УДК 517.5 + 511.72

НЕПЕРЕРВНА НІДЕ НЕ ДИФЕРЕНЦІЙОВНА ФУНКЦІЯ З ФРАКТАЛЬНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ, ВИЗНАЧЕНА В ТЕРМІНАХ Q_2-ЗОБРАЖЕННЯ

М. В. Працьовитий, С. П. Ратушняк

Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова
вул. Пирогова, 9, Київ, 01601, Україна;
Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: prats4444@gmail.com
ratush404@gmail.com

We construct a continuous nowhere monotone nondifferentiable function depending on one parameter $q_0 \in (0;1)$. For functions of this continual class, we describe structural, variational, fractal, and integro-differential properties.

Наведено конструкцію неперервної ніде не монотонної та недиференційовної функції, залежної від одного параметра $q_0 \in (0;1)$. Для функцій цього континуального класу отримано опис структурних, варіаційних, фрактальних та інтегро-диференціальних властивостей.

1. Вступ. Сьогодні активно вивчаються неперервні функції з локально складними властивостями структурного, варіаційного, інтегро-диференціального, фрактального характеру [1 – 5]. Для цього широко використовуються різні системи зображення (кодування) дійсних чисел зі скінченним та нескінченним, сталим та змінним алфавітами, засоби топології, теорії міри й імовірностей, фрактальної геометрії та фрактального аналізу [6 – 8]. Суттєво зріс інтерес до таких функцій у представників нематематичних галузей [9]. Вони цікаві фізикам, економістам, фахівцям у галузі кодування та декодування інформації, передачі сигналів тощо. Про це свідчать численні публікації. Особливу увагу привертають неперервні ніде не монотонні функції [2, 10].

У даній роботі ми, використовуючи Q_2-зображення чисел [7, 8, 11] відрізка $[0;1]$, що є самоподібним узагальненням класичного двійкового зображення, конструюємо неперервну ніде не монотонну функцію, залежну від одного параметра $q_0 \in (0;1)$, який визначає саме зображення чисел. При $q_0 = \dfrac{1}{2}$ (це випадок, коли Q_2-зображення є класичним двійковим) дана конструкція дає один із найпростіших прикладів недиференційовної функції.

Конструкція функції, що вивчається в даній роботі, тісно пов'язана з Трибін-функцією, яку ввели в статті [12] і вивчали в роботах [8, 13 – 15] з функціями Буша [16] і Вундерліха [17], є аналогом функції, яку ввели в роботі [18], специфічним частковим випадком функції, розглянутої в [19], але її інтегральні та диференціальні властивості залишилися поза увагою.

Нехай $A = \{0,1\}$ — алфавіт двосимвольного зображення чисел, $L = A \times A \times \ldots \ldots \times A \times \ldots$ — простір послідовностей елементів алфавіту (простір послідовностей нулів та одиниць), $\Delta^{Q_2}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}$ — Q_2-зображення числа $x \in [0;1]$, тобто

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} \right) = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \tag{1}$$

де $\beta_{\alpha_n} \equiv \alpha_n \cdot q_{1-\alpha_n}$, а саме: $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$. Поклавши $\beta_2 = 1$, одержимо $\beta_{i+1} = \beta_i + q_i$.

Відомо [11], що числа зліченної множини мають два Q_2-зображення $\Big($а саме: $\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 0(1)} = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 1(0)}\Big)$, а решта чисел мають єдине Q_2-зображення. Перші називаються Q_2*-бінарними* числами, а останні — Q_2*-унарними*.

Нагадаємо, що множина $\Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m} = \Big\{x : x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},\ \alpha_i = c_i,\ i = \overline{1,m}\Big\}$ називається *циліндром* (Q_2-циліндром) рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$.

Циліндр є відрізком, а саме:

$$\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m} = [a; b],$$

де

$$a = \beta_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} \beta_{c_k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{c_i}, b = a + \prod_{i=1}^{m} q_{c_i},$$

а отже,

$$\left|\Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m}\right| = \prod_{i=1}^{m} q_{c_i}, \quad |\Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m c}| = q_c \left|\Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m}\right|.$$

Також $\Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m 0} \cup \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m 1}$, причому $\max \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m 0} = \min \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m 1}$. Для будь-якої послідовності $(c_n) \in L$ має місце рівність $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_n} = \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}$.

2. Означення об'єкта дослідження. Розглядається функція r, означена рівністю

$$r\Big(x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k}\ldots}\Big) = \Delta^{Q_2}_{r_1r_2\ldots r_k\ldots}, \tag{2}$$

$$r_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad (\alpha_1, \alpha_2) = (0,0), \\ 1, & \text{якщо} \quad (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0), \end{cases}$$

$$r_{k+1} = \begin{cases} r_k, & \text{якщо} \quad (\alpha_{2k+1}, \alpha_{2k+2}) = (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}), \\ 1 - r_k, & \text{якщо} \quad (\alpha_{2k+1}, \alpha_{2k+2}) \neq (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}). \end{cases}$$

Лема 1. *Означення функції r рівністю (2) є коректним, оскільки виконується умова* $r\big(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m 1(0)}\big) = r\big(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m 0(1)}\big)$.

Доведення. Розглянемо можливі випадки 1) $m = 2k$ та 2) $m = 2k-1$ окремо.

1. Нехай $m = 2k$ і $r\big(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m 1(0)}\big) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k b(1-b)}$.

Якщо $(c_{2k-1}, c_{2k}) = (1,0)$, то $(c_{2k-1}, c_{2k}) \neq (0,1)$, а отже,

$$r\Big(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}c_{2k}0(1)}\Big) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k[1-b_k](b_k)} = r\Big(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}c_{2k}1(0)}\Big).$$

Якщо $(c_{2k-1}, c_{2k}) \neq (1,0)$, а $(c_{2k-1}, c_{2k}) = (0,1)$, то

$$r\Big(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}c_{2k}0(1)}\Big) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k b_k(1-b_k)} = r\Big(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}c_{2k}1(0)}\Big).$$

Якщо $(0,1) \neq (c_{2k-1}, c_{2k}) \neq (1,0)$, то

$$r\Big(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}c_{2k}0(1)}\Big) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k[1-b_k](b_k)} = r\Big(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}c_{2k}1(0)}\Big).$$

2. Нехай $m = 2k-1$. Тоді $r\left(\Delta^{Q_2}_{c_1 \ldots c_{2k-2}c_{2k-1}1(0)}\right) = \Delta^{Q_2}_{b_1 \ldots b_{k-1}b_k(1-b_k)}$, а оскільки $(c_{2k-1}, 0) \neq$ $\neq (1,1)$, то $r\left(\Delta^{Q_2}_{c_1 \ldots c_{2k-2}c_{2k-1}0(1)}\right) = \Delta^{Q_2}_{b_1 \ldots b_{k-1}[1-b_k](b_k)}$. Отже, $r\left(\Delta^{Q_2}_{c_1 \ldots c_{2k-2}c_{2k-1}0(1)}\right) =$ $= r\left(\Delta^{Q_2}_{c_1 \ldots c_{2k-2}c_{2k-1}1(0)}\right)$. Коректність означення функції r обґрунтовано.

Лема 2. *Образом Q_2-бінарної точки при відображенні r є Q_2-бінарна точка. Значення $y_0 = r(x)$ функції r є Q_2-бінарним числом тоді та тільки тоді, коли Q_2-зображення числа x має період із двох цифр.*

Доведення. Перша частина твердження є очевидною.

Нехай $y_0 = \Delta^{Q_2}_{b_1 \ldots b_k 0(1)} = \Delta^{Q_2}_{b_1 \ldots b_k 1(0)}$ і $r\left(x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{2k} \ldots}\right) = y_0$. Безпосередньо з означення функції r маємо

$$b_1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2) = (0,0) \qquad \text{і} \qquad b_{j+1} = b_j \Leftrightarrow (\alpha_{2j+1}, \alpha_{2j+2}) = (\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}).$$

Тому $(\alpha_{2k+3}, \alpha_{2k+4}) \neq (\alpha_{2k+1}, \alpha_{2k+2})$, але $(\alpha_{2n+1}, \alpha_{2n+2}) = (\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n})$ для всіх $n > k+2$, тобто Q_2-зображення числа x є періодичним, причому період утворює дві цифри.

Обернене твердження (якщо Q_2-зображення числа x має період із двох цифр, то число $y = r(x)$ є Q_2-бінарним) очевидне. Це безпосередньо випливає з означення функції r.

Лему доведено.

Зауваження 1. Якщо другу умову в означенні функції r замінити умовою

$$r_{k+1} = \begin{cases} 1 - r_k, & \text{якщо} \quad (\alpha_{2k+1,\alpha_{2k+2}}) = (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}), \\ r_k, & \text{якщо} \quad (\alpha_{2k+1,\alpha_{2k+2}}) \neq (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}), \end{cases}$$

то означення функції втратить коректність, оскільки

$$r\left(\Delta^{2}_{00(1)}\right) = \Delta^{Q_2}_{00(10)} \neq r\left(\Delta^{Q_2}_{01(0)}\right) = \Delta^{Q_2}_{11(01)}.$$

При цьому, одержавши коректність означення функції домовленістю використовувати лише одне з двох існуючих зображень Q_2-бінарного числа, отримати її неперервність неможливо.

Зауваження 2. Конструкція функції r, означеної рівністю (2), містить “квазімарківську залежність цифр” і тому має певну схожість із функціями з фрактальними властивостями, які вивчались у роботах [20, 21], але не були неперервними.

