швидкості гравітації пов'язаний з фіксацією гравітаційних хвиль від далеких зіркових джерел одночасно зі світловим сигналом. Перше таке вимірювання в 2017 р. отримали для гравітаційної хвилі GW170817, породженої злиттям двох нейтронних зірок (відстань до джерела 13×10^7 світлових років), з використанням лазерно-інтерферометричних гравітаційно-хвильових детекторів детекторної сітки LIGO-Virgo. За цією подією відхилення швидкості гравітаційних хвиль від швидкості світла, якщо таке відхилення існує, знаходиться в межах від -3×10^{-15} до $+0,7 \times 10^{-15}$, тобто сумісне з нулем в межах похибки [4].

У цій статті дослідимо рух трьох тіл, розміщених у кожний момент часу на прямій із залежним від часу напрямком, у випадку, коли маси зовнішніх тіл і їхні відстані до центрального тіла є однаковими. При дослідженні руху цих тіл будемо враховувати скінченність швидкості гравітації c_g , вважаючи, що $c_g = c$. Підґрунтям для використання цієї рівності є наведені вище дані. Завдяки такій вимозі математичною моделлю руху тіл є не система звичайних диференціальних рівнянь, як у класичній небесній механіці [5], а система диференціальних рівнянь із відхилювальним аргументом, як у [6], і для динаміки тіл характерні властивості, які неможливі у випадку $c_g = \infty$.

2. Закон всесвітнього тяжіння зі скінченною швидкістю гравітації. Розглянемо дві матеріальні точки M_1 і M_2 з масами m_1 і m_2 відповідно. Згідно із законом всесвітнього тяжіння та другим законом Ньютона ці точки здійснюють рух у просторі. Рух точок будемо розглядати по відношенню до прямокутної системи координат x, y, z з початком координат у деякій точці O . Вважатимемо, що система координат є інерціальною і на кожну точку діє тільки сила тяжіння, породжена іншою точкою. Положення точок M_1 і M_2 в момент часу t визначається їхніми радіусами-векторами $\vec{r}_1(t)$ і $\vec{r}_2(t)$.

Для дослідження руху точок M_1 і M_2 потрібно знати сили, з якими кожна з цих точок притягує іншу.

Якби швидкість гравітації була нескінченною, як у теорії Ньютона, то на підставі закону всесвітнього тяжіння в момент часу t точка M_2 притягувала б точку M_1 із силою

$$\vec{F}_{2,1,\infty}(t) = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)|^3} (\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)), \quad (1)$$

де G — гравітаційна стала і $|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)|$ — евклідова довжина вектора $\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$. Напрямок цієї сили збігається з напрямком вектора $\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)$.

Аналогічно в момент часу t точка M_1 притягувала б точку M_2 з силою

$$\vec{F}_{1,2,\infty}(t) = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)|^3} (\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)).$$

Згідно з викладками з п. 1 швидкість гравітації є скінченною. Тому дія однієї точки на іншу здійснюється з урахуванням запізнювання гравітаційного поля.

Пояснимо вплив цього запізнювання на сили, з якими притягуються розглянуті точки M_1 і M_2 .

Завдяки скінченній швидкості гравітації на точку M_1 діє інша сила

$$\vec{F}_{2,1,c}(t) = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_2(t - \tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t)|^2} (\vec{r}_2(t - \tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t)), \quad (2)$$

де запізнення гравітації $\tau_{2,1}(t)$ в (2) задовольняє співвідношення

$$c\tau_{2,1}(t) = |\vec{r}_2(t - \tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t)| \quad (3)$$

і c — швидкість гравітації.

Справді, нехай точки M_2 і M_1 рухаються по кривим, частини яких зображені на рис. 1, зі швидкостями $\vec{v}_2(t) = \dot{\vec{r}}_2(t)$ і $\vec{v}_1(t) = \dot{\vec{r}}_1(t)$.

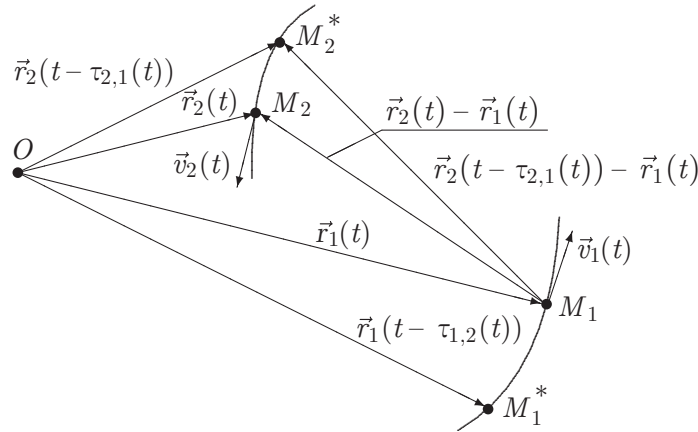
Нехай точка M_2 в момент часу $t - \tau_{2,1}(t)$, де $\tau_{2,1}(t)$ задовольняє (3), збігається з точкою M_2^* . Проміжку часу $[t - \tau_{2,1}(t), t]$ відповідає крива $M_2^*M_2$, по якій рухається точка M_2 . Цього проміжку часу достатньо, щоб згідно з (3) гравітаційне поле зі швидкістю c поширилося з точки M_2^* в точку M_1 .

Отже, в момент часу t на точку M_1 діє не сила (1), а сила (2).

Зазначимо, що притягувальною точкою для точки M_1 в момент часу t є не точка M_2 , а точка M_2^* .

Аналогічно на точку M_2 діє сила

$$\vec{F}_{1,2,c}(t) = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1(t - \tau_{1,2}(t)) - \vec{r}_2(t)|^3} (\vec{r}_1(t - \tau_{1,2}(t)) - \vec{r}_2(t)). \quad (4)$$

Рис. 1. Розміщення точок M_1 і M_2 в моменти часу t і $t - \tau_{2,1}(t)$.

Притягувальною точкою для точки M_2 в момент часу t є не точка M_1 , а точка M_1^* , що визначається вектором $\vec{r}_1(t - \tau_{1,2}(t))$.

Запізнення гравітації $\tau_{1,2}(t)$ в (4) задовольняє співвідношення

$$c\tau_{1,2}(t) = |\vec{r}_1(t - \tau_{1,2}(t)) - \vec{r}_2(t)|. \quad (5)$$

Існування функцій $\tau_{2,1}(t)$ і $\tau_{1,2}(t)$, що задовольняють співвідношення (3) і (5), показано в [6]. Завдяки теоремам про неявну функцію [7, с. 449–453] ці функції є неперервними й диференційовними.

Зазначимо, що сили $\vec{F}_{2,1,c}(t)$ і $\vec{F}_{1,2,c}(t)$ можуть відрізнятися за величиною і не бути колінеарними. Також на підставі (3) і (5) для кожного моменту часу t

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \vec{F}_{2,1,c}(t) = \vec{F}_{2,1,\infty}(t) \quad \text{і} \quad \lim_{c \rightarrow +\infty} \vec{F}_{1,2,c}(t) = \vec{F}_{1,2,\infty}(t).$$

Отже, закон всесвітнього тяжіння Ньютона відкриває шлях більш загальному закону (див. (2)–(5)) і збігається з ним у граничному випадку (при $c = +\infty$).

Зазначимо, що для використання формул (2) і (4) потрібна інформація про векторні функції $\vec{r}_1(t)$ і $\vec{r}_2(t)$ та скалярні функції $\tau_{2,1}(t)$ і $\tau_{1,2}(t)$. Ці функції можна знаходити, використовуючи диференціальні рівняння з відхилювальним аргументом, що описують рух точок M_1 і M_2 , й отримуються за допомогою другого закону Ньютона [8].

3. Математична модель руху скінченного числа матеріальних точок. Приділимо увагу математичній моделі руху точок M_i , $i = \overline{1, n}$, з масами m_i , $i = \overline{1, n}$, відповідно, де $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Рух цих точок будемо розглядати відносно прямокутної системи координат x, y, z з початком координат у деякій точці O . Вважатимемо, що ця система є інерціальною.

Рух точок M_i , $i = \overline{1, n}$, можна описати деякими векторними функціями $\vec{r}_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, відповідно.

Зафіксуємо довільні точки M_i і M_j , де $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ і $i \neq j$. Згідно з п. 2 точка M_j притягує точку M_i з силою

$$\vec{F}_{j,i,c}(t) = \frac{Gm_j m_i}{|\vec{r}_j(t - \tau_{j,i}(t)) - \vec{r}_i(t)|^3} (\vec{r}_j(t - \tau_{j,i}(t)) - \vec{r}_i(t)), \quad (6)$$

де запізнення гравітації $\tau_{j,i}(t)$ задовольняє співвідношення

$$c\tau_{j,i}(t) = |\vec{r}_j(t - \tau_{j,i}(t)) - \vec{r}_i(t)|. \quad (7)$$

Використаємо силу $\sum_{j \in N_{i,n}} \vec{F}_{j,i,c}(t)$, що діє на точку M_i , породжену точками M_j , $j \in N_{i,n}$, де

$$N_{i,n} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}, \quad i = \overline{1, n},$$

Згідно з другим законом Ньютона для векторних функцій $\vec{r}_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, виконуються рівності

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i(t)}{dt^2} = \sum_{j \in N_{i,n}} \vec{F}_{j,i,c}(t), \quad i = \overline{1, n}.$$

Звідси та з (6) і (7) випливає, що функції $\vec{r}_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, є розв'язками системи диференціальних рівнянь із відхилювальним аргументом та функціональних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{d^2 \vec{r}_i(t)}{dt^2} = \sum_{j \in N_{i,n}} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_j(t - \tau_{j,i}(t)) - \vec{r}_i(t)|^3} (\vec{r}_j(t - \tau_{j,i}(t)) - \vec{r}_i(t)), & i = \overline{1, n}, \\ c\tau_{j,i}(t) = |\vec{r}_j(t - \tau_{j,i}(t)) - \vec{r}_i(t)|, & i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i \neq j. \end{cases} \quad (8)$$

Очевидно, що для кожного значення t

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \tau_{j,i}(t) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i \neq j,$$

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \vec{F}_{j,i,c}(t) = \vec{F}_{j,i,\infty}(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i \neq j,$$

де

$$\vec{F}_{j,i,\infty}(t) = \frac{Gm_j m_i}{|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)|^3} (\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)).$$

Тому система (8) є узагальненням класичної моделі руху точок M_i , $i = \overline{1, n}$,

$$\frac{d^2 \vec{r}_i(t)}{dt^2} = \sum_{j \in N_{i,n}} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)|^3} (\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)), \quad i = \overline{1, n}, \quad (9)$$

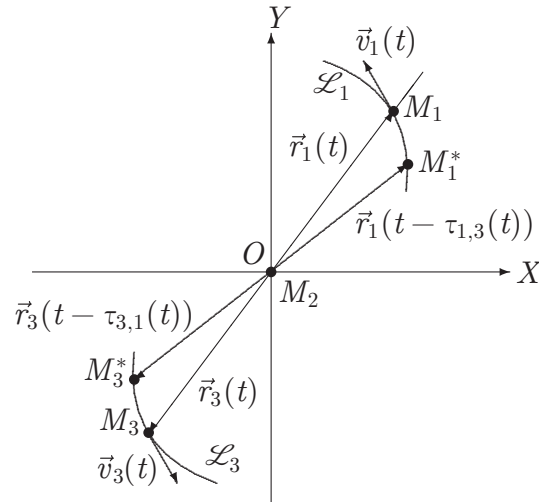
що отримується з (8) при $c = \infty$.

