УДК 517.928.2, 512.643

ДО ПИТАННЯ ПРО КАНОНІЧНІ ФОРМИ РЕГУЛЯРНОЇ В'ЯЗКИ МАТРИЦЬ

П. Ф. Самусенко

Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова
вул. Пирогова, 9, Київ, 01601, Україна
e-mail: psamusenko@ukr.net

We construct an algorithm of reduction of a regular matrix pencil to the canonical form.

Розроблено алгоритм зведення регулярної в'язки матриць до канонічного вигляду.

Вступ. Підґрунтям класичних методів дослідження властивостей розв'язків сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x, \quad t \in [0; T], \tag{1}$$

є алгоритми зведення незбуреної матриці $A(t, 0)$ до певних канонічних форм. Використання таких форм має не лише спростити, а, насамперед, забезпечити можливість класифікації випадків задачі, ефективно знайти її розв'язок.

У теорії диференціальних рівнянь суттєво використовується жорданова форма матриці $A(t, 0)$. При її наявності досить просто описуються асимптотичні властивості фундаментальної матриці системи (1). Якщо власні значення та відповідні їм елементарні дільники матриці $A(t, 0) - \lambda E$, де E — одинична матриця, на відрізку $[0; T]$ зберігають сталу кратність, то методи асимптотичного інтегрування системи (1), фактично, є узагальненням відповідних методів розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами [1 – 4]. При цьому будується стільки лінійно незалежних асимптотичних розв'язків системи (1), скільки коренів, з урахуванням їхньої кратності, має відповідне характеристичне рівняння

$$\det(A(t, 0) - \lambda E) = 0. \tag{2}$$

Розв'язки, що відповідають простим кореням рівняння (2), зображуються за допомогою асимпотичних розвинень за степенями параметра ε, а розв'язки, породжені кратними коренями, будуються за дробовими степенями параметра ε, показники яких визначаються кратністю коренів характеристичного рівняння, відповідних елементарних дільників і збурювальними коефіцієнтами системи [4].

Для сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем

$$\varepsilon B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x, \quad t \in [0; T], \tag{3}$$

аналогічні результати отримали А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець та їхні учні [5]. Було з'ясовано, що за певних умов, накладених на збурювальні матриці, система (3) має два типи формальних розв'язків. Розв'язки першого типу відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць $A(t, 0) - \lambda B(t, 0)$, а розв'язки другого типу — нескінченним. Зазначені розв'язки зображуються асимптотичними розвиненнями за степенями параметра ε, показники яких залежать як від кратності коренів відповідного характеристичного рівняння

$$\det\big(A(t,0)-\lambda B(t,0)\big)=0$$

та елементарних дільників, що їм відповідають, так і від поведінки збурювальних коефіцієнтів системи [5]. При цьому випадок точок повороту не розглядався.

Інший, більш загальний, підхід до асимптотичного інтегрування систем диференціальних рівнянь із параметром, що ґрунтується на використанні спектральних властивостей матриці $A(0,0)$, наведено в працях Iwano [6, 7] та Sibuya [8], в яких розроблено алгоритм асимптотичного розщеплення системи (1). При цьому структура матриці зі змінними елементами після розщеплення визначалася структурою $A(0,0)$. У випадку різних власних значень матриці $A(0,0)$ запропонований спосіб розщеплення водночас давав змогу побудувати фундаментальну матрицю системи (1).

У цій роботі результати Iwano та Sibuya узагальнюються для сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем (3). Розроблений алгоритм зведення системи (3) до канонічної форми можна використовувати при наявності точок повороту та можливій зміні рангу матриці $B(t,\varepsilon)$.