3. Неперервність і ніде не монотонність функції.

Теорема 1. *Функція r є неперервною та ніде не монотонною. Її множиною значень є відрізок* $[0;1]$.

Доведення. Нехай $x_0 = \Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots}$ — Q_2-унарна точка,

$$y_0 = r(x_0) = \Delta^{Q_2}_{b_1 b_2 \ldots b_k \ldots}, \qquad x_0 \neq x = \Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_{m-1}[1-c_m]\alpha_{m+1} \ldots},$$

$2k$ — найбільше число, що не перевищує m. Тоді

$$|r(x_0) - r(x)| = \left|\Delta^{Q_2}_{b_1 \ldots b_k b_{k+1} b_{k+2} \ldots} - \Delta^{Q_2}_{b_1 b_2 \ldots b_k [1-b_{k+1}]\bar{b}_{k+1} \bar{b}_{k+2} \ldots}\right| =$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{k} q_{b_i}\right) \left|\Delta^{Q_2}_{b_{k+1} b_{k+2} b_{k+3} \ldots} - \Delta^{Q_2}_{[1-b_{k+1}]\bar{b}_{k+2}\bar{b}_{k+3}}\right| \leq$$

$$\leq \left(\max \{q_0, q_1\} \right)^k \to 0 \quad (k \to \infty \Leftrightarrow x \to x_0).$$

Оскільки $r(0) = r\left(\Delta^{Q_2}_{(0)}\right) = \Delta^{Q_2}_{(0)} = 0,\ r(1) = r\left(\Delta^{Q_2}_{(1)}\right) = \Delta^{Q_2}_{(1)} = 1$, то множиною значень функції r є відрізок $[0;1]$.

Неперервність функції r у довільній Q_2-бінарній точці $x_0 = \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m0(1)} = \Delta^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m1(0)}$ є по суті наслідком попередньої леми. Цей висновок можна обґрунтувати детальніше такими міркуваннями.

Очевидно, що число $y_0 = r(x_0)$ має зображення $\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_kb(1-b)} = r\left(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m0(1)}\right)$ і $\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k[1-b](b)} = r\left(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m1(0)}\right)$, де $k = \dfrac{1}{2}m$, якщо m парне, $k = \dfrac{1}{2}(m+1)$, якщо m не парне.

Якщо число $x < x_0$ і достатньо близьке до x_0, то воно має зображення $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m0\underbrace{1\ldots1}_{2n+1}d_1d_2\ldots}$.

Тоді очевидно, що $x \to x_0$ рівносильне $n \to \infty$ і

$$\left|r(x) - r(x_0)\right| < q_b q^n_{1-b} \prod_{i=1}^{k} q_{b_i} \to \infty,\ \ n \to \infty, \quad \Leftrightarrow \quad x \to x_0.$$

Отже, функція r неперервна в точці x_0 зліва.

Якщо число $x > x_0$ і достатньо близьке до x_0, то воно має зображення $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m1\underbrace{0\ldots0}_{2n+1}e_1e_2\ldots}$.

Тоді очевидно, що $x \to x_0$ рівносильне $n \to \infty$. А тому

$$\left|r(x) - r(x_0)\right| < q_{1-b} q^n_{b} \prod_{i=1}^{k} q_{b_i} \to \infty,\ \ n \to \infty, \quad \Leftrightarrow \quad x \to x_0.$$

Отже, функція r неперервна в точці x_0 справа. Неперервність функції доведено.

Для доведення ніде не монотонності функції досить показати, що функція не є монотонною на довільному циліндрі парного рангу (з довільною основою). Для цього розглянемо циліндр $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}}$, три точки $x_1 = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}d_1d_210(01)}$, $x_2 = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}d_1d_210(10)}$, $x_3 = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}d_1d_210(1101)}$, де $(d_1, d_2) \neq (1,0)$, і відповідні їм значення функції:

$$y_1 = r(x_1) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_kb[1-b](b)}, \qquad y_2 = r(x_2) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_kb(1-b)}, \qquad y_3 = r(x_3) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k(b[1-b])}.$$

Очевидно, що $x_1 < x_2 < x_3$. Якщо $b = 0$, то $y_1 < y_3 < y_2$. Тоді $(y_2 - y_1)(y_3 - y_2) < 0$.

Якщо $b = 1$, то $y_2 < y_3 < y_1$ і $(y_2 - y_1)(y_3 - y_2) < 0$. Тому функція r на циліндрі $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}}$ не є монотонною, а отже, не має жодного проміжку монотонності.

Наслідок 1. *На кожному Q_2-циліндрі функція r досягає свого найбільшого та найменшого значень.*

Нагадаємо, що *інверсором* цифр Q_2-зображення чисел (або просто інверсором Q_2-зображення) називається функція I, означена на відрізку $[0;1]$ рівністю

$$I(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_n]\ldots}.$$

Відомо [22], що функція I є коректно означеною, неперервною, строго спадною сингулярною функцією (тобто її похідна рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега).

Зауваження 3. Функції $f(x) = I(r(x))$ і $g(x) = r(I(x))$ як суперпозиції двох неперервних функцій є неперервними. Вони мають властивості, схожі з властивостями функції r. Про це йтиметься далі.

4. Варіаційні властивості функції.

Лема 3. *Образом Q_2-циліндра парного рангу $2k$ при відображенні r є Q_2-циліндр рангу k.*

Доведення. Розглянемо циліндр $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}}$ і точку $x_0 = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}\alpha_{2k+1}\alpha_{2k+2}\ldots}$, що йому належить. Нехай $y_0 = r(x_0) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k a_1\ldots a_m\ldots}$. Очевидно, що число y_0 належить циліндру $\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k}$. Покажемо, що в $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}}$ існують точки x_1 і x_2 такі, що $f(x_1) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k(0)}$, $f(x_2) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k(1)}$. Це завдяки неперервності функції r і завершить доведення.

Якщо $b_k = 0$, то, взявши $(\alpha_{2n+1}, \alpha_{2n+2}) = (c_{2k-1}, c_{2k})$ для всіх $n \geq k$, отримаємо $x_1 = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}c_{2k}(c_{2k-1}c_{2k})}$, для якої $r(x_1) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_{k-1}b_k(0)}$. А взявши $(\alpha_{2n+1}, \alpha_{2n+2}) = (c_{2k-1}, 1 - c_{2k})$ для всіх $n \geq k$, отримаємо $x_2 = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}c_{2k}(c_{2k-1}[1-c_{2k}])}$, для якої $r(x_2) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_{k-1}b_k(1)}$.

Якщо $b_k = 1$, то вибір періоду для цифр чисел x_1 і x_2 слід зробити протилежним:

$$x_1 = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}c_{2k}(c_{2k-1}[1-c_{2k}])} \qquad \text{і} \qquad x_2 = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}c_{2k}(c_{2k-1}c_{2k})}.$$

Лема 4. *Прообразом циліндра $\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k}$ є кожен із циліндрів у вигляді $\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k}}$, де*

$$\overline{\alpha_1\alpha_2} = \begin{cases} \overline{00}, & \text{якщо} \quad b_1 = 0, \\ \overline{c_1 d_1} \neq \overline{00}, & \text{якщо} \quad b_1 = 1, \end{cases}$$

$$\overline{\alpha_{2i-1}\alpha_{2i}} = \begin{cases} \overline{\alpha_{2i-3}\alpha_{2i-2}}, & \text{якщо} \quad b_i = b_{i-1}, \\ \overline{c_i d_i} \neq \overline{\alpha_{2i-3}\alpha_{2i-2}}, & \text{якщо} \quad b_i \neq b_{i-1}, \end{cases} \qquad i = \overline{2,k}.$$

Кількість m прообразів циліндра $\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k}$ при відображенні r обчислюється за формулою

$$m = m\big(\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k}\big) = \begin{cases} 3^{N_k}, & \text{якщо} \quad b_1 = 0, \\ 3^{N_k+1}, & \text{якщо} \quad b_1 \neq 0, \end{cases} \tag{3}$$

$N_k = \sharp\{i\colon b_{i+1} \neq b_i,\ i = \overline{1, k-1}\}$ *— кількість i, для яких $b_{i+1} \neq b_i$.*

Доведення. Перша частина твердження випливає безпосередньо з означення функції r і попередньої леми. Використаємо метод математичної індукції. Очевидно, що прообразами циліндра $\Delta^{Q_2}_0$ є циліндр $\Delta^{Q_2}_{00}$, а циліндра $\Delta^{Q_2}_1$ — циліндри: $\Delta^{Q_2}_{01}$, $\Delta^{Q_2}_{10}$, $\Delta^{Q_2}_{11}$. Циліндри 2-го рангу мають такі прообрази:

1) $\Delta^{Q_2}_{00}$ — $\Delta^{Q_2}_{0000}$;
2) $\Delta^{Q_2}_{01}$ — $\Delta^{Q_2}_{0001}$, $\Delta^{Q_2}_{0010}$, $\Delta^{Q_2}_{0011}$;
3) $\Delta^{Q_2}_{10}$ — $\Delta^{Q_2}_{0100}$, $\Delta^{Q_2}_{0110}$, $\Delta^{Q_2}_{0111}$, $\Delta^{Q_2}_{1000}$, $\Delta^{Q_2}_{1001}$, $\Delta^{Q_2}_{1011}$, $\Delta^{Q_2}_{1100}$, $\Delta^{Q_2}_{1101}$, $\Delta^{Q_2}_{1110}$;
4) $\Delta^{Q_2}_{11}$ — $\Delta^{Q_2}_{0101}$, $\Delta^{Q_2}_{1010}$, $\Delta^{Q_2}_{1111}$. Отже, для $k = 1, 2$ рівність (3) виконується.