При знаходженні траєкторій руху точок M_i , $i = \overline{1, n}$, потрібно крім системи рівнянь (8) використовувати також початкові або крайові умови (див. [6, 8, 9]). Система (8) разом із цими умовами є математичною моделлю руху точок M_i , $i = \overline{1, n}$, що враховує скінченність швидкості гравітації.

Очевидно, що систему рівнянь (8) з урахуванням початкових умов можна використовувати як математичну модель зоряної системи з $n - 1$ планетами з масами m_i , $i = \overline{2, n}$, що рухаються в силовому полі, породженому зіркою з масою m_1 та планетами.

Зазначимо, що система (8) містить n векторних рівнянь і $n(n - 1)$ скалярних рівнянь. Тому ця система рівносильна системі скалярних рівнянь, число яких збігається з

$$3n + n(n - 1) = n^2 + 2n = (n + 1)^2 - 1.$$

Рис. 2. Розміщення точок M_1 , M_2 і M_3 .

Класична модель (9) руху n матеріальних точок, що містить n векторних рівнянь, рівносильна системі $3n$ скалярних рівнянь.

Звідси та з того, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - 1}{3n} = +\infty,$$

впливає, що якщо навіть не враховувати складність рівнянь системи (8), дослідження системи (8) при великих n є суттєво складнішою задачею, ніж дослідження системи (9).

Не зважаючи на це, можна знайти такі властивості системи (8), яких не має система (9) (див. [6, 9]).

4. Математична модель руху трьох тіл, розміщених у всі моменти часу на прямій. Розглянемо систему (8) у випадку $n = 3$, коли всі точки M_i , $i = \overline{1,3}$, у всі моменти часу t розміщені на прямій, що знаходиться на деякій зафіксованій у просторі площині. Напрямок прямої, очевидно, залежить від t . Вважатимемо, що у зовнішніх точках M_1 і M_3 зосереджено однакову масу m , у внутрішній точці M_2 — масу M і точки M_1 і M_3 в усі моменти руху знаходяться на однаковій відстані до точки M_2 . Таке розміщення точок можливе при виборі певних початкових умов.

Завдяки обмеженням на точки M_i , $i = \overline{1,3}$, інерціальну прямокутну систему координат x, y, tz можна вибрати так, щоб точки M_i , $i = \overline{1,3}$, знаходилися на площині Oxy і початок координат (точка O) у кожний момент часу t збігався з точкою M_2 . Такий вибір системи координат дає можливість досліджувати динаміку розглянутих точок, обмежившись використанням прямокутної системи координат x, y (див. рис. 2).

На рис. 2 зображено частини кривих $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_3$, що симетричні відносно точки O , по яких рухаються відповідні точки M_1 і M_3 , а також вказано швидкості $\vec{v}_1(t)$ і $\vec{v}_3(t)$ руху цих точок, для яких у всі моменти часу t

$$\vec{v}_3(t) = -\vec{v}_1(t) \quad \text{і} \quad \vec{v}_2(t) = \vec{0}.$$

Завдяки (8) рух точок M_i , $i = \overline{1,3}$, описується системою рівнянь

$$\begin{cases} \frac{d^2 \vec{r}_i(t)}{dt^2} = \sum_{j \in \{1,2,3\} \setminus \{i\}} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_j(t - \tau_{j,i}(t)) - \vec{r}_i(t)|^3} (\vec{r}_j(t - \tau_{j,i}(t)) - \vec{r}_i(t)), & i = \overline{1,3}, \\ c\tau_{j,i}(t) = |\vec{r}_j(t - \tau_{j,i}(t)) - \vec{r}_i(t)|, & i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,3}, \quad i \neq j, \\ \vec{r}_3(t) = -\vec{r}_1(t), \\ \vec{r}_2(t) = \vec{0}, \end{cases} \quad (10)$$

де $m_1 = m_3 = m$ і $m_2 = M$.

Ми будемо розглядати систему (10) при $t \geq t_0$, де t_0 — деякий зафіксований момент часу.

Перетворимо систему (10), використавши описане вище розміщення точок.

Згідно з обмеженнями на рух точок M_i , $i = \overline{1,3}$, для всіх $t \geq t_0$

$$\tau_{2,1}(t) = \tau_{2,3}(t) = 0, \quad (11)$$

$$\tau_{1,3}(t) = \tau_{3,1}(t) \quad (12)$$

і

$$\tau_{1,2}(t) = \tau_{3,2}(t). \quad (13)$$

З урахуванням рівнянь системи (10) і співвідношень (11)–(13) отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}_1(t)}{dt^2} &= \frac{Gm_2}{|\vec{r}_2(t - \tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t)|^3} (\vec{r}_2(t - \tau_{2,1}(t)) - \vec{r}_1(t)) + \\ &\quad + \frac{Gm_3}{|\vec{r}_3(t - \tau_{3,1}(t)) - \vec{r}_1(t)|^3} (\vec{r}_3(t - \tau_{3,1}(t)) - \vec{r}_1(t)) = \\ &= \frac{GM}{|\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)|^3} (\vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t)) + \\ &\quad + \frac{Gm}{|\vec{r}_3(t - \tau_{3,1}(t)) - \vec{r}_1(t)|^3} (\vec{r}_3(t - \tau_{3,1}(t)) - \vec{r}_1(t)) = \\ &= -\frac{GM}{|\vec{r}_1(t)|^3} \vec{r}_1(t) + \frac{Gm}{|\vec{r}_3(t - \tau_{3,1}(t)) - \vec{r}_1(t)|^3} (\vec{r}_3(t - \tau_{3,1}(t)) - \vec{r}_1(t)) = \\ &= -\frac{GM}{|\vec{r}_1(t)|^3} \vec{r}_1(t) - \frac{Gm}{|\vec{r}_1(t - \tau_{3,1}(t)) + \vec{r}_1(t)|^3} (\vec{r}_1(t - \tau_{3,1}(t)) + \vec{r}_1(t)), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}_3(t)}{dt^2} &= \frac{Gm_1}{|\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) - \vec{r}_3(t)|^3} (\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) - \vec{r}_3(t)) + \\ &\quad + \frac{Gm_2}{|\vec{r}_2(t - \tau_{2,3}(t)) - \vec{r}_3(t)|^3} (\vec{r}_2(t - \tau_{2,3}(t)) - \vec{r}_3(t)) = \\ &= -\frac{Gm}{|\vec{r}_3(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_3(t)|^3} (\vec{r}_3(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_3(t)) - \frac{GM}{|\vec{r}_3(t)|^3} \vec{r}_3(t), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \vec{r}_2(t)}{dt^2} &= \frac{Gm_1}{|\vec{r}_1(t - \tau_{1,2}(t)) - \vec{r}_2(t)|^3} (\vec{r}_1(t - \tau_{1,2}(t)) - \vec{r}_2(t)) + \\
&+ \frac{Gm_3}{|\vec{r}_3(t - \tau_{3,2}(t)) - \vec{r}_2(t)|^3} (\vec{r}_3(t - \tau_{3,2}(t)) - \vec{r}_2(t)) = \\
&= \frac{Gm}{|\vec{r}_1(t - \tau_{1,2}(t))|^3} \vec{r}_1(t - \tau_{1,2}(t)) + \frac{Gm}{|\vec{r}_1(t - \tau_{3,2}(t))|^3} (-\vec{r}_1(t - \tau_{3,2}(t))) = \\
&= \frac{Gm}{|\vec{r}_1(t - \tau_{1,2}(t))|^3} \vec{r}_1(t - \tau_{1,2}(t)) - \frac{Gm}{|\vec{r}_1(t - \tau_{1,2}(t))|^3} \vec{r}_1(t - \tau_{1,2}(t)) = \vec{0}, \quad (16)
\end{aligned}$$

$$c\tau_{1,3}(t) = |\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) - \vec{r}_3(t)| = |\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t)|, \quad (17)$$

$$c\tau_{3,1}(t) = |\vec{r}_3(t - \tau_{3,1}(t)) - \vec{r}_1(t)| = |\vec{r}_1(t - \tau_{3,1}(t)) + \vec{r}_1(t)|, \quad (18)$$

$$c\tau_{1,2}(t) = |\vec{r}_1(t - \tau_{1,2}(t)) - \vec{r}_2(t)| = |\vec{r}_1(t - \tau_{1,2}(t))|, \quad (19)$$

$$c\tau_{3,2}(t) = |\vec{r}_3(t - \tau_{3,2}(t)) - \vec{r}_2(t)| = |\vec{r}_1(t - \tau_{3,2}(t))|. \quad (20)$$

З отриманих співвідношень (14)–(20) з урахуванням (10) випливає, що рух точок M_1 , M_2 і M_3 описується системою рівнянь

$$\begin{cases}
\frac{d^2 \vec{r}_1(t)}{dt^2} = -\frac{GM}{|\vec{r}_1(t)|^3} \vec{r}_1(t) - \frac{Gm}{|\vec{r}_1(t - \tau_{3,1}(t)) + \vec{r}_1(t)|^3} (\vec{r}_1(t - \tau_{3,1}(t)) + \vec{r}_1(t)), \\
\frac{d^2 \vec{r}_3(t)}{dt^2} = -\frac{GM}{|\vec{r}_3(t)|^3} \vec{r}_3(t) - \frac{Gm}{|\vec{r}_3(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_3(t)|^3} (\vec{r}_3(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_3(t)), \\
c\tau_{1,3}(t) = |\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t)|, \\
c\tau_{3,1}(t) = |\vec{r}_3(t - \tau_{3,1}(t)) + \vec{r}_3(t)|, \\
\vec{r}_1(t) = \vec{r}_3(t), \\
\vec{r}_2(t) = \vec{0}.
\end{cases} \quad (21)$$

Звідси та з (12) отримуємо, що дослідження руху точок M_1 , M_2 і M_3 зводиться до дослідження руху однієї точки M_1 (точка M_2 знаходиться в стані спокою, а точки M_3 і M_1 розміщені симетрично відносно точки M_2) і рух точки M_1 описується системою векторного диференціального рівняння із запізнювальним аргументом і скалярного функціонального рівняння

$$\begin{cases}
\frac{d^2 \vec{r}_1(t)}{dt^2} = -\frac{GM}{|\vec{r}_1(t)|^3} \vec{r}_1(t) - \frac{Gm}{|\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t)|^3} (\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t)), \\
c\tau_{1,3}(t) = |\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t)|.
\end{cases} \quad (22)$$

5. Оцінки для $\tau_{1,3}(t)$ і $\frac{d\tau_{1,3}(t)}{dt}$. Справджується таке твердження.