1. Випадок локального зведення в'язки матриць до канонічного вигляду. Нехай в'язка $A(t)-\lambda B(t)$ задовольняє такі умови:

1) $A(0)=\operatorname{diag}\{E_q,J_p\},\ B(0)=\operatorname{diag}\{J_q,E_p\},\ p+q=n,$ де E_q — одинична матриця порядку $q,$ J_q — квадратна матриця порядку $q,$ елементи верхньої наддіагоналі якої дорівнюють $1,$ решта елементів — нулю; аналогічно визначаються матриці E_p та $J_p;$

2) $\dfrac{d}{dt}\big(\det A(t)\big)\,\big|_{\,t=0}\neq 0,\ \dfrac{d}{dt}\big(\det B(t)\big)\,\big|_{\,t=0}\neq 0.$

Теорема 1. *Нехай* $A(t),B(t)\in C^m[0;T]$ *і виконуються умови 1, 2. Тоді існують такі неособливі матриці* $P(t),\ Q(t)\in C^m[0;t_0],\ t_0\leq T,$ *що*

$$P(t)A(t)Q(t)=\Omega(t)\equiv\operatorname{diag}\{E_q,J_p(t)\},\tag{4}$$

$$P(t)B(t)Q(t)=H(t)\equiv\operatorname{diag}\{J_q(t),E_p\},\tag{5}$$

де

$$J_p(t)=\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&1\\a_p(t)&a_{p-1}(t)&a_{p-2}(t)&\dots&a_1(t)\end{pmatrix},$$

$$J_q(t)=\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&1\\b_q(t)&b_{q-1}(t)&b_{q-2}(t)&\dots&b_1(t)\end{pmatrix},$$

$a_i(t)=t\widetilde{a}_i(t),\ i=\overline{1,p},\ b_i(t)=t\widetilde{b}_i(t),\ i=\overline{1,q},$ *причому* $\widetilde{a}_p(0)\neq 0$ *та* $\widetilde{b}_q(0)\neq 0.$

Доведення. Покладемо

$$A(t) = A(0) + D(t), \qquad B(t) = B(0) + F(t), \tag{6}$$

$$\Omega(t) = \Omega(0) + U(t), \qquad H(t) = H(0) + V(t). \tag{7}$$

Тоді $D(0) = F(0) = U(0) = V(0) = 0$. За побудовою

$$A(0) = \Omega(0), \qquad B(0) = H(0).$$

Матриці $P_1(t),\ Q_1(t)$ визначаємо із системи рівнянь

$$P_1(t)A(t)Q_1(t) = \Omega_1(t), \qquad P_1(t)B(t)Q_1(t) = H_1(t), \tag{8}$$

де

$$\Omega_1(t) = \operatorname{diag}\{E_q(t), M_p(t)\}, \qquad H_1(t) = \operatorname{diag}\{M_q(t), E_p(t)\},$$

$$E_q(0) = E_q, \qquad E_p(0) = E_p, \qquad M_q(0) = J_q, \qquad M_p(0) = J_p.$$

Покладемо

$$P_1(t) = E_n + R(t), \qquad Q_1(t) = E_n + S(t), \tag{9}$$

де E_n — одинична матриця порядку n. Підставляючи (6), (7), (9) до системи (8), одержуємо

$$\begin{gathered}\Omega_1(0)S(t) + R(t)\Omega_1(0) + D(t) + D(t)S(t) + \\ + R(t)\Omega_1(0)S(t) + R(t)D(t) + R(t)D(t)S(t) - U(t) = 0,\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}H_1(0)S(t) + R(t)H_1(0) + F(t) + F(t)S(t) + \\ + R(t)H_1(0)S(t) + R(t)F(t) + R(t)F(t)S(t) - V(t) = 0.\end{gathered} \tag{11}$$