Припустимо, що вона виконується для $k = n$ і розглянемо $k = n + 1$, а саме: циліндр $\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_n b_{n+1}}$ рангу $n + 1$. Згідно з припущенням кількість прообразів циліндра $\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_n}$ дорівнює 3^{N_k}, якщо $b_1 = 0$, і 3^{N_k+1}, якщо $b_1 = 1$.

Якщо $b_{n+1} = b_n$, то кількість прообразів циліндрів $\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_n}$ і $\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_n b_{n+1}}$ однакова.

Якщо ж $b_{n+1} \neq b_n$, то $m(\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_n b_{n+1}}) = 3m(\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_n})$, тобто рівність (3) виконується і в цьому випадку.

Лему 4 доведено.

Теорема 2. *Функція r має необмежену варіацію.*

Доведення. Коливання (різниця максимуму і мінімуму) функції r на Q_2-циліндрі парного рангу дорівнює довжині його образу, тому варіація $V(r)$ функції r є більшою, ніж сумарна довжина образів V_k усіх Q_2-циліндрів рангу $2k$ для будь-якого $k \in N$, тобто

$$V(r) > V_k \equiv \sum_{\alpha_1=0}^{1} \sum_{\alpha_2=0}^{1} \ldots \sum_{\alpha_{2k}=0}^{1} \left| r\left(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k}}\right)\right|.$$

Оскільки існує лише один Q_2-циліндр 2-го рангу $\Delta^{Q_2}_{00}$, що є образом циліндра 4-го рангу $\Delta^{Q_2}_{0000}$, а решта циліндрів є образом принаймні трьох циліндрів 4-го рангу, то

$$V_2 > 3 - \left| r(\Delta^{Q_2}_{0000})\right| = 3 - 2q_0^2.$$

Аналогічно міркуючи стосовно довільного циліндра $\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_8}$ 8-го рангу, отримаємо

$$V_4 > \left(3 - 2q_0^2\right)^2.$$

За індукцією $V_{4k} > \left(3 - 2q_0^2\right)^k$. Але $3 - 2q_0^2 > 1$, тому $\lim_{k\to\infty} V_{4k} = \infty$, отже, r — функція необмеженої варіації.

Лема 5. *Нехай $r\left(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}}\right) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k}$. Якщо $b_k = 0$, то функція r на циліндрі $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}c_{2k}}$ досягає найбільшого значення в трьох точках, а найменшого — в одній, якщо ж $b_k = 1$, то навпаки, а саме: при $b_k = 1$ маємо*

$$\max_{x\in\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}}} r(x) = r\left(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}(c_{2k-1}c_{2k})}\right),$$

$$\min_{x\in\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}}} r(x) = r\left(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}(ab)}\right), \quad \text{де} \quad (a,b) \neq (c_{2k-1}, c_{2k}),$$

а при $b_k = 0$ маємо

$$\min_{x\in\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}}} r(x) = r\left(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}(c_{2k-1}c_{2k})}\right),$$

$$\max_{x\in\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}}} r(x) = r\left(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}(ab)}\right), \quad \text{де} \quad (a,b) \neq (c_{2k-1}, c_{2k}),$$

Справді, якщо $b_k = 0$, то

$$r\left(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}(ab)}\right) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_{k-1}0(1)} = \max \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_{k-1}b_k},$$

$$r\left(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}(c_{2k-1}c_{2k})}\right) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_{k-1}(0)} = \min \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_{k-1}b_k}.$$

Якщо $b_k = 1$, то

$$r\left(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}(c_{2k-1}c_{2k})}\right) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_{k-1}(1)} = \max \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_{k-1}b_k},$$

$$r\left(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}(ab)}\right) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_{k-1}1(0)} = \min \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_{k-1}b_k}.$$

5. Диференціальні властивості функції. Неважко довести, що коли існує скінченна похідна функції r в точці x_0, то вона обчислюється за формулою

$$r'(x_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|r\left(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1(x_0)\ldots\alpha_{2k-1}(x_0)\alpha_{2k}(x_0)}\right)\right|}{\left|\Delta^{Q_2}_{\alpha_1(x_0)\ldots\alpha_{2k-1}(x_0)\alpha_{2k}(x_0)}\right|}, \tag{4}$$

де $\left|r\left(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1(x_0)\ldots\alpha_{2k-1}(x_0)\alpha_{2k}(x_0)}\right)\right|$ — коливання (різниця найбільшого і найменшого значень) функції r на циліндрі $\Delta^{Q_2}_{\alpha_1(x_0)\ldots\alpha_{2k}(x_0)}$.

Тому відсутність скінченної границі (4) є аргументом для висновку: функція в точці x_0 не має похідної.

Якщо $x_0 = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k}\ldots}$ і $r(x_0) = \Delta^{Q_2}_{b_1b_2\ldots b_k\ldots}$, то

$$\frac{\left|r\left(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k}}\right)\right|}{\left|\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k}}\right|} = \frac{\left|\Delta^{Q_2}_{b_1b_2\ldots b_k}\right|}{\left|\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k}}\right|} = \prod_{i=1}^{k} \frac{q_{b_i}}{q_{\alpha_{2i-1}}q_{\alpha_{2i}}}.$$

Тому

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|r\left(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k}}\right)\right|}{\left|\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k}}\right|} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{q_{b_k}}{q_{\alpha_{2k-1}}q_{\alpha_{2k}}}.$$

Відношення $\dfrac{q_{b_i}}{q_{\alpha_{2i-1}}q_{\alpha_{2i}}}$ може набувати не більше чотирьох значень. Справді, $\dfrac{q_0}{q_0q_1} = \dfrac{q_1}{q_1^2} = = \dfrac{1}{q_1} > 1,\ \dfrac{q_1}{q_0q_1} = \dfrac{q_0}{q_0^2} = \dfrac{1}{q_0} > 1,\ \dfrac{q_0}{q_1^2},\ \dfrac{q_1}{q_0^2}$. Тому має справедливе таке твердження.

Теорема 3. *Якщо $q_0 > q_1^2$ і $q_1 > q_0^2$, що рівносильно $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < q_0 < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, то функція r є ніде не диференційовною (не має скінченної похідної у жодній точці).*

Наслідок 2. *Якщо $q_0 = \dfrac{1}{2}$, то функція r є ніде не диференційовною.*

Вивчимо детальніше диференційовні властивості функції r при послаблених умовах на q_0 з приводу наявності нескінченної похідної.

Зауваження 4. Неважко довести, що коли в точці $x_0 = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$ існує похідна $r'(x_0)$, то вона може бути обчислена за формулою

$$r'(x_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{r\left(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2k}(1)}\right) - r\left(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2k}(0)}\right)}{\left|\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_{2k}}\right|}.$$

Теорема 4. *Якщо $x_0 \in [0;1]$ є Q_2-унарним числом, причому точкою максимуму або точкою мінімуму функції r, то в цій точці функція r не має похідної (ні скінченної, ні нескінченної).*

Доведення. 1. Якщо $x_0 = \Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_{2k}\ldots}$ — точка максимуму функції r, тобто існує таке $\varepsilon > 0$, що значення функції r в кожній точці ε-околу $(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$ точки x_0 не перевищує y_0, то існує такий номер k, що циліндр $\Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_{2k}}$, який містить точку x_0, повністю належить інтервалу $(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$. Тоді x_0 є точкою найбільшого значення функції на всіх циліндрах

$\Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_{2k}a_{2k+1}\ldots a_{2(k+n)}}$, $n \in N$, при цьому $r(x_0) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k(1)}$, $x_0 = \Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_{2k}(cd)}$, де $(0,0) \neq \neq (c,d) \neq (1,1)$.

Нехай x_n — точка найменшого значення функції r на циліндрі $\Delta^{Q_2}_{a_1 a_2\ldots a_{2(k+n)}}$. Очевидно, що $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$,

$$r(x_0) - r(x_n) = \left|\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k\underbrace{1\ldots 1}_{n}}\right| = \left(\prod_{i=1}^{k} q_{b_i}\right) q_1^n,$$

$$|x_0 - x_n| < \left|\Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_{2k}\underbrace{cd\ldots cd}_{2n}}\right| = \left(\prod_{i=1}^{k} q_{a_{2i-1}} q_{a_{2i}}\right)(q_c q_d)^n.$$

Тоді

$$\frac{r(x_0) - r(x_n)}{|x_n - x_0|} > \prod_{i=1}^{k} \frac{q_{b_i}}{q_{a_{2i-1}} q_{a_{2i}}} \left(\frac{q_1}{q_c q_d}\right)^n \to \infty, \quad n \to \infty,$$

оскільки $\dfrac{q_1}{q_c q_d}$ дорівнює $\dfrac{1}{q_0}$ або $\dfrac{1}{q_1}$. Отже, $r'(x_0)$ не існує.

2. Аналогічно доводиться твердження у другому випадку. Якщо $x_0 = \Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_{2k}\ldots}$ — точка мінімуму функції r, тобто $r(x_0) \leq r(x)$ при всіх $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ для деякого $\varepsilon > 0$, то існує таке $k \in N$, що $\Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_{2k}} \subset (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$. Тоді x_0 є точкою найменшого значення функції r на всіх циліндрах $\Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_{2k}a_{2k+1}\ldots a_{2(k+n)}}$, $n \in N$. При цьому $x_0 = \Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_{2k}(cd)}$ і $r(x_0) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k(0)}$, а оскільки x_0 — Q_2-унарне число, то $(0;0) \neq (c,d) \neq (1,1)$.