Теорема 1. Для запізнення $\tau_{1,3}(t)$ в системі (22) виконуються співвідношення

$$\frac{2|\vec{r}_1(t)|}{c + \sup_{\xi \in (t - \tau_{1,3}(t), t)} |\vec{v}_1(\xi)|} \leq \tau_{1,3}(t) \leq \frac{2|\vec{r}_1(t)|}{c - \sup_{\xi \in (t - \tau_{1,3}(t), t)} |\vec{v}_1(\xi)|} \quad (23)$$

i

$$\left| \frac{d\tau_{1,3}(t)}{dt} \right| \leq \frac{|\vec{v}_1(t)|}{c - |\vec{v}_1(t - \tau_{1,3}(t))|}. \quad (24)$$

Використаємо рівняння

$$c\tau_{1,3}(t) = |\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t)|, \quad (25)$$

що є одним із складових системи (22). Подамо це рівняння у вигляді

$$c\tau_{1,3}(t) = |(\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) - \vec{r}_1(t)) + 2\vec{r}_1(t)|.$$

Звідси отримуємо, що

$$2|\vec{r}_1(t)| - |\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) - \vec{r}_1(t)| \leq c\tau_{1,3}(t) \leq |\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) - \vec{r}_1(t)| + 2|\vec{r}_1(t)|.$$

Оскільки на підставі теореми про скінченний приріст [10, с. 81]

$$|\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) - \vec{r}_1(t)| \leq \sup_{\xi \in (t - \tau_{1,3}(t), t)} |\vec{v}_1(\xi)| \tau_{1,3}(t),$$

то

$$2|\vec{r}_1(t)| - \sup_{\xi \in (t - \tau_{1,3}(t), t)} |\vec{v}_1(\xi)| \tau_{1,3}(t) \leq c\tau_{1,3}(t) \leq \sup_{\xi \in (t - \tau_{1,3}(t), t)} |\vec{v}_1(\xi)| \tau_{1,3}(t) + 2|\vec{r}_1(t)|.$$

Отже,

$$2|\vec{r}_1(t)| \leq \left(c + \sup_{\xi \in (t - \tau_{1,3}(t), t)} |\vec{v}_1(\xi)| \right) \tau_{1,3}(t) \quad \text{і} \quad \left(c - \sup_{\xi \in (t - \tau_{1,3}(t), t)} |\vec{v}_1(\xi)| \right) \tau_{1,3}(t) \leq 2|\vec{r}_1(t)|,$$

звідки випливає співвідношення (23).

Далі покажемо правильність співвідношення (24).

Нехай $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ — скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. З урахуванням (25) та рівності $|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$ отримуємо, що

$$\begin{aligned} c \frac{d\tau_{1,3}(t)}{dt} &= \frac{1}{2|\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t)|} \frac{d \langle \vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t), \vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t) \rangle}{dt} = \\ &= \frac{1}{c\tau_{1,3}(t)} \left\langle -\frac{d\tau_{1,3}(t)}{dt} \vec{v}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{v}_1(t), \vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t) \right\rangle. \end{aligned}$$

Тому

$$\frac{d\tau_{1,3}(t)}{dt} = \frac{\langle \vec{v}_1(t), \vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t) \rangle}{c^2\tau_{1,3}(t) + \langle \vec{v}_1(t - \tau_{1,3}(t)), \vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t) \rangle}.$$

Звідси та з (25) випливає

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\tau_{1,3}(t)}{dt} \right| &\leq \frac{|\vec{v}_1(t)| |\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t)|}{c^2\tau_{1,3}(t) - |\vec{v}_1(t - \tau_{1,3}(t))| |\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t)|} = \\ &= \frac{|\vec{v}_1(t)| c\tau_{1,3}(t)}{c^2\tau_{1,3}(t) - |\vec{v}_1(t - \tau_{1,3}(t))| c\tau_{1,3}(t)} = \frac{|\vec{v}_1(t)|}{c - |\vec{v}_1(t - \tau_{1,3}(t))|}, \end{aligned}$$

тобто нерівність (24) є правильною.

Теорему 1 доведено.

Наслідок 1. Якщо для швидкості $\vec{v}_1(t)$ руху точки M_1 виконується оцінка

$$|\vec{v}_1(t)| \leq \varepsilon c,$$

де $\varepsilon \in (0, 1)$, то

$$\frac{2}{1+\varepsilon} \frac{|\vec{r}_1(t)|}{c} \leq \tau_{1,3}(t) \leq \frac{2}{1-\varepsilon} \frac{|\vec{r}_1(t)|}{c} \quad (26)$$

і

$$\left| \frac{d\tau_{1,3}(t)}{dt} \right| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Зауваження 1. Наведені вище оцінки для $\tau_{1,3}(t)$ можна використовувати при розгляді початкових умов для системи (22). Ці умови потрібно задавати для (22) на проміжку $[t_0 - \tau_{1,3}(t_0), t_0]$.

Наслідок 2. Для величини $t - \tau_{1,3}(t)$ виконуються співвідношення

$$\frac{d(t - \tau_{1,3}(t))}{dt} \geq 1 - \frac{|\vec{v}_1(t)|}{c - |\vec{v}_1(t - \tau_{1,3}(t))|}. \quad (27)$$

Зауваження 2. Із (24) і (27) випливає, що величина $t - \tau_{1,3}(t)$ є строго зростаючою і при невеликій швидкості руху точки M_1 запізнення $\tau_{1,3}(t)$ повільно змінюється.

6. Дослідження системи рівнянь (22). Зазначимо, що у випадку класичної небесної механіки (тоді $c_g = +\infty$) система (21) набуває вигляду

$$\begin{cases} \frac{d^2 \vec{r}_1(t)}{dt^2} = -\frac{G(4M+m)}{4|\vec{r}_1(t)|^3} \vec{r}_1(t), \\ \frac{d^2 \vec{r}_3(t)}{dt^2} = -\frac{G(4M+m)}{4|\vec{r}_3(t)|^3} \vec{r}_3(t), \\ \vec{r}_1(t) = \vec{r}_3(t), \\ \vec{r}_2(t) = \vec{0}, \end{cases}$$

оскільки $\tau_{1,3}(t) \equiv \tau_{3,1}(t) \equiv 0$, а система (22) — вигляду

$$\frac{d^2 \vec{r}_1(t)}{dt^2} = -\frac{G(4M+m)}{4|\vec{r}_1(t)|^3} \vec{r}_1(t). \quad (28)$$

Згідно з дослідженнями Ньютона траєкторії точки M_1 , рівнянням руху якої є (28), розміщені на кривих, що називаються конічними перерізами [11], або на прямих (див., наприклад, [5, 12–14]), що проходять через точку O . Важливим для кожного розв'язку $\vec{r}_1(t)$ рівняння (28) є виконання співвідношення

$$\vec{r}_1(t) \times \vec{v}_1(t) \equiv \vec{c}, \quad (29)$$

де “ $\times$ ” — векторних добуток відповідних векторів і $\vec{c}$ — сталий вектор. Тотожність (29) означає, що *секторна швидкість*

$$\vec{v}_\sigma(t) = \frac{1}{2} \vec{r}_1(t) \times \vec{v}_1(t) \quad (30)$$

руху точки M_1 відносно точки M_2 не змінюється з часом [13, 15].

У подальшому покажемо, що розв'язки системи (22), в якій враховано скінченність швидкості гравітації, мають властивості, не притаманні розв'язкам відповідного рівняння (28), зокрема для цих розв'язків не виконується тотожність (29).

6.1. Випадок локально опуклих траєкторій точки M_1 . Покажемо, що завдяки скінченності швидкості гравітації секторна швидкість точки M_1 , рух якої описується системою (22), може не бути сталою.

Важливими для подальшого викладу матеріалу є локально опуклі траєкторії руху точок M_1 і M_3 .

Траєкторію $\mathcal{L}$ руху точки M_1 називатимемо *локально опуклою*, якщо кожна достатньо малого розміру частина $\tilde{\mathcal{L}}$ траєкторії $\mathcal{L}$ знаходиться між будь-якою дотичною до $\tilde{\mathcal{L}}$ і точкою O (точка дотику для кожної дотичної не враховується і вважається довільною).

Правильним є таке твердження.

Теорема 2 (закон про зростання секторної швидкості). *Якщо для розв'язку $\vec{r}_1(t)$ системи (22) векторна функція $\vec{v}_\sigma(t)$ задовольняє умову*

$$\vec{v}_\sigma(t) \neq \vec{0} \quad \text{для всіх} \quad t \geq t_0, \quad (31)$$

то скалярна функція $|\vec{v}_\sigma(t)|$ є строго зростаючою на проміжку $[t_0, +\infty)$,

$$\frac{d|\vec{v}_\sigma(t)|}{dt} = \frac{Gm |\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) \times \vec{r}_1(t)|}{2 |\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t)|^3} > 0 \quad \text{для всіх} \quad t \geq t_0, \quad (32)$$

$$\frac{d\vec{v}_\sigma(t)}{dt} = \frac{Gm}{2 |\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t)|^3} (\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) \times \vec{r}_1(t)) \quad \text{для всіх} \quad t \geq t_0 \quad (33)$$

і траєкторія $\mathcal{L}$ точки M_1 , що описується функцією $\vec{r}_1(t)$, є локально опуклою.