Нехай

$$\Omega_1(0) = \begin{pmatrix} \Omega_{11}(0) & 0 \\ 0 & \Omega_{22}(0) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} E_q & 0 \\ 0 & J_p \end{pmatrix},$$

$$H_1(0) = \begin{pmatrix} H_{11}(0) & 0 \\ 0 & H_{22}(0) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} J_q & 0 \\ 0 & E_p \end{pmatrix},$$

$$U(t) = \operatorname{diag}\{U_1(t), U_2(t)\}, \qquad V(t) = \operatorname{diag}\{V_1(t), V_2(t)\},$$

$$D(t) = \begin{pmatrix} D_{11}(t) & D_{12}(t) \\ D_{21}(t) & D_{22}(t) \end{pmatrix}, \qquad F(t) = \begin{pmatrix} F_{11}(t) & F_{12}(t) \\ F_{21}(t) & F_{22}(t) \end{pmatrix},$$

де, наприклад, $U_1(t),\ V_1(t),\ D_{11}(t)$ та $F_{11}(t)$ — квадратні матриці порядку q.

Покладемо

$$S(t) = \begin{pmatrix} 0 & S_{12}(t) \\ S_{21}(t) & 0 \end{pmatrix}, \qquad R(t) = \begin{pmatrix} 0 & R_{12}(t) \\ R_{21}(t) & 0 \end{pmatrix},$$

$S_{12}(t),\ R_{12}(t)$ та $S_{21}(t),\ R_{21}(t)$ — прямокутні матриці розмірів $q\times p$ та $p\times q$ відповідно.
Тоді із системи (10), (11) маємо

$$U_i(t)=D_{ii}(t)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2}D_{ij}(t)S_{ji}(t)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2}R_{ij}(t)\Omega_{jj}(0)S_{ji}(t)+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2}R_{ij}(t)D_{ji}(t)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2}R_{ij}(t)\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{2}D_{jk}(t)S_{ki}(t),$$

$$V_i(t)=F_{ii}(t)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2}F_{ij}(t)S_{ji}(t)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2}R_{ij}(t)H_{jj}(0)S_{ji}(t)+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2}R_{ij}(t)F_{ji}(t)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2}R_{ij}(t)\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{2}F_{jk}(t)S_{ki}(t),\qquad i=1,2,$$

та

$$\Omega_{ii}(0)S_{ij}(t)+R_{ij}(t)\Omega_{jj}(0)+D_{ij}(t)+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{2}D_{ik}(t)S_{kj}(t)+$$

$$+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{2}R_{ik}(t)D_{kj}(t)+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{2}R_{ik}(t)\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{2}D_{kl}(t)S_{lj}(t)=0, \tag{12}$$

$$H_{ii}(0)S_{ij}(t)+R_{ij}(t)H_{jj}(0)+F_{ij}(t)+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{2}F_{ik}(t)S_{kj}(t)+$$

$$+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{2}R_{ik}(t)F_{kj}(t)+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{2}R_{ik}(t)\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{2}F_{kl}(t)S_{lj}(t)=0, \tag{13}$$

$$i\neq j,\quad i,j=1,2.$$

Згідно з [8] якобіан системи (12), (13) у точці $t=0$ відмінний від нуля. А тому існує таке $t_1,\ t_1\le T$, що система (12), (13) відносно $S_{ij}(t),\ R_{ij}(t),\ i\neq j,\ i,j=1,2,$ сумісна для всіх $t\in[0;t_1]$. При цьому $S_{ij}(t),\ R_{ij}(t)\in C^m[0;t_1]$ і $R(0)=S(0)=0$.

Покладемо

$$P_2(t)=\begin{pmatrix}E_q^{-1}(t) & 0\\ 0 & E_p\end{pmatrix},\qquad Q_2(t)=\begin{pmatrix}E_q & 0\\ 0 & E_p^{-1}(t)\end{pmatrix}.$$

Тоді

$$P_2(t)\Omega_1(t)Q_2(t) = \begin{pmatrix} E_q & 0 \\ 0 & M_p(t)E_p^{-1}(t) \end{pmatrix}, \qquad P_2(t)H_1(t)Q_2(t) = \begin{pmatrix} E_q^{-1}(t)M_q(t) & 0 \\ 0 & E_p \end{pmatrix}.$$