Нехай x_n — точка найбільшого значення функції r на циліндрі $\Delta^{Q_2}_{a_1 a_2\ldots a_{2(k+n)}}$. Очевидно, що $x_n \to x_0$, $n \to \infty$,

$$r(x_n) - r(x_0) = \left|\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k\underbrace{0\ldots 0}_{n}}\right| = \left(\prod_{i=1}^{k} q_{b_i}\right) q_0^n,$$

$$|x_n - x_0| < \left|\Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_{2k}\underbrace{cd\ldots cd}_{2n}}\right| = \left(\prod_{i=1}^{k} q_{a_{2i-1}} q_{a_{2i}}\right)(q_c q_d)^n.$$

Але $(c,d) \in \{(0;1),(1;0)\}$, тоді $\dfrac{q_0}{q_c q_d} > 1$ і

$$\frac{r(x_n) - r(x_0)}{|x_n - x_0|} > \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{q_{b_i}}{q_{a_{2i-1}} q_{a_{2i}}}\right) \left(\frac{q_0}{q_c q_d}\right)^n \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Тому в жодному з випадків 1 і 2 не існує скінченної границі

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r(x_n) - r(x_0)}{x_n - x_0},$$

а отже, й скінченної похідної $r'(x_0)$.

Оскільки x_0 — точка екстремуму функції, то $r(x_0) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k(b)}$, причому є точкою максимуму, якщо $b = 1$, і точкою мінімуму, якщо $b = 0$. Але тоді x_0 має таке Q_2-зображення $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}(cd)}$, причому $(0,0) \neq (c,d) \neq (1,1)$, оскільки за умовою x_0 — Q_2-унарне число. Кожен циліндр достатньо великого рангу, який містить точку x_0, має вигляд

$$\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}\underbrace{cd\ldots cd}_{2n}} = [u_n; v_n],$$

де

$$u_n = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}\underbrace{cd\ldots cd}_{2n}(0)}, \qquad v_n = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}\underbrace{cd\ldots cd}_{2n}(1)}.$$

Тоді згідно з означенням функції $r(u_n) = r(v_n)$ і $\dfrac{r(u_n) - r(v_n)}{u_n - v_n} = 0$ для будь-якого $n \in N$. Тому, враховуючи попередні висновки й попереднє зауваження, констатуємо: функція r в точці x_0 не має ні скінченної, ні нескінченної похідної.

Теорему 4 доведено.

Теорема 5. *Функція r не має скінченної похідної в жодній Q_2-бінарній точці, причому якщо Q_2-бінарна точка є точкою екстремуму функції, то в ній функція не має ні скінченної, ні нескінченної похідної.*

Доведення. Нехай $x_0 = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m 1(0)} = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m 0(1)}$ — довільна Q_2-бінарна точка. Можливі випадки 1) $m = 2k$ та 2) $m = 2k-1$. Розглянемо їх окремо.

1. Нехай $m = 2k$ і $r\left(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}1(0)}\right) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k b(1-b)}$, $r\left(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}0(1)}\right) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k d(1-d)}$.

1.1. Якщо $b = 0 = d$, то x_0 — точка максимального значення функції на циліндрах

$$\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}10\underbrace{0\ldots 0}_{2n}}, \tag{5}$$

$$\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}01\underbrace{1\ldots 1}_{2n}}, n \in N. \tag{6}$$

Нехай x_n — точка найменшого значення функції r на циліндрі $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}10\underbrace{0\ldots 0}_{2n}}$, а $\overline{x}_n$ — точка найменшого значення функції на циліндрі $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}01\underbrace{1\ldots 1}_{2n}}$. Тоді

$$r(x_n) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k 0\underbrace{1\ldots 1}_{n}(0)} = r(\overline{x}_n),$$

$$r(x_0) - r(x_n) = r(x_0) - r(\overline{x}_n) = \left|\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k 0\underbrace{1\ldots 1}_{n}}\right| = \left(\prod_{i=1}^{k} q_{b_i}\right) q_0 q_1^n;$$

$$\left|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}10\underbrace{0\ldots 0}_{2n+2}}\right| < x_n - x_0 < \left|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}10\underbrace{0\ldots 0}_{2n}}\right| = \left(\prod_{i=1}^{k} q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}}\right) q_1 q_0^{2n+1},$$

$$\left|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}01\underbrace{1\ldots 1}_{2n+2}}\right| < x_0 - \overline{x}_n < \left|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}01\underbrace{1\ldots 1}_{2n}}\right| = \left(\prod_{i=1}^{k} q_{c_{2i-1}} q_{c_{2i}}\right) q_0 q_1^{2n+1},$$

$$\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}}\right)\frac{1}{q_1}\left(\frac{q_1}{q_0^2}\right)^n < \frac{r(x_0)-r(x_n)}{x_n-x_0} < \left(\prod_{i=1}^{k}\frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}}\right)\frac{1}{q_1q_0^2}\left(\frac{q_1}{q_0^2}\right)^n,$$

$$\frac{r(x_0)-r(\overline{x}_n)}{x_0-\overline{x}_n} > \left(\prod_{i=1}^{k}\frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}}\right)\frac{1}{q_1^{n+1}} \to \infty, \quad n\to\infty.$$

У цьому випадку функція не має ні скінченної, ні нескінченної похідної в точці x_0.

1.2. Якщо $b=1=1-d$, то x_0 є точкою найменшого значення функції r на циліндрах $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}10\underbrace{0\ldots0}_{2n}}$ і найбільшого значення — на циліндрах $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}01\underbrace{1\ldots1}_{2n}}$, $n\in N$.

Нехай x_n — точка найбільшого значення функції r на циліндрі $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}10\underbrace{0\ldots0}_{2n}}$, а $\overline{x}_n$ — точка найменшого значення функції на циліндрі $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}01\underbrace{1\ldots1}_{2n}}$. Тоді

$$r(x_n)=\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k1\underbrace{0\ldots0}_{n}(1)}, \qquad r(\overline{x}_n)=\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k0\underbrace{1\ldots1}_{n}(0)},$$

$$r(x_n)-r(x_0)=\left|\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k1\underbrace{0\ldots0}_{n}}\right|=\left(\prod_{i=1}^{k}q_{b_i}\right)q_1q_0^n,$$

$$0<x_n-x_0<\left|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}10\underbrace{0\ldots0}_{2n}}\right|=\left(\prod_{i=1}^{2k}q_{c_i}\right)q_1q_0^{2n+1},$$

$$\frac{r(x_n)-r(x_0)}{x_n-x_0} > \left(\prod_{i=1}^{k}\frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}}\right)\frac{1}{q_0^{n+1}} \to \infty, \quad n\to\infty.$$

Разом з цим

$$r(x_0)-r(\overline{x}_n)=\left|\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k0\underbrace{1\ldots1}_{n}}\right|=\left(\prod_{i=1}^{k}q_{b_i}\right)q_0q_1^n,$$

$$\left|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}01\underbrace{1\ldots1}_{2n+2}}\right| < x_0-\overline{x}_n < \left|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}01\underbrace{1\ldots1}_{2n}}\right| = \left(\prod_{i=1}^{2k}q_{c_i}\right)q_0q_1^{2n+1},$$

$$\frac{r(x_0)-r(\overline{x}_n)}{x_0-\overline{x}_n} > \left(\prod_{i=1}^{k}\frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}}\right)\frac{1}{q_1^{n+1}} \to \infty, \quad n\to\infty.$$

Отже, в цьому випадку функція скінченної похідної не має.

1.3. Якщо $b=0=1-d$, то x_0 є точкою найбільшого значення функції r на кожному з циліндрів послідовності (5) і точкою найменшого значення на кожному з циліндрів послідовності (6). Якщо x_n — точка найменшого значення на циліндрі (5), то

$$r(x_0)-r(x_n)=\left|\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k0\underbrace{1\ldots1}_{n}}\right|=\left(\prod_{i=1}^{k}q_{b_i}\right)q_0q_1^n,$$

$$\left|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}10\underbrace{0\ldots0}_{2n+2}}\right| < x_n - x_0 < \left|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}10\underbrace{0\ldots0}_{2n}}\right| = \left(\prod_{i=1}^{2k} q_{c_i}\right) q_1 q_0^{2n+1},$$

$$\left(\prod_{i=1}^{k} \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}}\right)\frac{1}{q_1}\left(\frac{q_1}{q_0^2}\right)^n < \frac{r(x_0)-r(x_n)}{x_n-x_0} < \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}}\right)\frac{1}{q_1 q_0^2}\left(\frac{q_1}{q_0^2}\right)^n.$$

Якщо $\overline{x}_n$ — точка найбільшого значення функції на циліндрі (6), то

$$r(\overline{x}_n) - r(x_0) = \left|\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k1\underbrace{0\ldots0}_{n}}\right| = \left(\prod_{i=1}^{k} q_{b_i}\right) q_1 q_0^{n},$$

$$\left|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}01\underbrace{1\ldots1}_{2n+2}}\right| < x_0 - \overline{x}_n < \left|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}01\underbrace{1\ldots1}_{2n}}\right| = \left(\prod_{i=1}^{2k} q_{c_i}\right) q_0 q_1^{2n+1},$$

$$\left(\prod_{i=1}^{k} \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}}\right)\frac{1}{q_0}\left(\frac{q_0}{q_1^2}\right)^n < \frac{r(\overline{x}_n)-r(x_0)}{x_0-\overline{x}_n} < \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}}\right)\frac{1}{q_0 q_1^2}\left(\frac{q_0}{q_1^2}\right)^n.$$

Оскільки $\frac{q_1}{q_0^2} > 1$ або $\frac{q_0}{q_1^2} > 1$, то принаймні одне з відношень $\frac{r(x_0)-r(x_n)}{x_n-x_0}$ або $\frac{r(\overline{x}_n)-r(x_0)}{x_0-\overline{x}_n}$ прямує до нескінченності, коли $n \to \infty$. Це свідчить про те, що $r'(x_0)$ не існує. Якщо при цьому одне з чисел $\frac{q_1}{q_0^2} > 1$ або $\frac{q_0}{q_1^2} > 1$ менше або рівне 1, то функція не має ні скінченної, ні нескінченної похідної.