Доведення. Враховуючи (30), рівність $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, що виконується для кожного вектора $\vec{a}$, тотожність $\vec{r}_3(t) \equiv -\vec{r}_1(t)$ і те, що на підставі (22)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}_1(t)}{dt^2} &= -\frac{GM}{|\vec{r}_1(t)|^3} \vec{r}_1(t) - \frac{Gm}{|\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t)|^3} (\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t)) = \\ &= -\left(\frac{GM}{|\vec{r}_1(t)|^3} + \frac{Gm}{|\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t)|^3} \right) \vec{r}_1(t) - \\ &\quad - \frac{Gm}{|\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t)|^3} \vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) = \\ &= -\left(\frac{GM}{|\vec{r}_1(t)|^3} + \frac{Gm}{|\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t)|^3} \right) \vec{r}_1(t) + \\ &\quad + \frac{Gm}{|\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t)|^3} \vec{r}_3(t - \tau_{3,1}(t)) = \\ &= -\gamma_1(t) \vec{r}_1(t) + \gamma_2(t) \vec{r}_3(t - \tau_{3,1}(t)), \end{aligned} \quad (34)$$

де

$$\gamma_1(t) = \frac{GM}{|\vec{r}_1(t)|^3} + \frac{Gm}{|\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t)|^3} \quad (35)$$

і

$$\gamma_2(t) = \frac{Gm}{|\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t)|^3}, \quad (36)$$

отримуємо, що для всіх $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_\sigma(t)}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d(\vec{r}_1(t) \times \vec{v}_1(t))}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r}_1(t) \times \frac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2} = \\ &= \frac{1}{2} \vec{r}_1(t) \times (-\gamma_1(t) \vec{r}_1(t) + \gamma_2(t) \vec{r}_3(t - \tau_{3,1}(t))) = \\ &= \frac{1}{2} \gamma_2(t) \vec{r}_1(t) \times \vec{r}_3(t - \tau_{3,1}(t)) = \frac{1}{2} \gamma_2(t) \vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) \times \vec{r}_1(t) = \\ &= \frac{Gm}{2|\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t)|^3} (\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) \times \vec{r}_1(t)). \end{aligned}$$

Отже, співвідношення (33) справджується.

Зазначимо, що згідно зі співвідношенням (33) $d\vec{v}_\sigma(t)/dt \neq \vec{0}$ для всіх $t \geq t_0$, оскільки $\tau_{1,3}(t) > 0$ для всіх $t \geq t_0$. Цей вектор перпендикулярний до площини Oxy і завдяки неперервності функцій $\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t))$ і $\vec{r}_1(t)$ має у всі моменти часу t один і той же напрямок. Тому завдяки (33) виконується співвідношення (32), звідки випливає строге зростання функції $|\vec{v}_\sigma(t)|$.

Далі, покажемо, що траєкторія $\mathcal{L}$ точки M_1 , що описується функцією $\vec{r}_1(t)$, локально опукла. Очевидно, що для цього, в першу чергу, потрібно показати, що кривина траєкторії $\mathcal{L}$ у кожній точці не дорівнює 0. Використаємо формулу для кривини

$$k = \frac{\left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \right|}{\left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|^{3/2}} \quad (37)$$

плоскої кривої $\vec{r} = \vec{r}(t)$ [16, с. 57].

Спочатку знайдемо векторний добуток векторів чисельника у формулі (37).

На підставі (34)–(36) і властивостей векторного добутку двох векторів отримуємо

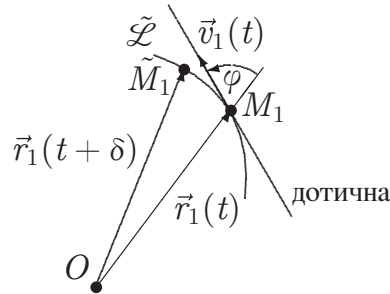
$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2} &= \vec{v}_1(t) \times (-\gamma_1(t) \vec{r}_1(t) + \gamma_2(t) \vec{r}_3(t - \tau_{3,1}(t))) = \\ &= \gamma_1(t) \vec{r}_1(t) \times \vec{v}_1(t) + \gamma_2(t) \vec{v}_1(t) \times \vec{r}_3(t - \tau_{3,1}(t)). \end{aligned}$$

Згідно з означенням векторного добутку двох векторів ненульові вектори $\vec{r}_1(t) \times \vec{v}_1(t)$ і $\vec{v}_1(t) \times \vec{r}_3(t - \tau_{3,1}(t))$ колінеарні і мають однакові напрямки для кожного $t \geq t_0$. Тому з урахуванням додатності значень функцій $\gamma_1(t)$ і $\gamma_2(t)$

$$\gamma_1(t) \vec{r}_1(t) \times \vec{v}_1(t) + \gamma_2(t) \vec{v}_1(t) \times \vec{r}_3(t - \tau_{3,1}(t)) \neq \vec{0}$$

для всіх $t \geq t_0$. Звідси, з (31), (35) і (37) отримуємо, що

$$\begin{aligned} k &= \frac{|\gamma_1(t) \vec{r}_1(t) \times \vec{v}_1(t) + \gamma_2(t) \vec{v}_1(t) \times \vec{r}_3(t - \tau_{3,1}(t))|}{|\vec{v}_1(t)|^{3/2}} > \frac{|\gamma_1(t) \vec{r}_1(t) \times \vec{v}_1(t)|}{|\vec{v}_1(t)|^{3/2}} = \\ &= \gamma_1(t) \frac{|\vec{r}_1(t) \times \vec{v}_1(t)|}{|\vec{v}_1(t)|^{3/2}} = 2\gamma_1(t) \frac{|\vec{v}_\sigma(t)|}{|\vec{v}_1(t)|^{3/2}} > \frac{2GM |\vec{v}_\sigma(t)|}{|\vec{r}_1(t)|^3 |\vec{v}_1(t)|^{3/2}} > 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Рис. 3. Частина $\tilde{\mathcal{L}}$ траєкторії $\mathcal{L}$.

для всіх $t \geq t_0$, тобто кривина траєкторії $\mathcal{L}$ додатна в кожній точці.

Далі згідно з означенням локально опуклої траєкторії $\mathcal{L}$ покажемо, що кожна достатньо малого розміру частина $\tilde{\mathcal{L}}$ траєкторії $\mathcal{L}$ знаходиться між будь-якою дотичною до $\tilde{\mathcal{L}}$ і точкою O (як на рис. 3). Ми обмежимося розглядом випадку, коли кут φ між векторами $\vec{r}_1(t)$ і $\vec{v}_1(t)$ знаходиться в інтервалі $(0, \pi)$.

Зафіксуємо довільну достатньо малу за розмірами частину $\tilde{\mathcal{L}}$ траєкторії $\mathcal{L}$. Нехай M_1 — довільна точка на $\tilde{\mathcal{L}}$, що не збігається з жодною з крайніх точок $\tilde{\mathcal{L}}$, і є кінцем вектора $\vec{r}_1(t)$. Розглянемо пряму, що проходить через точку M_1 , напрямним вектором якої є швидкість $\vec{v}_1(t)$ руху точки M_1 в момент часу t . Ця пряма є дотичною до $\tilde{\mathcal{L}}$ і точка M_1 є точкою дотику. Нехай $\tilde{M}_1$ — довільна точка на $\tilde{\mathcal{L}}$, що не збігається з точкою M_1 і визначається векторною функцією $\vec{r}_1(t + \delta)$ з достатньо малим додатним δ (див. рис. 3).

Покажемо, що для достатньо малого $\delta > 0$ точка $\tilde{M}_1$ знаходиться між розглянутою вище дотичною та точкою O .

Розглянемо векторний добуток $\vec{v}_1(t) \times \overrightarrow{M_1 \tilde{M}_1}$, де

$$\overrightarrow{M_1 \tilde{M}_1} = \vec{r}_1(t + \delta) - \vec{r}_1(t). \quad (39)$$

Напрямок цього векторного добутку збігається з напрямком вектора $\vec{r}_1(t) \times \vec{v}_1(t)$. Дійсно, на підставі формули Тейлора для відображень [10, с. 93]

$$\vec{r}_1(t + \delta) - \vec{r}_1(t) = \delta \vec{v}_1(t) + \frac{\delta^2}{2} \frac{d^2 \vec{r}_1(t)}{dt^2} + \beta(t, \delta), \quad (40)$$

де $\beta(t, \delta)$ — векторна функція, для якої для всіх $t \geq t_0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{|\beta(t, \delta)|}{\delta^2} = 0. \quad (41)$$

Тому з урахуванням (34), (35), (36), (39), (40) і властивостей векторного добутку

$$\begin{aligned} \vec{v}_1(t) \times \overrightarrow{M_1 \tilde{M}_1} &= \vec{v}_1(t) \times \left(\frac{\delta^2}{2} \frac{d^2 \vec{r}_1(t)}{dt^2} + \beta(t, \delta) \right) = \\ &= \vec{v}_1(t) \times \left(\frac{\delta^2}{2} (-\gamma_1(t) \vec{r}_1(t) + \gamma_2(t) \vec{r}_3(t - \tau_{3,1}(t))) + \beta(t, \delta) \right) = \\ &= \frac{\delta^2}{2} (\gamma_1(t) \vec{r}_1(t) \times \vec{v}_1(t) + \gamma_2(t) \vec{v}_1(t) \times \vec{r}_3(t - \tau_{3,1}(t))) + \vec{v}_1(t) \times \beta(t, \delta). \end{aligned} \quad (42)$$

Як зазначалося при знаходженні кривини траєкторії $\mathcal{L}$, вектори $\vec{r}_1(t) \times \vec{v}_1(t)$ і $\vec{v}_1(t) \times \vec{r}_3(t - \tau_{3,1}(t))$ є ненульовими, колінеарними і мають однаковий напрямок. Тому на підставі (41), (42) та додатності значень функцій $\gamma_1(t)$ і $\gamma_2(t)$ напрямок векторного добутку $\vec{v}_1(t) \times \overrightarrow{M_1 \tilde{M}_1}$ збігається з напрямком вектора $\vec{r}_1(t) \times \vec{v}_1(t)$ при достатньо малому $\delta > 0$.

Звідси випливає, що при кожному достатньо малому $\delta > 0$ точка $\tilde{M}_1$ знаходиться між дотичною до $\tilde{\mathcal{L}}$ і точкою O .

Аналогічну властивість має точка $\tilde{M}_1$ і у випадку достатньо малого $\delta < 0$, оскільки кривина траєкторії $\mathcal{L}$ у всіх точках додатна.

Це означає, що кожна достатньо малого розміру частина $\tilde{\mathcal{L}}$ траєкторії $\mathcal{L}$ знаходиться між будь-якою дотичною до $\tilde{\mathcal{L}}$ і точкою O (точка дотику для кожної дотичної не враховується).

Отже, у випадку виконання включення $\varphi \in (0, \pi)$ обґрунтування локальної опуклості траєкторії $\mathcal{L}$ завершено.

Аналогічним чином обґрунтовується локальна опуклість траєкторії $\mathcal{L}$ у випадку включення $\varphi \in (\pi, 2\pi)$.