Функції $b_i(t),\ i = \overline{1,q}$, підберемо таким чином, щоб матриці $E_q^{-1}(t)M_q(t) - \lambda E_q$ та $J_q(t) - \lambda E_q$ мали однакові характеристичні многочлени. Тоді, враховуючи структуру матриць $E_q^{-1}(0)M_q(0),\ J_q(0)$, приходимо до висновку, що матриці $E_q^{-1}(t)M_q(t) - \lambda E_q$ та $J_q(t) - \lambda E_q$ на відрізку $[0; t_0],\ t_0 \le t_1$, мають однакові інваріантні многочлени. Отже, існує така неособлива достатньо гладка матриця $T_q(t)$ [9, 10], що

$$T_q^{-1}(t)E_q^{-1}(t)M_q(t)T_q(t) = J_q(t).$$

Зазначимо, що $b_q(t) = (-1)^{q+1}\det(E_q^{-1}(t)M_q(t))$. А тому згідно з умовами 1, 2 $b_q(t) = t\widetilde{b}_q(t)$, причому $\widetilde{b}_q(0) \ne 0$. Аналогічно визначаються функції $a_i(t),\ i = \overline{1,p}$.

Нехай $T(t) = \operatorname{diag}\{T_q(t), T_p(t)\}$, де

$$T_p^{-1}(t)M_p(t)E_p^{-1}(t)T_p(t) = J_p(t).$$

Покладаючи $P(t) = T^{-1}(t)P_2(t)P_1(t)$ та $Q(t) = Q_1(t)Q_2(t)T(t)$, переконуємось у правильності формул (4), (5).

Теорему 1 доведено.

Теорему 1 можна узагальнити для випадку в'язки матриць $A(t,\varepsilon) - \lambda B(t,\varepsilon)$, елементи яких визначені на множині

$$\overline{K} = \big\{(t,\varepsilon)\colon 0 \le t \le T,\ \ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\big\}.$$

Нехай в'язка $A(t,\varepsilon) - \lambda B(t,\varepsilon)$ задовольняє такі умови:

3) $A(0,0) = \operatorname{diag}\{E_q, J_p\},\ B(0,0) = \operatorname{diag}\{J_q, E_p\},\ p + q = n;$

4) справджуються нерівності

$$\frac{\partial}{\partial t}(\det A(t,\varepsilon))\,\big|_{(t,\varepsilon)=(0,0)} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\det A(t,\varepsilon))\,\big|_{(t,\varepsilon)=(0,0)} \ne 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\det B(t,\varepsilon))\,\big|_{(t,\varepsilon)=(0,0)} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\det B(t,\varepsilon))\,\big|_{(t,\varepsilon)=(0,0)} \ne 0.$$

Теорема 2. *Нехай $A(t,\varepsilon), B(t,\varepsilon) \in C^m(\overline{K})$ і виконуються умови 3, 4. Тоді існують такі неособливі матриці $P(t,\varepsilon), Q(t,\varepsilon) \in C^m(\overline{K}_1)$ $((0,0) \in \overline{K}_1 \subset \overline{K})$, що*

$$P(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon) = \Omega(t,\varepsilon) \equiv \operatorname{diag}\{E_q, J_p(t,\varepsilon)\}, \tag{14}$$

$$P(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon) = H(t,\varepsilon) \equiv \operatorname{diag}\{J_q(t,\varepsilon), E_p\}, \tag{15}$$