1.4. Якщо $b = 1 = d$, тобто

$$r\left(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}1(0)}\right) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k1(0)} = r\left(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}0(1)}\right),$$

то x_0 — точка найменшого значення функції на циліндрах обох видів (5), (6). Якщо x_n — точка найбільшого значення функції r на циліндрі (5), то

$$r(x_n) - r(x_0) = \left|\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k1\underbrace{0\ldots0}_{n}}\right| = \left(\prod_{i=1}^{k} q_{b_i}\right) q_1 q_0^{n},$$

$$\left|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}10\underbrace{0\ldots0}_{2n+2}}\right| < x_n - x_0 < \left|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}10\underbrace{0\ldots0}_{2n}}\right| = \left(\prod_{i=1}^{2k} q_{c_i}\right) q_1 q_0^{2n+1},$$

$$\frac{r(x_n)-r(x_0)}{x_n-x_0} > \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}}\right)\frac{1}{q_0^{n+1}} \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Якщо $\overline{x}_n$ — точка найбільшого значення функції r на циліндрі (6), то

$$r(\overline{x}_n) - r(x_0) = \left|\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k1\underbrace{0\ldots0}_{n}}\right| = \left(\prod_{i=1}^{k} q_{b_i}\right) q_1 q_0^{n},$$

$$\left|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}01\underbrace{1\ldots1}_{2n+2}}\right| < x_0 - \overline{x}_n < \left|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}01\underbrace{1\ldots1}_{2n}}\right| = \prod_{i=1}^{2k} q_{c_i} \cdot q_0 q_1^{2n+1},$$

$$\left(\prod_{i=1}^{k} \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}}\right)\frac{1}{q_0}\left(\frac{q_0}{q_1^2}\right)^n < \frac{r(\overline{x}_n) - r(x_0)}{x_0 - \overline{x}_n} < \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}}\right)\frac{1}{q_0 q_1^2}\left(\frac{q_0}{q_1^2}\right)^n.$$

Отже, у цьому випадку не існує границі (ні скінченної, ні нескінченної) відношення приросту функції до приросту аргументу при умові, що приріст аргументу прямує до нуля, а тому не існує й похідної.

2. Розглянемо випадок: $m = 2k-1$, тобто точку $x_0 = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}1(0)} = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}0(1)}$ і відповідне їй значення

$$r\Big(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}1(0)}\Big) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_{k-1}b_k(1-b_k)}, \qquad r\Big(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}0(1)}\Big) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_{k-1}[1-b_k](b_k)}.$$

У цьому випадку x_0 є точкою найбільшого значення функції r на всіх циліндрах однієї з послідовностей $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}1\underbrace{0\ldots0}_{2n}}$ або $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}0\underbrace{1\ldots1}_{2n}}$, а на циліндрах іншої послідовності — точкою найменшого значення.

Якщо $b_k = 0$, то x_0 є точкою найбільшого значення функції на кожному з циліндрів першої послідовності і точкою найменшого значення функції на циліндрах другої послідовності.

Якщо x_n — точка найменшого значення функції на циліндрі $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}1\underbrace{0\ldots0}_{2n}}$, то

$$r(x_0) - r(x_n) = \left|\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_{k-1}0\underbrace{1\ldots1}_{n}}\right| = \left(\prod_{i=1}^{k-1} q_{b_i}\right) q_0 q_1^n,$$

$$\left|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}1\underbrace{0\ldots0}_{2n+2}}\right| < x_n - x_0 < \left|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}1\underbrace{0\ldots0}_{2n}}\right| = \left(\prod_{i=1}^{k-1} q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}\right) q_{c_{2k-1}} q_1 q_0^{2n}.$$

Звідси

$$\left(\prod_{i=1}^{k} \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}}\right)\frac{q_0}{q_{c_{2k-1}}q_1}\left(\frac{q_1}{q_0^2}\right)^n <$$
$$< \frac{r(x_0) - r(x_n)}{x_n - x_0} < \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}}\right)\frac{1}{q_{c_{2k-1}}q_0 q_1}\left(\frac{q_1}{q_0^2}\right)^n.$$

Якщо $\overline{x}_n$ — точка найбільшого значення функції на циліндрі $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}0\underbrace{1\ldots1}_{2n}}$, то

$$r(\overline{x}_n) - r(x_0) = \left|\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_{k-1}1\underbrace{0\ldots0}_{n}}\right| = \left(\prod_{i=1}^{k-1} q_{b_i}\right) q_1 q_0^n,$$

$$\left|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}0\underbrace{1\ldots1}_{2n+2}}\right| < x_0 - \overline{x}_n < \left|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}0\underbrace{1\ldots1}_{2n}}\right| = \left(\prod_{i=1}^{k-1} q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}\right) q_{c_{2k-1}} q_0 q_1^{2n},$$

а тому

$$\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}}\right)\frac{q_1}{q_{c_{2k-1}}q_0}\left(\frac{q_0}{q_1^2}\right)^n <$$

$$< \frac{r(\overline{x}_n)-r(x_0)}{x_0-\overline{x}_n} < \left(\prod_{i=1}^{k}\frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}}\right)\frac{1}{q_{c_{2k-1}}q_0q_1}\left(\frac{q_0}{q_1^2}\right)^n.$$

Оскільки принаймні одне з чисел $\frac{q_1}{q_0^2}$ або $\frac{q_0}{q_1^2}$ більше 1, то принаймні одне з відношень $\frac{r(x_0)-r(x_n)}{x_0-x_n}$ або $\frac{r(\overline{x}_n)-r(x_0)}{\overline{x}_n-x_0}$ прямує до $-\infty$, коли $n\to\infty$. Якщо при цьому інше число менше або рівне 1, то границя відношень нескінченною бути не може.

Якщо $b_k=1$, то x_0 є точкою найменшого значення функції на кожному з циліндрів послідовності (5) і точкою найбільшого значення функції на циліндрах послідовності (6).

Якщо x_n — точка найбільшого значення функції r на циліндрі $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}1\underbrace{0\ldots0}_{2n}}$, то

$$r(x_n)-r(x_0)=\left|\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_{k-1}1\underbrace{0\ldots0}_{n}}\right|=\left(\prod_{i=1}^{k-1}q_{b_i}\right)q_1q_0^n,$$

$$\left|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}1\underbrace{0\ldots0}_{2n+2}}\right|<x_n-x_0<\left|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}1\underbrace{0\ldots0}_{2n}}\right|=\left(\prod_{i=1}^{k-1}q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}\right)q_{c_{2k-1}}q_1q_0^{2n}.$$

Звідси

$$\frac{r(x_n)-r(x_0)}{x_n-x_0}<\prod_{i=1}^{k-1}\frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}}\frac{1}{q_{c_{2k-1}}q_0^n}\to\infty,\quad n\to\infty,$$

$$\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}}\right)\frac{1}{q_{c_{2k-1}}q_0^n}<\frac{r(x_n)-r(x_0)}{x_n-x_0}<$$

$$<\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}}\right)\frac{1}{q_{c_{2k-1}}q_0^{n+2}}\to\infty,\quad n\to\infty.$$

Якщо $\overline{x}_n$ — точка найменшого значення функції r на циліндрі $\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}0\underbrace{1\ldots1}_{2n}}$, то

$$r(x_0)-r(\overline{x}_n)=\left|\Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_{k-1}0\underbrace{1\ldots1}_{n}}\right|=\left(\prod_{i=1}^{k-1}q_{b_i}\right)q_0q_1^n,$$

$$0<x_0-\overline{x}_n\le\left|\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k-1}0\underbrace{1\ldots1}_{2n}}\right|=\left(\prod_{i=1}^{k-1}q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}\right)q_{c_{2k-1}}q_0q_1^{2n}.$$

Звідси маємо

$$\frac{r(x_0)-r(\overline{x}_n)}{x_0-\overline{x}_n}\ge\left(\prod_{i=1}^{k-1}\frac{q_{b_i}}{q_{c_{2i-1}}q_{c_{2i}}}\right)\frac{1}{q_{c_{2k-1}}q_1^n}\to\infty,\quad n\to\infty.$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r(x_n)-r(x_0)}{x_n-x_0}=\lim_{n\to\infty}\frac{r(x_0)-r(\overline{x}_n)}{x_0-\overline{x}_n}=\infty.$$

Як бачимо, в усіх випадках похідної функції r в точці x_0 не існує.