Теорему 2 доведено.

Наведемо достатні умови виконання співвідношення (31), тобто достатні умови локальної опуклості траєкторій точки M_1 .

Очевидно, що властивості траєкторій точки M_1 залежать від початкових умов.

Справджується така теорема.

Теорема 3. Нехай $\vec{\psi}(s)$ — неперервно диференційовна на проміжку $[t_0 - \tau_{1,3}(t_0), t_0]$ векторна функція і $\vec{r}_1(t)$ — розв'язок системи (22) при $t \geq t_0$, для яких

1) $\vec{\psi}(t_0) = \vec{r}_1(t_0)$, $d\vec{\psi}(s)/ds$ при $s = t_0$ збігається з $\vec{v}_1(t_0)$ і $\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) = \vec{\psi}(t - \tau_{1,3}(t))$, якщо $t - \tau_{1,3}(t) \in [t_0 - \tau_{1,3}(t_0), t_0]$;

2) $\vec{r}_1(t_0) \times \vec{v}_1(t_0) \neq \vec{0}$;

3) для кожного $s \in [t_0 - \tau_{1,3}(t_0), t_0]$ вектор $\vec{\psi}(s) \times \vec{r}_1(t_0)$ є ненульовим і його напрямок збігається з напрямком вектора $\vec{r}_1(t_0) \times \vec{v}_1(t_0)$.

Тоді для розв'язку $\vec{r}_1(t)$ системи (22) виконується співвідношення (31), тобто траєкторія точки M_1 є локально опуклою.

Доведення. Зазначимо, що система (22) має єдиний розв'язок $\vec{r}_1(t)$, для якого виконується умова 1) теореми, що випливає з [8] і теорії диференціально-функціональних рівнянь (див., наприклад, [17, 18]).

Згідно з умовами 2) і 3) теореми й доведенням теореми 2

$$\frac{d|\vec{v}_\sigma(t)|}{dt} = \frac{Gm|\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t))|}{2|\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) + \vec{r}_1(t)|^3} > 0 \quad \text{при} \quad t = t_0.$$

Оскільки за умовою 2) $\vec{v}_\sigma(t_0) \neq \vec{0}$ і функція $\vec{v}_\sigma(t)$ неперервна на проміжку $[t_0, +\infty)$, то множина проміжків $[t_0, T)$, $T > t_0$, на кожному з яких $\vec{v}_\sigma(t) \neq \vec{0}$, є не порожньою.

Припустимо, що існує така точка $t_1 > t_0$, для якої $\vec{v}_\sigma(t) \neq \vec{0}$ для всіх $t \in [t_0, t_1)$ і

$$\vec{v}_\sigma(t_1) = \vec{0}. \quad (43)$$

Тоді $\vec{v}_1(t) \neq \vec{0}$ для кожного $t \in [t_0, t_1)$ і за теоремою 1 $\tau_{1,3}(t) > 0$ для всіх $t \in [t_0, t_1)$. Тому $\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t)) \times \vec{r}_1(t) \neq \vec{0}$ для всіх $t \in [t_0, t_1)$ і напрямок цього вектора завдяки неперервності

функцій $\vec{r}_1(t)$ і $\tau_{1,3}(t)$ збігається з напрямком вектора $\vec{r}_1(t_0 - \tau_{1,3}(t_0)) \times \vec{r}_1(t_0)$. Отже, згідно з доведенням теореми 2 і формулою (32)

$$\frac{d|\vec{v}_\sigma(t)|}{dt} > 0 \quad \text{для всіх } t \in [t_0, t_1).$$

Це означає, що функція $|\vec{v}_\sigma(t)|$ є строго зростаючою на проміжку $[t_0, t_1)$. Тому припущення, що виконується (43), є хибним.

Звідси випливає, що $\vec{v}_\sigma(t) \neq \vec{0}$ для всіх $t \geq t_0$.

Теорему 3 доведено.

Наслідок 3. Якщо для розв'язку $\vec{r}_1(t)$ системи (28) векторна функція $\vec{v}_\sigma(t)$ задовольняє умову (31), то $\vec{v}_\sigma(t) \equiv \vec{c} \neq \vec{0}$.

6.2. Випадок траєкторії точки M_1 , розміщеної на прямій, що проходить через точку O .

Спочатку наведемо необхідні й достатні умови знаходження точки M_1 на прямій $\mathcal{S}$, що проходить через точку O і має напрямний вектор $\vec{a}$.

Справджується таке твердження.

Теорема 4. Траєкторія точки M_1 , що описується системою (22), розміщена на прямій $\mathcal{S}$ тоді і тільки тоді, коли для всіх $t \geq t_0$ вектори $\vec{r}_1(t)$, $\vec{v}_1(t)$ і $\vec{a}$ колінеарні.

Справді, якщо траєкторія точки M_1 знаходиться на прямій $\mathcal{S}$, то кінець вектора $\vec{r}_1(t)$ з початком у точці O у всі моменти часу $t \geq t_0$ знаходиться на цій прямій. Тому вектор швидкості $\vec{v}_1(t)$ точки M_1 у всі моменти часу $t \geq t_0$, а також $\vec{r}_1(t)$ і $\vec{a}$ колінеарні.

Навпаки, якщо для всіх $t \geq t_0$ вектори $\vec{r}_1(t)$, $\vec{v}_1(t)$ і $\vec{a}$ колінеарні, то кінець вектора $\vec{r}_1(t)$ з початком у точці O у всі моменти часу $t \geq t_0$ знаходиться на прямій $\mathcal{S}$, і тому траєкторія точки M_1 розміщена на цій прямій.

Далі з'ясуємо, як здійснюється рух точки M_1 по прямій $\mathcal{S}$.

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що точка M_1 у всі моменти часу t знаходиться на осі Ox (пряма $\mathcal{S}$ збігається з віссю Ox) і рух цієї точки описується векторною функцією $\vec{r}_1(t) = x(t)\vec{i}$, де $\vec{i}$ — одиничний вектор, напрямком якого збігається з віссю Ox , і $x(t)$ — скалярна функція з додатними значеннями, властивості якої з'ясуємо в подальшому. Завдяки (22) та припущенню стосовно розміщення точки M_1 рух цієї точки з урахуванням швидкості гравітації $c_g = c$ описується системою двох скалярних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{GM}{x^2(t)} - \frac{Gm}{(x(t - \tau_{1,3}(t)) + x(t))^2}, \\ c\tau_{1,3}(t) = |x(t - \tau_{1,3}(t)) + x(t)|. \end{cases} \quad (44)$$

Траєкторія руху точки M_1 залежить від значень функції $x(t)$ та її похідної на проміжку $[t_0 - \tau_{1,3}(t_0), t_0]$ (значення похідної $v_1(t) = dx(t)/dt$ на $[t_0 - \tau_{1,3}(t_0), t_0]$ ми не виділяємо, оскільки вони визначаються функцією $x(t)$).

У випадку класичної небесної механіки (тоді $c_g = \infty$) рух точки M_1 згідно з (28) описується скалярним диференціальним рівнянням

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{G(4M + m)}{4|x(t)|^2}.$$

Траєкторія руху точки M_1 у цьому випадку залежить від значень функції $x(t)$ та її похідної $v_1(t) = dx(t)/dt$ в початковий момент часу t_0 . Важливе значення тут і в подальшому

відіграє друга космічна швидкість $v_{2,\infty}$ (швидкість тікання) — це найменша початкова швидкість $v_1(t_0)$, яку в момент часу t_0 потрібно надати точці M_1 з координатою $x(t_0)$, щоб $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$. Згідно з [14]

$$v_{2,\infty} = \sqrt{\frac{2G(M + m/4)}{x(t_0)}}.$$

Для дослідження руху точки M_1 , що описується системою рівнянь (44), зафіксуємо початковий момент часу t_0 і задамо початкові значення $\psi(s)$ розв'язку $x(t)$ на проміжку $I_{t_0} = [t_0 - \tau_{1,3}(t_0), t_0]$, вважаючи, що:

- 1) $\psi(s) > 0$ для всіх $s \in I_{t_0}$ (точка M_1 не може збігатися з точкою M_2);
- 2) функція $\psi(s)$ є неперервно диференційовною на інтервалі $(t_0 - \tau_{1,3}(t_0), t_0)$ і границі $\lim_{s \rightarrow t_0-0} d\psi(s)/ds$, $\lim_{s \rightarrow t_0 - \tau_{1,3}(t_0)+0} d\psi(s)/ds$ є скінченими.

Відхилення $\tau_{1,3}(t_0)$ згідно з другим рівнянням системи (44) має задовольняти співвідношення

$$c\tau_{1,3}(t_0) = \psi(t_0 - \tau_{1,3}(t_0)) + \psi(t_0)$$

і

$$x(t - \tau_{1,3}(t)) = \psi(t - \tau_{1,3}(t))$$

для всіх $t \geq t_0$, для яких $t - \tau_{1,3}(t) \in [t_0 - \tau_{1,3}(t_0), t_0]$.

Також у момент часу t_0 задамо швидкість $v_1(t_0)$ руху точки M_1 . Ми не вимагатимемо, щоб виконувалася рівність

$$\lim_{s \rightarrow t_0-0} \frac{d\psi(s)}{ds} = v_1(t_0). \quad (45)$$

Початкова швидкість $v_1(s)$ руху точки M_1 на проміжку $[t_0 - \tau_{1,3}(t_0), t_0]$ визначається значеннями функції $\psi(s)$.

Аналогічно до [8] можна показати, що система (44) з розглянутими вище початковими умовами має єдиний розв'язок $x(t)$. Цей розв'язок є неперервним у точці t_0 і похідна $dx(t)/dt$ в цій точці має стрибок, якщо не виконується рівність (45).

Згідно з наведеними початковими умовами та першим рівнянням системи (44) для функцій $v_1(t)$ і $x(t)$ виконуються інтегральні співвідношення

$$v_1(t) = v_1(t_0) - \int_{t_0}^t \frac{GM ds}{x^2(s)} - \int_{t_0}^t \frac{Gm ds}{(x(s - \tau_{1,3}(s)) + x(s))^2} \quad (46)$$

і

$$x(t) = x(t_0) + (t - t_0)v_1(t_0) - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} \frac{GM ds}{x^2(s)} d\tau - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} \frac{Gm ds}{(x(s - \tau_{1,3}(s)) + x(s))^2} d\tau, \quad (47)$$

де t — довільний момент часу з деякого проміжку $[t_0, t^*) \subset [t_0, +\infty)$, на якому $x(t) > 0$.

Ми використаємо співвідношення (46) і (47) для вивчення динаміки точки M_1 .