де

$$J_p(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_p(t,\varepsilon) & a_{p-1}(t,\varepsilon) & a_{p-2}(t,\varepsilon) & \dots & a_1(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$$J_q(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ b_q(t,\varepsilon) & b_{q-1}(t,\varepsilon) & b_{q-2}(t,\varepsilon) & \dots & b_1(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$a_i(0,0) = 0,\ i = \overline{1,p},\ b_i(0,0) = 0,\ i = \overline{1,q},$ *причому*

$$\frac{\partial}{\partial t}(a_p(t,\varepsilon))\,|_{(t,\varepsilon)=(0,0)} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(a_p(t,\varepsilon))\,|_{(t,\varepsilon)=(0,0)} \neq 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(b_q(t,\varepsilon))\,|_{(t,\varepsilon)=(0,0)} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(b_q(t,\varepsilon))\,|_{(t,\varepsilon)=(0,0)} \neq 0.$$

Доведення. Скористаємося схемою доведення теореми 1. Отже, нехай

$$A(t,\varepsilon) = A(0,0) + D(t,\varepsilon), \qquad B(t,\varepsilon) = B(0,0) + F(t,\varepsilon),$$

$$\Omega(t,\varepsilon) = \Omega(0,0) + U(t,\varepsilon), \qquad H(t,\varepsilon) = H(0,0) + V(t,\varepsilon).$$

Тоді $D(0,0) = F(0,0) = U(0,0) = V(0,0) = 0$. За побудовою

$$A(0,0) = \Omega(0,0), \qquad B(0,0) = H(0,0).$$

Як і раніше, матриці $P_1(t,\varepsilon),\ Q_1(t,\varepsilon)$ визначаються із системи рівнянь

$$P_1(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)Q_1(t,\varepsilon) = \Omega_1(t,\varepsilon), \qquad P_1(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)Q_1(t,\varepsilon) = H_1(t,\varepsilon), \tag{16}$$

де

$$\Omega_1(t,\varepsilon) = \operatorname{diag} E_q(t,\varepsilon), M_p(t,\varepsilon)\}, \qquad H_1(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\{M_q(t,\varepsilon), E_p(t,\varepsilon)\},$$

$$E_q(0,0) = E_q, \qquad E_p(0,0) = E_p, \qquad M_q(0,0) = J_q, \qquad M_p(0,0) = J_p.$$

Покладаючи

$$P_1(t,\varepsilon) = E_n + R(t,\varepsilon), \qquad Q_1(t,\varepsilon) = E_n + S(t,\varepsilon),$$

і вважаючи, що матриці $R(t,\varepsilon)$ та $S(t,\varepsilon)$ мають таку ж структуру, що й у теоремі 1, доводимо сумісність системи (16) на множині $\overline{K}_1$. Матриці $P_2(t,\varepsilon),\ Q_2(t,\varepsilon)$ та $T(t,\varepsilon)$ визначаються так само, як і в теоремі 1.

Теорему 2 доведено.

Нехай тепер замість умови 4 має місце така умова:

5. $\dfrac{d}{dt}(\det A(t,0))\,\Big|_{\,t=0} \neq 0,\ \dfrac{d}{dt}(\det B(t,0))\,\Big|_{\,t=0} \neq 0.$

Теорема 3. *Нехай* $A(t,\varepsilon),\ B(t,\varepsilon) \in C^m(\overline{K})$ *і виконуються умови 3, 5. Тоді існують неособливі матриці* $P(t,\varepsilon),\ Q(t,\varepsilon) \in C^m(\overline{K}_1)$, *для яких мають місце рівності (14), (15), де* $a_i(0,0) = 0,\ i = \overline{1,p},\ b_i(0,0) = 0,\ i = \overline{1,q},$ *і*

$$\frac{d}{dt}(a_p(t,0))\,\Big|_{\,t=0} \neq 0, \qquad \frac{d}{dt}(b_q(t,0))\,\Big|_{\,t=0} \neq 0.$$

2. Нелокальний випадок. Нехай тепер кронекерова структура в'язки $A(t,0)-\lambda B(t,0)$ залишається незмінною на відрізку $[0;T]$ [5].