Теорема 6. *Якщо* $q_0=q_1^2$, *що рівносильне* $q_0=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, *або* $q_1=q_0^2$, *що рівносильне* $q_0=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, *то функція* r *не має скінченної похідної в жодній точці.*

Доведення. З урахуванням теорем 4, 5 для доведення твердження досить розглянути лише точку x_0, що є Q_2-унарним числом. Тоді

$$x_0=\Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{d_1}\underbrace{1\ldots1}_{e_1}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{d_n}\underbrace{1\ldots1}_{e_n}\ldots}.$$

Припустимо, що існує скінченна похідна $r'(x_0)$, яка обчислюється за формулою

$$r'(x_0)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{q_{b_k}}{q_{\alpha_{2k-1}(x_0)}q_{\alpha_{2k}(x_0)}}.$$

При виконанні умов теореми серед множників нескінченного добутку немає жодного, меншого 1. При цьому серед них множників, більших числа

$$M=\min\left\{\frac{1}{q_0},\frac{1}{q_1},\frac{q_{1-i}}{q_i^2}\neq 1\right\}>1,$$

існує нескінченна кількість. Тому добуток є нескінченним, що суперечить скінченності $r'(x_0)$.

Теорему 6 доведено.

6. Симетрії графіка та інтегральні властивості функції. Функція r інтегровна на $[0;1]$, оскільки є неперервною. Інтеграл $\int_0^1 r(x)\,dx$ дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції. Введемо позначення для частин графіка

$$\Gamma=\big\{(x;y)\colon x\in[0;1],\ \ y=r(x)\big\}$$

функції r:

$$\Gamma_{ij}=\big\{(x,y)\colon x\in\Delta^{Q_2}_{ij},\ \ y=r(x),\ \ (i,j)\in A^2\big\},$$
$$\Gamma_{c_1\ldots c_{2k}}=\big\{(x;y)\colon x\in\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{2k}},\ \ y=r(x),\ \ c_i\in A,\ \ i=\overline{1,2k}\,\big\},$$

а також для інтегралів

$$S=\int\limits_0^1 r(x)\,dx,\qquad S_{ij}=\int\limits_{x\in\Delta^{Q_2}_{ij}} r(x)\,dx,\quad (i,j)\in A^2.$$

Лема 6. *Графік* Γ *функції* r *і його частина* Γ_{00} *афінно-еквівалентні, причому* $\varphi(\Gamma) = \Gamma_{00}$, *де*

$$\varphi: \begin{cases} x' = q_0^2 x, \\ y' = q_0 y. \end{cases}$$

Доведення. Нехай $M(x, y) \in \Gamma$, $x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k}\ldots}$, $y = r(x) = \Delta^{Q_2}_{b_1 b_2 \ldots b_k\ldots}$. Розглянемо образ $M'(x'; y')$ точки $M(x, y)$ під дією афінного перетворення φ:

$$x' = q_0^2 x = \Delta^2_{00\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k}\ldots}, \qquad y' = q_0 y = \Delta^{Q_2}_{0b_1b_2\ldots b_k\ldots}.$$

Очевидно, що $r(x') = y'$, а отже, $M' \in \Gamma_{00}$. Очевидним є й те, що кожна точка $M'(x', y') \in \in \Gamma_{00}$ є образом єдиної точки $M(x, y) \in \Gamma$.

Лему доведено.

Наслідок 3. *Для будь-якого* $x \in [0; 1]$ *виконується рівність* $r(q_0^2 x) = q_0 r(x)$.

Наслідок 4. *Має місце рівність*

$$\int_0^{q_0^2} r(x)\,dx = q_0^3 \int_0^1 r(x)\,dx,$$

зокрема при $q_0 = \dfrac{1}{2}$ *маємо*

$$\int_0^{\frac14} r(x)\,dx = \frac{1}{2^3}\int_0^1 r(x)\,dx.$$

Альтернативне (аналітичне) обґрунтування останньої рівності:

$$\int_0^{q_0^2} r(x)\,dx = \int\limits_{x\in\Delta^{Q_2}_{00}} q_0(\beta_{b_2} + \beta_{\alpha_3}q_{\alpha_2} + \ldots)d\big(0 + q_0^2(\beta_{\alpha_3} + \beta_{\alpha_4}q_{\alpha_3} + \ldots)\big) =$$

$$= q_0^3 \int\limits_{x\in\Delta^{Q_2}_{00}} (\beta_{b_2} + \beta_{\alpha_3}q_{\alpha_2} + \ldots)d(\beta_{\alpha_3} + \beta_{\alpha_4}q_{\alpha_3} + \ldots) = q_0^2\int_0^1 r(x)\,dx.$$

Лема 7. *Якщо точка* $M(x, y)$ *належить частині* Γ_{00} *графіка функції* r, *тобто* $x = = \Delta^{Q_2}_{00\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_{2k}\ldots}$, $y = r(x) = \Delta^2_{0b_2b_3\ldots b_k\ldots}$, *то точка* M' *з координатами*

$$\begin{cases} x' = I(x) = \Delta^2_{11[1-\alpha_3][1-\alpha_4]\ldots[1-\alpha_{2k}]\ldots}, \\ y' = I(y) = \Delta^{Q_2}_{1[1-b_2][1-b_3]\ldots[1-b_k]\ldots} \end{cases}$$

належить частині Γ_{11} *і навпаки.*

Доведення. Зауважимо, що

$$\begin{cases} (\alpha_{2i+1}, \alpha_{2i+2}) = (\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i}) \Leftrightarrow (1-\alpha_{2i+1}, 1-\alpha_{2i+2}) = (1-\alpha_{2i-1}, 1-\alpha_{2i}), \\ b_{i+1} = b_i \Leftrightarrow 1 - b_{i+1} = 1 - b_i, \end{cases} \qquad i \in N.$$

1. Якщо $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$, то $b_2 = 0$, $x' = \Delta^{Q_2}_{1111[1-\alpha_5][1-\alpha_6]\ldots}$, $y' = \Delta^{Q_2}_{11[1-b_3][1-b_4]\ldots}$. Тому очевидно, що $r(x') = y'$.

2. Якщо $(\alpha_3, \alpha_4) \neq (0,0)$, то $b_2 = 1$, $x' = \Delta^{Q_2}_{11[1-\alpha_3][1-\alpha_4][1-\alpha_5][1-\alpha_6]\ldots}$, $y' = \Delta^{Q_2}_{10[1-b_3][1-b_4]\ldots}$. І в цьому випадку, як бачимо, $r(x') = y'$.

Якщо $M(x,y) \in \Gamma_{11}$, то аналогічні міркування (за цією ж логічною схемою) приводять до висновку $M'(x',y') \in \Gamma_{00}$.

Лему доведено.

Наслідок 5. *Для будь-якого* $x \in \Delta^{Q_2}_{00} \cup \Delta^{Q_2}_{11}$ *виконується рівність*

$$r(I(x)) = I(r(x)).$$

Наслідок 6. *Якщо* $q_0 = \dfrac{1}{2}$, *то справджується рівність*

$$\int\limits_{\Delta^2_{11}} r(x)\,dx = \frac{1}{4} - \int\limits_0^{\frac{1}{4}} r(x)\,dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^3}\int\limits_0^1 r(x)\,dx.$$

Дійсно, якщо $q_0 = \dfrac{1}{2}$, то $I(x) = 1 - x$, $I(y) = 1 - y$, а тому

$$\int\limits_{\Delta^2_{11}} r(x)\,dx = \int\limits_{\frac{3}{4}}^{1} r(x)\,dx = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{0} (1-y)d(1-x) = \int\limits_0^{\frac{1}{4}} (1-r(x))\,dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^3}\int\limits_0^1 r(x)\,dx.$$

Наслідок 7. *Якщо* $q_0 = \dfrac{1}{2}$, *то*

$$\int\limits_{\Delta^2_{00}\cup\Delta^2_{11}}^{1} r(x)\,dx = \frac{1}{4}.$$

Лема 8. *Перетворення одиничного квадрата* $[0;1]^2$

$$\varphi : \begin{cases} x' = I(x) = \Delta^{Q_2}_{[1-\alpha_1(x)][1-\alpha_2(x)]\ldots[1-\alpha_{2k}(x)]\ldots}, \\ y' = y, \end{cases}$$

відображає частину Γ_{01} *графіка* Γ *функції* r *на частину* Γ_{10}.

Доведення. Нехай $M(x,y) \in \Gamma_{01}$, тобто $x = \Delta^{Q_2}_{01\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_{2k}\ldots}$, $y = r(x) = \Delta^{Q_2}_{1b_2\ldots b_k\ldots}$. Образ $M'(x',y')$ точки M під дією перетворення φ має координати

$$x' = I(x) = \Delta^{Q_2}_{10[1-\alpha_3][1-\alpha_4]\ldots[1-\alpha_{2k}]\ldots}, \qquad y' = \Delta^{Q_2}_{1b_2\ldots b_k\ldots}.$$

Якщо $(\alpha_3, \alpha_4) = (0,1)$, то $b_2 = 1$ і $x' = \Delta^{Q_2}_{1010[1-\alpha_5][1-\alpha_6]\ldots}$, $y' = \Delta^{Q_2}_{11b_3\ldots b_k\ldots}$. Звідси маємо $r(x') = y'$.

Якщо $(\alpha_3, \alpha_4) \neq (0,1)$, то $b_2 = 0$, і тому $r(x') = y'$. Отже, $M'(x', y') \in \Gamma_{10}$.

Обернене перетворення відображає Γ_{10} на Γ_{01}.

Лему доведено.