Позначимо через $\mathcal{V}_1$ і $\mathcal{V}_2$ множини всіх швидкостей $v_1(t_0)$, для кожної з яких розв'язок $x(t)$ системи (44), що задовольняє наведені вище початкові умови, є обмеженим або необмеженим відповідно.

Справджуються такі леми, що прояснюють властивості руху точки M_1 .

Лема 1. Множина $\mathcal{V}_1$ є не порожньою і

$$v_{2,\infty} \in \mathcal{V}_1. \quad (48)$$

Доведення. Нехай $v_1(t_0) \in (-c, 0]$. Згідно з першим рівнянням системи (44) та (46) точка M_1 рухається до точки O по прямій $\mathcal{S}$ зі сповільненням

$$-\frac{GM}{x^2(t)} - \frac{Gm}{(x(t - \tau_{1,3}(t)) + x(t))^2}.$$

Тому швидкість руху $\dot{x}(t)$ точки M_1 є строго спадною, функція $x(t)$, що описує рух цієї точки, також є строго спадною і $\lim_{t \rightarrow T-0} x(t) = 0$ для деякого моменту часу $T > t_0$.

З механічної точки зору це означає, що в момент часу T відбудеться зіткнення точок M_1 , M_2 і M_3 .

Отже, $\mathcal{V}_1 \neq \emptyset$.

Для подальшого нам потрібні два співвідношення для $v_1^2(t)$, де $v_1(t) = dx(t)/dt$ і $x(t)$ — розв'язок системи (44), що задовольняє відповідні початкові умови. Це співвідношення

$$\frac{dv_1^2(t)}{dt} = 2v_1(t) \frac{d^2x(t)}{dt^2} = 2v_1(t) \left(-\frac{GM}{x^2(t)} - \frac{Gm}{(x(t - \tau_{1,3}(t)) + x(t))^2} \right) \quad (49)$$

і

$$v_1^2(t) = v_1^2(t_0) - \int_{t_0}^t \frac{2GM}{x^2(s)} dx(s) - \int_{t_0}^t \frac{2Gm}{(x(s - \tau_{1,3}(s)) + x(s))^2} dx(s), \quad (50)$$

що отримуються з використанням (44) та рівності $v_1(t) dt = dx(t)$.

Покажемо, що правильним є включення (48).

Припустимо, що це включення є хибним, тобто для розв'язку $x(t)$ системи (44), що задовольняє початкові умови і $v_1(t_0) = v_{2,\infty}$, виконуються співвідношення

$$v_1(t) > 0 \quad \text{для всіх } t > t_0 \quad (51)$$

і

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty. \quad (52)$$

Співвідношення (52) та рівність

$$\int_{t_0}^t \frac{2G(M + m/4)}{x^2(s)} dx(s) = v_{2,\infty}^2 - \frac{2G(M + m/4)}{x(t)}$$

дають змогу подати (50) у вигляді

$$v_1^2(t) = \frac{2G(M + m/4)}{x(t)} - 2Gm \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{(x(s - \tau_{1,3}(s)) + x(s))^2} - \frac{1}{4x^2(s)} \right) dx(s). \quad (53)$$

Оскільки на підставі (51) $|x(t - \tau_{1,3}(t)) + x(t)| < 2x(t)$ для всіх $t > t_0$, то другий доданок у правій частині (53) при $t > t_0$ має ненульові значення і абсолютне значення цієї частини є строго зростаючою функцією. Перший доданок у правій частині (53) прямує до 0 при $t \rightarrow +\infty$ (завдяки (52)). Тому $v_1(t_1) = 0$ для деякого $t_1 > t_0$, що на підставі проведених на початку доведення леми міркувань суперечить (52).

Отже, припущення, що $v_{2,\infty} \notin \mathcal{V}_1$, є хибним.

Лемі 1 доведено.

Лема 2. Множина $\mathcal{V}_2$ є не порожньою.

Доведення. Швидкість $\tilde{v}_1 = \sqrt{2G(M+m)/x(t_0)}$ є елементом множини $\mathcal{V}_2$.

Справді, функція $v_1(t)$, для якої $v_1(t_0) = \tilde{v}_1$, є неперервною. Тому множина проміжків $[t_0, \theta)$, $\theta > t_0$, на кожному з яких $v_1(t) > 0$, є не порожньою. Припустимо, що $v_1(t) > 0$ для всіх $t \in [t_0, T_3)$ і

$$v_1(T_3) = 0 \quad (54)$$

для деякого $T_3 > t_0$. Завдяки додатності значень $x(t)$

$$\int_{t_0}^{T_3} \frac{dx(s)}{(x(s - \tau_{1,3}(s)) + x(s))^2} < \int_{t_0}^{T_3} \frac{dx(s)}{x^2(s)}.$$

На підставі цієї нерівності з урахуванням (50) отримуємо

$$\begin{aligned} v_1^2(T_3) &= \frac{2G(M+m)}{x(t_0)} - \int_{t_0}^{T_3} \frac{2G(M+m/4)}{x^2(s)} dx(s) - \\ &\quad - 2Gm \int_{t_0}^{T_3} \left(\frac{1}{(x(s - \tau_{1,3}(s)) + x(s))^2} - \frac{1}{4x^2(s)} \right) dx(s) > \\ &> \frac{2G(M+m)}{x(t_0)} - \left(\frac{2G(M+m/4)}{x(t_0)} - \frac{2G(M+m/4)}{x(T_3)} \right) - \\ &\quad - 2Gm \left(\frac{3/4}{x(t_0)} - \frac{3/4}{x(T_3)} \right) = \frac{2G(M+m)}{x(T_3)} > 0, \end{aligned}$$

що суперечить (54). Отже, $\tilde{v}_1 \in \mathcal{V}_2$ і $\mathcal{V}_2 \neq \emptyset$.

Лемі 2 доведено.

Лема 3. Множина $\mathcal{V}_2$ є замкненою і зв'язною.

Доведення. Нехай $x_0(t)$ — розв'язок системи (44), що задовольняє відповідні початкові умови, і $v_{1,0}(t)$ — похідна цього розв'язку при $t \geq t_0$.

Нехай

$$v_{1,0}(t_0) \in \mathcal{V}_2. \quad (55)$$

Завдяки цьому включенню $v_{1,0}(t) > 0$ для всіх $t \geq t_0$ і

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_0(t) = +\infty. \quad (56)$$

Позначимо через $x_\delta(t)$ і $v_{1,\delta}(t)$ розв'язок і похідну розв'язку системи (44) у випадку, коли $v_{1,\delta}(t_0) = v_1(t_0) + \delta$ і $\delta > 0$.

Використаємо такі інтегральні співвідношення для $v_{1,\delta}(t)$, $v_{1,0}(t)$, $x_\delta(t)$ і $x_0(t)$, що отримуємо одноразовим і дворазовим інтегруванням першого рівняння системи (44):

$$\begin{aligned} v_{1,\delta}(t) &= v_{1,0}(t_0) + \delta - \int_{t_0}^t \frac{GM ds}{x_\delta^2(s)} - \int_{t_0}^t \frac{Gm ds}{(x_\delta(s - \tau_{1,3,\delta}(s)) + x_\delta(s))^2}, \\ v_{1,0}(t) &= v_{1,0}(t_0) - \int_{t_0}^t \frac{GM ds}{x_0^2(s)} - \int_{t_0}^t \frac{Gm ds}{(x_0(s - \tau_{1,3,0}(s)) + x_0(s))^2}, \\ x_\delta(t) &= x_0(t_0) + (t - t_0)(v_{1,0}(t_0) + \delta) - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^\tau \frac{GM ds}{x_\delta^2(s)} d\tau - \\ &\quad - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^\tau \frac{Gm ds}{(x_\delta(s - \tau_{1,3,\delta}(s)) + x_\delta(s))^2} d\tau \end{aligned} \quad (57)$$

і

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0(t_0) + (t - t_0)v_{1,0}(t_0) - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^\tau \frac{GM ds}{x_0^2(s)} d\tau - \\ &\quad - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^\tau \frac{Gm ds}{(x_0(s - \tau_{1,3,0}(s)) + x_0(s))^2} d\tau, \end{aligned}$$

де $\tau_{1,3,\delta}(s)$ згідно з другим рівнянням системи (44) задовольняє співвідношення

$$c\tau_{1,3,\delta}(s) = x_\delta(s - \tau_{1,3,\delta}(s)) + x_\delta(s), \quad \delta \geq 0. \quad (58)$$

З'ясуємо вплив величини δ на $x_\delta(t)$ і $\tau_{1,3,\delta}(t)$.

Продиференціюємо обидві частини (58) по змінній δ . Одержимо

$$c \frac{d\tau_{1,3,\delta}(s)}{d\delta} = -v_{1,\delta}(s - \tau_{1,3,\delta}(s)) \frac{d\tau_{1,3,\delta}(s)}{d\delta} + \frac{dx_\delta(s)}{d\delta}.$$

Звідси отримуємо, що

$$\frac{d\tau_{1,3,\delta}(s)}{d\delta} = \frac{1}{c + v_{1,\delta}(s - \tau_{1,3,\delta}(s))} \frac{dx_\delta(s)}{d\delta}. \quad (59)$$

Далі продиференціюємо обидві частини (57) по змінній δ . З урахуванням (58) і (59) маємо

$$\frac{dx_\delta(t)}{d\delta} = (t - t_0) + 2 \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^\tau \frac{GM}{x_\delta^3(s)} \frac{dx_\delta(s)}{d\delta} ds \right) d\tau +$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^{\tau} \frac{Gm}{(x_{\delta}(s - \tau_{1,3,\delta}(s)) + x_{\delta}(s))^3} \frac{d(x_{\delta}(s - \tau_{1,3,\delta}(s)) + x_{\delta}(s))}{d\delta} ds \right) d\tau = \\
& = (t - t_0) + 2 \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^{\tau} \frac{GM}{x_{\delta}^3(s)} \frac{dx_{\delta}(s)}{d\delta} ds \right) d\tau + \\
& + 2 \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^{\tau} \frac{Gm}{(x_{\delta}(s - \tau_{1,3,\delta}(s)) + x_{\delta}(s))^3} \frac{c d\tau_{1,3,\delta}(s)}{d\delta} ds \right) d\tau = \\
& = (t - t_0) + 2 \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^{\tau} \frac{GM}{x_{\delta}^3(s)} \frac{dx_{\delta}(s)}{d\delta} ds \right) d\tau + \\
& + 2 \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^{\tau} \frac{Gm}{(x_{\delta}(s - \tau_{1,3,\delta}(s)) + x_{\delta}(s))^3} \frac{c}{c + v_{1,\delta}(s - \tau_{1,3,\delta}(s))} \frac{dx_{\delta}(s)}{d\delta} ds \right) d\tau.
\end{aligned}$$

Із цих співвідношень випливає, що

$$\frac{dx_{\delta}(t)}{d\delta} > 0 \quad (60)$$

для кожного $t > t_0$, для якого $x_{\delta}(t) > 0$ (тоді $x_{\delta}(s) > 0$ для всіх $s \in [t_0, t]$). Нерівність (60) виконується для всіх $\delta \geq 0$.