Припустимо, що в'язка матриць $A(t,\varepsilon)-\lambda B(t,\varepsilon)$ задовольняє таку умову:

6. $A(t,0)=\operatorname{diag}\{E_q,J_p\},\ B(t,0)=\operatorname{diag}\{J_q,E_p\},\ p+q=n.$

Теорема 4. *Нехай* $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)\in C^m(\overline{K})$ *і виконуються умови 5, 6. Тоді існують такі неособливі матриці* $P(t,\varepsilon),\ Q(t,\varepsilon)\in C^m(\overline{K}_2)$

$$\overline{K}_2=\big\{(t,\varepsilon)\colon\ 0\le t\le T,\ \ 0\le\varepsilon\le\varepsilon_1\big\},\quad \varepsilon_1\le\varepsilon_0,$$

що мають місце рівності (14), (15), в яких $J_p(t,0)=J_p,\ J_q(t,0)=J_q$.

Доведення. Покладемо

$$A(t,\varepsilon)=A(t,0)+D(t,\varepsilon),\qquad B(t,\varepsilon)=B(t,0)+F(t,\varepsilon),$$

$$\Omega(t,\varepsilon)=\Omega(t,0)+U(t,\varepsilon),\qquad H(t,\varepsilon)=H(t,0)+V(t,\varepsilon).$$

Тоді $D(t,0)=F(t,0)=U(t,0)=V(t,0)=0.$ За побудовою

$$A(t,0)=\Omega(t,0),\qquad B(t,0)=H(t,0).$$

Далі процес доведення теореми аналогічний наведеному вище процесу доведення теорем 2 та 1.

Теорему 4 доведено.

Теорема 5. *Нехай* $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)\in C^m(\overline{K})$, *на множині* $\overline{K}$ *елементи* $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ *допускають рівномірні асимптотичні розвинення*

$$A(t,\varepsilon)=\sum_{s\ge0}A_s(t)\varepsilon^s,\qquad B(t,\varepsilon)=\sum_{s\ge0}B_s(t)\varepsilon^s,$$

і виконуються умови 5, 6. Тоді існують неособливі матриці $P(t,\varepsilon),\ Q(t,\varepsilon)\in C^m(\overline{K}_2)$, *для яких справджуються рівності (14), (15), де* $J_p(t,0)=J_p,\ J_q(t,0)=J_q$. *При цьому елементи* $P(t,\varepsilon),\ Q(t,\varepsilon)$ *на множині* $\overline{K}_2$ *допускають рівномірні асимптотичні розвинення*

$$P(t,\varepsilon)=\sum_{s\ge0}P_s(t)\varepsilon^s,\qquad Q(t,\varepsilon)=\sum_{s\ge0}Q_s(t)\varepsilon^s.$$

Зазначимо, що правильність теореми 5 випливає із сумісності систем, аналогічних до систем (12), (13), які у даному випадку отримуються за допомогою порівнювання коефіцієнтів при однакових степенях параметра ε у системі (16).

Література

1. L. Schlesinger, *Über asymptotische Darstellungen der Losunger linearer Differential systeme als Functionen eines Parameteres*, Math. Anal., **63**, 277 – 300 (1907).
2. G. D. Birkhoff, *On the asymptotic character of the certain linear differential equations containing a parameter*, Trans. Amer. Math. Soc., **9**, 219 – 231 (1908).
3. Я. Д. Тамаркин, *О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды*, Петроград (1917).
4. С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиль, Л. Д. Николенко, *Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений*, Наук. думка, Киев (1966).

5. А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями*, Вища шк., Киев (2000).
6. M. Iwano, *Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter, I*, Funkcial. Ekvac., **5**, 71 – 134 (1963).
7. M. Iwano, *Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter, II*, Funkcial. Ekvac., **6**, 89 – 141 (1964).
8. Y. Sibuya, *Simplification of a system of linear ordinary differential equations about a singular point*, Funkcial. Ekvac., **4**, 29 – 56 (1962).
9. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, Москва (1967).
10. В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, Москва (1968).

Одержано 17.05.20