Наслідок 8. *Для будь-якого* $x \in \Delta^{Q_2}_{01} \cup \Delta^{Q_2}_{10}$ *виконується рівність*

$$r(I(x)) = r(x).$$

Наслідок 9. *Якщо* $q_0 = \frac{1}{2}$, *то*

$$\int\limits_{\Delta^2_{10}} r(x)\,dx = \int\limits_{\Delta^2_{01}} r(x)\,dx.$$

Справді, при $q_0 = \frac{1}{2}$ маємо $I(x) = 1 - x$, а тому

$$\int\limits_{\Delta^2_{10}} r(x)\,dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} r(x)\,dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} r(1-t)\,d(1-t) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} r(t)\,d(1-t) = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} r(t)\,dt = \int\limits_{\Delta^2_{01}} r(x)\,dx.$$

Лема 9. *Перетворення одиничного квадрата* $[0;1]^2$

$$\varphi\colon \begin{cases} x' = q_0^2 + q_0 q_1 x, \\ y' = q_0 + q_1 y, \end{cases}$$

переводить частину Γ_{01} *графіка* Γ *функції* r *в частину* Γ_{0101}.

Доведення. Нехай $M(x;y) \in \Gamma_{01}$, тобто $x = \Delta^{Q_2}_{01\alpha_3\alpha_4\ldots}$, $y = r(x) = \Delta^{Q_2}_{1b_2b_3\ldots}$. Образ $M' = \varphi(M)$ точки M має координати

$$x' = q_0^2 + q_0 q_1 x = \Delta^{Q_2}_{0101\alpha_3\alpha_4\ldots}, \qquad y' = q_0 + q_1 y = \Delta^{Q_2}_{11b_2b_3\ldots}.$$

Очевидно, що $r(x') = y'$ і $M' \in \Gamma_{0101}$.

Лему доведено.

Наслідок 10. *Для будь-якого* $x \in \Delta^{Q_2}_{01}$ *виконується рівність*

$$r(q_0^2 + q_0 q_1 x) = q_0 + q_1 r(x).$$

Наслідок 11. *Справджується рівність*

$$\int\limits_{\Delta^{Q_2}_{0101}} r(x')\,dx' = q_0^3 q_1^2 + q_0 q_1^2 \int\limits_{\Delta^{Q_2}_{01}} r(x)\,dx.$$

Дійсно,

$$\int\limits_{\Delta^{Q_2}_{0101}} r(x')\,dx' = \int\limits_{\Delta^{Q_2}_{01}} [q_0+q_1r(x)]d(q_0^2+q_0q_1x) = q_0q_1\int\limits_{\Delta^{Q_2}_{01}} [q_0+q_1r(x)]dx =$$

$$= q_0^2q_1(q_0-q_0^2)+q_0q_1^2\int\limits_{\Delta^{Q_2}_{01}} r(x)\,dx = q_0^3q_1^2+q_0q_1^2\int\limits_{\Delta^{Q_2}_{01}} r(x)\,dx.$$

Наслідок 12. *Якщо* $q_0 = \dfrac{1}{2}$, *то*

$$\int\limits_{\Delta^{Q_2}_{0101}} r(x)\,dx = \frac{1}{32}+\frac{1}{8}\int\limits_{\Delta^{Q_2}_{01}} r(x)\,dx.$$

Далі нам будуть корисними оператори лівостороннього та правостороннього зсувів. Нагадаємо їхні означення.

Оператором лівостороннього зсуву цифр Q_2-зображення чисел (оператором лівостороннього зсуву) називається функція ω, означена рівністю $\omega\big(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\big) = \Delta^{Q_2}_{\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ при домовленості не використовувати зображення з періодом (1). Оператор лівостороннього зсуву є кусково-лінійною функцією, яка має вигляд

$$\omega\big(x=\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\big) = \frac{1}{q_{\alpha_1(x)}}+\frac{\beta_{\alpha_1}(x)}{q_{\alpha_1}(x)}+\frac{\beta_{\alpha_1}(x)}{q_{\alpha_1}(x)} = \begin{cases} \dfrac{x}{q_0} & \text{при} \quad \alpha_1=0, \\ \dfrac{x}{q_1}+\dfrac{q_0}{q_1} & \text{при} \quad \alpha_1=1, \end{cases}$$

$$\omega^n(x) = \omega\big(\omega^{n-1}\big(x=\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\big)\big) = \Delta^{Q_2}_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots}.$$

Оператором правостороннього зсуву цифр Q_2-зображення чисел (оператором правостороннього зсуву) з параметром $i\in\{0,1\}$ називається функція δ_i, означена рівністю $\delta_i\big(x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\big) = \Delta^{Q_2}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$.

Оператор правостороннього зсуву δ_i є лінійною зростаючою функцією, яка має вигляд $\delta_i(x) = \beta_i + q_i(x)$ та є оберненою до куска функції, визначеного на циліндрі $\Delta^{Q_2}_i = [iq_{1-i}; q_i+iq_{1-i}] = [\beta_i;\beta_{i+1}]$:

$$\delta_{i_1\ldots i_n}\big(x=\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\big) = \Delta^{Q_2}_{i_1i_2\ldots i_n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Теорема 7. *Частина* Γ_{01} *графіка* Γ *функції* r *має структуру*

$$\Gamma_{01} = \Gamma_{0100}\cup\Gamma_{0101}\cup\Gamma_{0110}\cup\Gamma_{0111}, \tag{7}$$

де $\Gamma_{01ij} = \{x\in\Delta^2_{01ij},\ y=r(x)\},\ (i,j)\in A^2$. *При цьому:*

1) відображення $\varphi:\begin{cases} x' = \delta_{0100}(x) = q_0^2+q_0^3q_1x = \Delta^{Q_2}_{0100\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots}, \\ y' = \delta_{10}y = q_0+q_0q_1y = \Delta^{Q_2}_{10b_1b_2\ldots}, \\ r\big(x=\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k}\ldots}\big) = \Delta^{Q_2}_{b_1b_2\ldots b_k\ldots} = y \end{cases}$ *переводить графік* Γ *в його частину* Γ_{0100}*;*

2) відображення φ: $\begin{cases} x' = \delta_{01}\big(I[\omega^2(x)]\big) = q_0^2 + q_0q_1I(\omega^2(x)) = \Delta^{Q_2}_{01[1-\alpha_3(x)][1-\alpha_4(x)]\ldots}, \\ y' = y = r(x) \end{cases}$ *переводить графік* Γ_{0100} *в його частину* Γ_{0111} *і навпаки;*

3) відображення φ: $\begin{cases} x' = \delta_{01}(I[\omega^2(x)]) = q_0^2 + q_0q_1I(\omega^2(x)) = \Delta^{Q_2}_{01[1-\alpha_3(x)][1-\alpha_4(x)]\ldots}, \\ y' = \delta_1(I[\omega(y)]) = q_0 + q_1I(\omega(y)) = \Delta^{Q_2}_{1[1-b_2][1-b_3]\ldots}, \\ r\big(x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k}\ldots}\big) = \Delta^{Q_2}_{b_1b_2\ldots b_k\ldots} = y \end{cases}$ *переводить* Γ_{0101} *в* Γ_{0110} *і навпаки.*

Доведення. Рівність (7) є очевидною.

1. Нехай $M(x;y) \in \Gamma$, $x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k}\ldots}$, $y = r(x) = \Delta^{Q_2}_{b_1b_2\ldots b_k\ldots}$. Розглянемо образ $M'(x';y')$ точки M під дією відображення φ:

$$x' = q_0^2 + q_0^3q_1x = \Delta^{Q_2}_{0100\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k}}, \qquad y' = q_0 + q_0q_1y = \Delta^{Q_2}_{10b_1b_2\ldots b_k\ldots}.$$

Очевидно, що $r(x') = y'$, а отже, $M' \in \Gamma_{0100}$. Твердження 1 доведено.

2. Нехай $M(x;y) \in \Gamma_{0100}$, тобто $x = \Delta^{Q_2}_{0100\alpha_5\alpha_6\ldots\alpha_{2k}\ldots}$, $y = r(x) = \Delta^{Q_2}_{10b_3b_4\ldots b_k\ldots}$. Образ $M'(x';y')$ точки M під дією відображення φ має координати

$$x' = \delta_{01}(I[\omega^2(x)]) = \Delta^{Q_2}_{0111[1-\alpha_5][1-\alpha_6]\ldots}, \qquad y' = y = r(x) = \Delta^{Q_2}_{10b_3b_4\ldots b_k\ldots}.$$

Оскільки рівність $(\alpha_5, \alpha_6) = (0, 0)$ рівносильна $(1-\alpha_5, 1-\alpha_6) = (1, 1)$, то $r(x') = y'$. Тому $\varphi(\Gamma_{0100}) = \Gamma_{0111}$. Друга частина твердження випливає з інволютивності відображення φ. Твердження 2 доведено.

3. Нехай $M(x;y) \in \Gamma_{0101}$, тобто $x = \Delta^{Q_2}_{0101\alpha_5\alpha_6\ldots\alpha_{2k}\ldots}$, $y = r(x) = \Delta^{Q_2}_{11b_3b_4\ldots b_k\ldots}$. Розглянемо точку $\varphi(M) = M'(x';y')$:

$$\begin{cases} x' = \Delta^{Q_2}_{0110[1-\alpha_5][1-\alpha_6]\ldots}, \\ y' = \Delta^{Q_2}_{10[1-b_3][1-b_4]\ldots}. \end{cases}$$

Якщо $(\alpha_5, \alpha_6) = (0;1)$, то $x' = \Delta^{Q_2}_{011010[1-\alpha_7][1-\alpha_8]\ldots}$ і $b_3 = 1$, $y' = \Delta^{Q_2}_{100[1-b_4][1-b_5]\ldots}$. Звідси $r(x') = y'$ і $M'(x';y') \in \Gamma_{0110}$.