Звідси випливає, що $x_{\delta}(t) > x_0(t)$ для всіх $t > t_0$ і $\delta > 0$. Тому на підставі (56) $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{\delta}(t) = +\infty$ для всіх $\delta > 0$.

Отже, завдяки (55) $[v_{1,0}(t_0), +\infty) \subset \mathcal{V}_2$.

Із наведених міркувань випливає, що $\mathcal{V}_2 = \bigcup_{v \in \mathcal{V}_2} [v, +\infty)$. Тому $\mathcal{V}_2$ — зв'язна множина.

Розглянемо швидкість $v_{2,c} = \inf_{v \in \mathcal{V}_2} v$. Покажемо, що

$$v_{2,c} \in \mathcal{V}_2. \quad (61)$$

Звідси випливає замкненість множини $\mathcal{V}_2$.

Припустимо, що співвідношення (61) є хибним, тобто

$$v_{2,c} \in \mathcal{V}_1. \quad (62)$$

Оскільки $v_{2,c} > 0$, тому що $v_{2,\infty} \in \mathcal{V}_1$ і $v_{2,\infty} > 0$, то на підставі (49) і (50) на деякому проміжку $[t_0, t_1)$, $t_1 > t_0$, швидкість $v_{1,0}^*(t)$ руху точки M_1 буде додатною, строго зменшуватиметься і $v_{1,0}^*(t_1) = 0$ (розв'язок $x_0^*(t)$ системи (44) на проміжку $[t_0, t_1)$ буде строго зростаючим). Завдяки міркуванням з доведення лема 1 на деякому проміжку $[t_1, t_2)$, $t_2 > t_1$, розв'язок $x_0^*(t)$ системи (44) буде строго спадним і $\lim_{t \rightarrow t_2-0} x_0^*(t) = 0$ (точки M_1 , M_2 і M_3 в момент часу t_2 зіткнуться).

Зафіксуємо довільне $t_2^+ \in (t_1, t_2)$.

Позначимо через $x_{\delta}^*(t)$ розв'язок і його похідну $v_{1,\delta}^*(t)$ системи (44) з відповідними початковими умовами, для яких $v_{1,\delta}^*(t_0) = v_{2,c} + \delta$.

Із неперервної залежності розв'язку $x_\delta^*(t)$ від δ випливає, що

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \max_{t \in [t_0, t_2^+]} |x_\delta^*(t) - x_0^*(t)| = 0.$$

Тому для достатньо малих значень $\delta > 0$ розв'язок $x_\delta^*(t)$ системи (44) не буде строго зростаючим на $[t_0, +\infty)$, що неможливо, оскільки $(v_{2,c}, +\infty) \subset \mathcal{V}_2$.

Отже, припущення про виконання співвідношення (62) є хибним.

Лемі 3 доведено.

Лема 4. Множина $\mathcal{V}_1$ є відкритою і зв'язною.

Це твердження є наслідком леми 3.

Лема 5. Виконується нерівність $v_{2,\infty} < v_{2,c}$.

Твердження леми випливає з включення (48) та відкритості множини $\mathcal{V}_1$.

Згідно з наведеними лемами та їхніми доведеннями справджується таке твердження.

Теорема 5. Нехай $\psi(s)$ — неперервно диференційовна на відрізку $[t_0 - \tau_{1,3}(t_0), t_0]$ і диференційовна на інтервалі $(t_0 - \tau_{1,3}(t_0), t_0)$ функція з додатними значеннями, $v_1(t_0)$ — довільне число з проміжку $(-c, c)$ і $x(t)$ — розв'язок системи (44) при $t \geq t_0$, для яких

- 1) $\psi(t_0) = x(t_0)$;
- 2) $\lim_{t \rightarrow t_0+0} dx(t)/dt = v_1(t_0)$, $\lim_{s \rightarrow t_0-0} d\psi(s)/ds$ може не збігатися з $v_1(t_0)$;
- 3) $x(t - \tau_{1,3}(t)) = \psi(t - \tau_{1,3}(t))$ для всіх t , для яких $t - \tau_{1,3}(t) \in [t_0 - \tau_{1,3}(t_0), t_0]$.

Тоді

1) якщо $v_1(t_0) \in (-c, 0]$, то існує таке число $T > t_0$, що розв'язок $x(t)$ системи (44) на проміжку $[t_0, T)$ є строго спадним і $\lim_{t \rightarrow T-0} x(t) = 0$ (точки M_1 , M_2 і M_3 в момент часу T зіткнуться);

2) існує таке число $v_{2,c} > v_{2,\infty}$, що

а) якщо $v_1(t_0) \in (0, v_{2,c})$, то для деяких чисел T_1 , T_2 , для яких $t_0 < T_1 < T_2$, розв'язок $x(t)$ системи (44) на проміжках $[t_0, T_1)$ і $[T_1, T_2)$ є строго зростаючим і строго спадним відповідно і $\lim_{t \rightarrow T_2-0} x(t) = 0$ (точки M_1 , M_2 і M_3 в момент часу T_2 зіткнуться);

б) якщо $v_1(t_0) \geq v_{2,c}$, то розв'язок $x(t)$ системи (44) на проміжку $[t_0, +\infty)$ є строго зростаючим і $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$.

Зауваження 3. У теоремі 5 $v_{2,c}$ є другою космічною швидкістю з урахуванням скінченності швидкості гравітації. Це мінімальна швидкість $v_1(t_0)$, з якою має рухатися точка M_1 у момент часу t_0 , з координатами $x(t)$, $t \in [t_0 - \tau_{1,3}(t_0), t_0]$, у відповідні моменти часу t , щоб $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$. Згідно з лемою 5

$$v_{2,c} > \sqrt{\frac{2G(M + m/4)}{|x(t_0)|}},$$

тобто реальна друга космічна швидкість $v_{2,c}$ (завдяки скінченності швидкості гравітації) більша другої космічної швидкості $v_{2,\infty}$, що розглядається в класичній небесній механіці.

Зауваження 4. Траєкторії руху точки M_1 , пов'язані з розв'язками звичайного диференціального рівняння (28) (випадок класичної небесної механіки), є локально опуклими або розміщеними на прямій, що проходить через точку M_2 . У небесній механіці зі скінченною швидкістю гравітації основними класами траєкторій також є наведені вище (і розглянуті для (22) в пп. 6.1 і 6.2) два класи траєкторій. Тип траєкторій руху точки M_1 залежить від початкових умов на проміжку $[t_0 - \tau_{1,3}(t_0), t_0]$, які задовольняють розв'язки системи

векторного диференціального рівняння із запізнювальним аргументом і скалярного функціонального рівняння (22).

6.3. Неможливість обмежених траєкторій точки M_1 з додатною відстанню до точки M_2 . Розглянемо довільні числа r і R , для яких $0 < r < R$, і кільце $K_{r,R}$ точок $\vec{c} = (c_1, c_2)$ площини Oxy , для кожної з яких $r \leq |\vec{c}| \leq R$. Множину всіх таких кілець позначимо через $\mathcal{K}$.

Справджується таке твердження.

Теорема 6. Нехай $\mathcal{L}$ — довільна локально опукла або розміщена на прямій траєкторія точки M_1 , рух якої описується системою рівнянь (22).

Тоді немає жодного кільця $K \in \mathcal{K}$ такого, щоб $\mathcal{L} \subset K$.

Доведення. Припустимо, що твердження теореми є хибним, тобто для деяких додатних r і R

$$\mathcal{L} \subset K_{r,R}. \quad (63)$$

Подальші міркування проведемо в кожному з двох випадків:

- 1) траєкторія $\mathcal{L}$ розміщена на деякій прямій, що проходить через точку O ;
- 2) траєкторія $\mathcal{L}$ є локально опуклою кривою.

Розглянемо перший випадок. Нехай $x(t)$ — розв'язок системи (44), що відповідає траєкторії $\mathcal{L}$. За теоремою 5 $\mathcal{L}$ є необмеженою кривою або кривою, для якої $\lim_{t \rightarrow T-0} x(t) = 0$ для деякого $T > t_0$, що суперечить співвідношенню (63).

Розглянемо другий випадок. Нехай $\vec{r}_1(t)$ — розв'язок системи (22), що відповідає траєкторії $\mathcal{L}$. У цьому випадку

$$|\vec{r}_1(t)|, |\vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t))| \in [r, R] \quad \text{для всіх } t \geq t_0 \quad (64)$$

завдяки (63),

$$\inf_{t \geq t_0} |\vec{v}_1(t)| > 0 \quad (65)$$

завдяки опуклості $\mathcal{L}$ і строгому зростанню $|\vec{v}_1(t)|$,

$$\inf_{t \geq t_0} \tau_{1,3}(t) > 0 \quad (66)$$

завдяки (23), (64) і тому, що $|\vec{v}_1(t)| < c$, $t \geq t_0$,

$$\inf_{t \geq t_0} |\vec{r}_1(t) - \vec{r}_1(t - \tau_{1,3}(t))| > 0$$

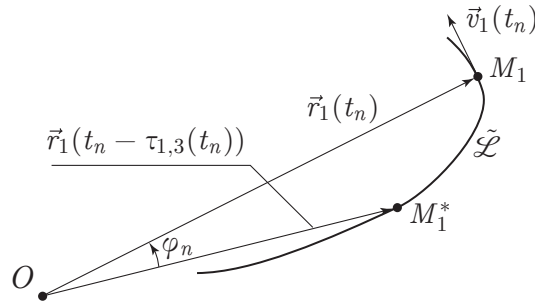
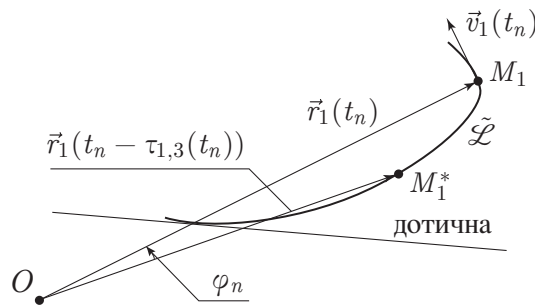
завдяки (65) і (66)

$$\inf_{M \in \mathcal{L}} k(M) > 0 \quad (67)$$

завдяки (38), де $k(M)$ — кривина $\mathcal{L}$ у точці M .

Покажемо, що для секторної швидкості $\vec{v}_\sigma(t)$ і деякого числа $\nu > 0$ виконується співвідношення

$$\frac{d|\vec{v}_\sigma(t)|}{dt} \geq \nu \quad \text{для всіх } t \geq t_0. \quad (68)$$

Рис. 4. Частина $\tilde{\mathcal{L}}$ траєкторії $\mathcal{L}$.Рис. 5. $\tilde{\mathcal{L}}$ при достатньо великих n .

Припустимо, що співвідношення (68) є хибним, тобто існує строго зростаюча послідовність $(t_n)_{n \geq 1}$, для якої $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$ і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d|\vec{v}_\sigma(t_n)|}{dt} = 0. \quad (69)$$

Тоді згідно з (32) і (64) $\lim_{n \rightarrow \infty} |\vec{r}_1(t_n - \tau_{1,3}(t_n)) \times \vec{r}_1(t_n)| = 0$. Звідси і з (64) отримуємо, що для кута φ_n між векторами $\vec{r}_1(t_n - \tau_{1,3}(t_n))$ і $\vec{r}_1(t_n)$ виконується співвідношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = 0. \quad (70)$$

Подальші міркування проілюструємо за допомогою рис. 4 і 5, на яких зображено точку M_1 у моменти часу t_n і $t_n - \tau_{1,3}(t_n)$, швидкість руху $\vec{v}_1(t_n)$ цієї точки в момент часу t_n , кут φ_n між векторами $\vec{r}_1(t_n - \tau_{1,3}(t_n))$ і $\vec{r}_1(t_n)$ і частину траєкторії $\tilde{\mathcal{L}}$ руху точки M_1 при невеликому n (рис. 4) та достатньо великому n (рис. 5) у випадку припущення про виконання співвідношення (69).

На підставі рівності (70) і нерівності (67) стосовно кривини траєкторії $\mathcal{L}$ при достатньо великому n частина $\tilde{\mathcal{L}}$ траєкторії $\mathcal{L}$ із точками, що визначаються векторами $\vec{r}_1(t_n - \tau_{1,3}(t_n))$ і $\vec{r}_1(t_n)$, буде розміщена на площині так, як показано на рис. 5. Таке розміщення $\tilde{\mathcal{L}}$ суперечить локальній опуклості траєкторії $\mathcal{L}$, оскільки $\tilde{\mathcal{L}}$ не знаходиться між дотичною, зображеною на рис. 5, і точкою O .

Отже, співвідношення (68) є правильним. Тому $|\vec{v}_\tau(t)| \geq |\vec{v}_\tau(t_0)| + \nu(t - t_0)$, $t \geq t_0$. Звідси та з (30) і (64) отримуємо $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\vec{v}_1(t)| = +\infty$, що неможливо, оскільки $|\vec{v}_1(t)| < c$ для всіх $t \geq t_0$.

Отже, припущення про виконання співвідношення (63) є хибним.

Теорему 6 доведено.

7. Нестійкість руху точок M_1 і M_3 . Вкладемо в поняття нестійкості руху точок M_1 і M_3 такий зміст. Рух точок M_1 і M_3 будемо вважати нестійким, якщо рух цих точок нестійкий за Ляпуновим [18] або для кожного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ в деякий момент часу $T > t_0$ відстань між точками M_1 і M_3 буде меншою ε . Для тіл, що мають ненульові розміри, це означає, що відбудеться їхнє зіткнення. Зіткнення тіл у небесній механіці — суттєва зміна станів тіл, тобто катастрофа для них. Тому рух тіл з їхнім зіткненням природно також вважати нестійким.

Згідно з теоремами 5 і 6 обмежені траєкторії руху точок M_1 і M_3 є нестійкими, оскільки відбувається як завгодно мале зближення цих точок. Необмежені траєкторії руху точок M_1 і M_3 (що можливо при великій за величиною швидкості $\vec{v}_1(t_0)$) є нестійкими за Ляпуновим. Це навіть у загальному випадку показано в [19–21].

8. Додаткові зауваження та літературні вказівки. 1. Задача трьох тіл у випадку класичної небесної механіки була об'єктом досліджень багатьох математиків і механіків (див., наприклад, [13, 14, 22]).

На відміну від задачі двох тіл, дослідженої ще Ньютоном, для задачі трьох тіл (у випадку $c_g = \infty$) не можна знайти загальний розв'язок, який би дозволяв для довільних значень координат і швидкостей тіл у початковий момент часу $t = t_0$ знаходити координати кожного з трьох тіл у будь-який момент часу $t > t_0$. Видатні математики Ж. Лагранж, К. Якобі, А. Пуанкаре, Дж. Біркгоф та інші приділили цій задачі багато уваги, однак побудувати загальний розв'язок так і не вдалося. Г. Є. Брунс і А. Пуанкаре довели, що загальний розв'язок задачі трьох тіл не можна подати за допомогою алгебраїчних або однозначних трансцендентних функцій координат та швидкостей тіл.

Загальний розв'язок може бути знайдений за допомогою нескінчених рядів. Такий розв'язок був запропонований К. Зундманом. Однак, застосування на практиці рядів Зундмана пов'язане з проблемами, важко розв'язними навіть із використанням потужних комп'ютерів.

Не зважаючи на неможливість отримати загальний розв'язок задачі трьох тіл уже давно відомі її точні частинні розв'язки. У 1772 р. Лагранж опублікував свій знаменитий мемуар “Про задачу трьох тіл”, у якому, зокрема, вказав на існування двох класів рухів у задачі трьох тіл, що описуються нескладними математичними формулами.

Частинні розв'язки першого класу (точки M_1 , M_2 і M_3 розташовані у вершинах рівностороннього трикутника довільних розмірів) називають трикутними, або лагранжовими, розв'язками. У рухах другого класу всі три тіла знаходяться на одній прямій, що обертається навколо спільного центру мас тіл відповідно до законів Кеплера. Розв'язки другого класу отримали назву прямолінійних або ейлерових.

2. Розглянуту в статті задачу трьох тіл у випадку знаходження тіл на прямій з урахуванням швидкості гравітації досліджено вперше.

3. Закон всесвітнього тяжіння з урахуванням скінченності швидкості гравітації отримано за допомогою закону всесвітнього тяжіння Ньютона і вперше використано в [6]. Він є узагальненням цього закону й збігається з ним у граничному випадку (при $c = +\infty$).

4. Друга космічна швидкість в небесній механіці зі скінченною швидкістю гравітації більша, ніж відповідна швидкість у класичній небесній механіці (теорема 5). Цей результат наведено вперше і його бажано враховувати при здійсненні польотів з одного небесного тіла на інше.

5. Нестійкість за Ляпуновим зіркових систем із необмеженими траєкторіями з урахуванням скінченності швидкості гравітації в загальному випадку показано в [19–21]. Цей

результат у випадку двох тіл вперше отримано в [9]. У [9] також обґрунтовано некепелерівність руху двох тіл.

6. Із задачами небесної механіки з використанням теорії відносності можна ознайомитися, наприклад, в [12, 23].

Література

1. А. Эйнштейн, *О специальной и общей теории относительности*, Госиздат, Москва (1922).
2. Yvonne Choquet-Bruhat, *General relativity and Einstein equations*, Oxford Univ. Press (2009).
3. E. B. Fomalont, S. M. Kopeikin, *The measurement of the light deflection from Jupiter: experimental results*, *Astrophys. J.*, **598**, 704–711 (2003). (astro-ph/0302294).
4. B. P. Abbott et al., *Gravitational waves and Gamma-rays from a binary neutron star merger: GW170817 and GRB 170817A*, *Astrophys. J.*, **848**, № 2, L13 (2017); DOI: 10.3847/2041-8213/aa920c
5. В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. Н. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, УРСС, Москва (2002).
6. В. Ю. Слюсарчук, *Математична модель Сонячної системи з урахуванням швидкості гравітації*, *Нелін. коливання*, **21**, № 2, 238–261 (2018); DOI: 10.1007/s10958-019-04540-2
7. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, в 3-х т., Наука, Москва, т. 1 (1966).
8. В. Ю. Слюсарчук, *Дослідження систем диференціальних рівнянь із запізнюваннями й обмеженнями на запізнювання та похідні розв'язків*, *Укр. мат. журн.*, **71**, № 5, 677–691 (2019); DOI: 10.1007/s11253-019-01673-0
9. В. Ю. Слюсарчук, *Некепелерівність та нестійкість руху двох тіл, спричинені скінченністю швидкості гравітації*, *Нелін. коливання*, **21**, № 3, 397–419 (2018); DOI: 10.1007/s10958-019-04550-0
10. В. А. Зорич, *Математический анализ*, ч. II, Наука, Москва (1984).
11. С. В. Бахвалов, Л. И. Бабушкин, В. П. Иваницкая, *Аналитическая геометрия*, Просвещение, Москва (1965).
12. В. А. Брумберг, *Релятивистская небесная механика*, Наука, Москва (1972).
13. Ф. Мультон, *Введение в небесную механику*, ОНТИ НКТП СССР, Москва-Ленинград (1935).
14. Ю. В. Александров, *Небесная механика: Учебник*, Харьк. нац. ун-т, Харьков (2006).
15. О. В. Голубева, *Теоретическая механика*, Выс. шк., Москва (1968).
16. В. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, Наука, Москва (1979).
17. Л. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин, *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Наука, Москва (1971).
18. В. Ю. Слюсарчук, *Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією*, Вид-во Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, Рівне (2003).
19. В. Ю. Слюсарчук, *Нестійкість необмежених розв'язків еволюційних рівнянь з операторними коефіцієнтами, переставними з операторами обертання*, *Буковин. мат. журн.*, **7**, № 1, 99–113 (2019).
20. В. Ю. Слюсарчук, *Рівняння в гільбертовому просторі, множини розв'язків яких інваріантні відносно групи, ізоморфної однопараметричній групі унітарних операторів*, *Укр. мат. журн.*, **72**, № 1, 86–99 (2020); DOI: 10.1007/s11253-020-01765-2
21. В. Ю. Слюсарчук, *Рівняння, множини розв'язків яких інваріантні відносно групи відображень, ізоморфної однопараметричній групі поворотів*, *Нелін. коливання*, **23**, № 1, 112–123 (2020).
22. А. П. Маркеев, *Задача трех тел и ее точные решения*, *Сорос. образоват. журн.*, № 9, 112–117 (1999).
23. Ж. Шази, *Теория относительности и небесная механика*, Ин-т компьютерных исследований, Москва; Ижевск, т. 1 (2011); т. 2 (2012).

Одержано 29.07.2020