Якщо $(\alpha_5, \alpha_6) \neq (0;1)$, то $(1-\alpha_5, 1-\alpha_6) \neq (1;0)$, $b_3 = 0$ і $y' = \Delta^{Q_2}_{101[1-b_4][1-b_5]\ldots}$. Тому $\varphi(\Gamma_{0101}) = \Gamma_{0110}$. Перетворення φ є інволютивним, тому твердження 3 доведено.

Наслідок 13. *Для будь-якого* $x \in [0;1]$ *виконується рівність*

$$r\big(q_0^2 + q_0^3q_1x\big) = q_0 + q_0q_1r(x).$$

Наслідок 14. *Має місце рівність*

$$\int\limits_{\Delta^{Q_2}_{0100}} r(x)\,dx = q_0^4q_1 + q_0^4q_1^2\int\limits_0^1 r(x)\,dx,$$

зокрема при $q_0 = \dfrac{1}{2}$ *маємо*

$$\int_{\Delta^2_{0100}} r(x)\,dx = \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\int_0^1 r(x)\,dx.$$

Справді,

$$\int\limits_{\Delta^{Q_2}_{0100}} r(x')\,dx' = \int\limits_0^1 q_0 + q_0q_1r(x)d\big(q_0^2 + q_0^3q_1x\big) =$$

$$= q_0^4q_1 \int\limits_0^1 \big[1 + q_1r(x)\big]\,dx = q_0^4q_1 + q_0^4q_1^2 \int\limits_0^1 r(x)\,dx.$$

Наслідок 15. *Для будь-якого* $x \in \Delta^{Q_2}_{0100} \cup \Delta^{Q_2}_{0111}$ *виконується рівність*

$$r\big(q_0^2 + q_0q_1I[\omega^2(x)]\big) = r(x),$$

рівносильна рівності $r\big(\Delta^{Q_2}_{01ii\alpha_5\alpha_6}\ldots\big) = r\big(\Delta^{Q_2}_{01[1-i][1-i][1-\alpha_5][1-\alpha_6]\ldots}\big)$.

Наслідок 16. *Справджується рівність*

$$\int\limits_{\Delta^{Q_2}_{0111}} r(x)\,dx = q_0q_1 \int\limits_{\Delta^{Q_2}_{0100}} r\big(q_0^2 + q_0q_1I[\omega^2(x)]\big)dI[\omega^2(x)].$$

Наслідок 17. *Якщо* $q_0 = \dfrac{1}{2}$, *то*

$$\int\limits_{\Delta^2_{0111}} r(x)\,dx = \int\limits_{\Delta^2_{0100}} r(x)\,dx = \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\int\limits_0^1 r(x)\,dx.$$

Наслідок 18. *Для будь-якого* $x \in \Delta^{Q_2}_{0101} \cup \Delta^{Q_2}_{0110}$ *виконується рівність*

$$\delta_1\big(I[\omega(r(x))]\big) = r\big(\delta_{01}(I[\omega^2(x)])\big) \Leftrightarrow r\big(q_0^2 + q_0q_1I[\omega^2(x)]\big) = q_0 + q_1I[\omega(r(x))].$$

Наслідок 19. *Якщо* $q_0 = \dfrac{1}{2}$, *то* $\displaystyle\int_{\Delta^{Q_2}_{0101}\cup\Delta^2_{0110}} r(x)\,dx = \frac{3}{32}$.

Справді, оскільки Γ_{0101} і Γ_{0110} симетричні відносно точки $C\left(\dfrac{3}{8};\dfrac{3}{4}\right)$, то

$$\int\limits_{\Delta^2_{0101}\cup\Delta^2_{0110}} r(x)\,dx = \int\limits_{\Delta^2_{0110}} r(x)\,dx + \int\limits_{\Delta^2_{0101}} r(x)\,dx = \left(\frac{3}{64} + S\right) + \left(\frac{3}{64} - S\right) = \frac{3}{32},$$

де $S = \dfrac{1}{16} = \displaystyle\int_{\Delta^2_{0101}} r(x)\,dx$.

Наслідок 20. *Якщо* $q_0 = \dfrac{1}{2}$, *то* $\displaystyle\int_0^1 r(x)\,dx = \frac{3}{5}$.

Справді, враховуючи попередні твердження

$$\int\limits_0^1 r(x)\,dx = \left[\int\limits_{\Delta^{Q_2}_{00}} r(x)\,dx + \int\limits_{\Delta^{Q_2}_{01}} r(x)\,dx\right] + 2\int\limits_{\Delta^{Q_2}_{01}} r(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4} + 2\left[2 \int\limits_{\Delta^{Q_2}_{0100}} r(x)\,dx + \left(\int\limits_{\Delta^{Q_2}_{0101}} r(x)\,dx + \int\limits_{\Delta^{Q_2}_{0110}} r(x)\,dx \right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4} + 2\left[2\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{64}\int\limits_0^1 r(x)\,dx\right) + \frac{3}{32}\right] = \frac{9}{16} + \int\limits_0^1 r(x)\,dx.$$

Звідси отримуємо $\int_0^1 r(x)\,dx = \frac{3}{5}$.

7. Узагальнення конструкції. Якщо зафіксувати елемент $e \in A = \{0;1\}$, пару $(i,j) \in \in A^2 \equiv A \times A$ та замінити умови в означенні функції $r\big(x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k}\ldots}\big) = \Delta^{Q_2}_{r_1r_2\ldots r_k\ldots}$ на

$$r_1 = \begin{cases} e, & \text{якщо} \quad (\alpha_1,\alpha_2) = (i,j), \\ 1-e, & \text{якщо} \quad (\alpha_1,\alpha_2) \neq (i,j), \end{cases}$$

$$r_{k+1} = \begin{cases} r_k, & \text{якщо} \quad (\alpha_{2k+1},\alpha_{2k+2}) = (\alpha_{2k-1},\alpha_{2k}), \\ 1-r_k, & \text{якщо} \quad (\alpha_{2k+1},\alpha_{2k+2}) \neq (\alpha_{2k-1},\alpha_{2k}), \end{cases}$$

то отримаємо узагальнення f функції r зі збереженням властивостей неперервності, ніде не монотонності, варіаційних та диференціальних властивостей, причому частково зміняться "симетрії" графіка та інтегральні властивості.

Лема 10. *Означення функції f є коректним, а саме: значення функції не залежить від зображення Q_2-бінарної точки, тобто*

$$f\Big(\Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_m0(1)}\Big) = f\Big(\Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_m1(0)}\Big). \tag{8}$$

Доведення. Нехай $x_0 = \Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_m1(0)} = \Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_m0(1)}$.

Випадки 1) $m = 2k$ та 2) $m = 2k-1$ розглянемо окремо.

1. Нехай $m = 2k$ і $r\big(\Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_{2k}1(0)}\big) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_kb(1-b)}$.

Якщо $(a_{2k-1},a_k) = (1,0)$, то $(a_{2k-1},a_{2k}) \neq (0,1)$, а отже,

$$f\Big(\Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_{2k}0(1)}\Big) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k[1-b_k](b_k)}.$$

Якщо $(a_{2k-1},a_k) \neq (1,0)$, то $(a_{2k-1},a_{2k}) = (0,1)$, і маємо

$$f\Big(\Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_{2k}0(1)}\Big) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_kb_k(1-b_k)}.$$

Якщо $(1,0) \neq (a_{2k-1},a_k) \neq (1,0)$, то

$$f\Big(\Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_{2k}0(1)}\Big) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_k[1-b_k](b_k)}.$$

Тому $f\Big(\Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_{2k}0(1)}\Big) = f\Big(\Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_{2k}1(0)}\Big)$.

2. Нехай $m = 2k-1$. Тоді $f\Big(\Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_{2k-1}1(0)}\Big) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_{k-1}b_k(1-b_k)}$ і, оскільки $(a_{2k-1},0) \neq \neq (1,1)$, то $f\Big(\Delta^{Q_2}_{a_1\ldots a_{2k-1}0(1)}\Big) = \Delta^{Q_2}_{b_1\ldots b_{k-1}[1-b_k](b_k)}$. Отже, і в цьому випадку виконується рівність (8). Коректність функції f обґрунтовано.

Лему доведено.

Зауваження 5. Існує 8 способів вибору елемента e та пари $(i;j)$. Тому дана конструкція містить 8 різних функцій. Зокрема, при $e=0$ та $(i;j)=(1;1)$ маємо $f(x)=r(I(x))$, а при $e=1$ та $(i;j)=(0;0)$ — $f(x)=I(r(x))$.

Література

1. І. В. Замрій, М. В. Працьовитий, *Сингулярність інверсора цифр Q_3-зображення дробової частини дійсного числа, його фрактальні та інтегральні властивості*, Нелін. коливання, **18**, № 1, 55 – 70 (2015).
2. М. В. Працьовитий, *Ніде не монотонні сингулярні функції*, Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки, № 12, 24 – 36 (2011).
3. М. В. Працьовитий, О. В. Свинчук, *Розсіювання значень однієї фрактальної неперервної немонотонної функції канторівського типу*, Нелін. коливання, **21**, № 1, 116 – 130 (2018).
4. M. Jarnicki, P. Pflug, *Continuous nowhere differentiable function. The monsters of analysis*, Springer Monogr. Math., Springer (2015).
5. Th. Johan, *Continuous nowhere differentiable functions*, Master thesis, Lulea Univ. Technology (2003).
6. О. М. Барановський, М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін, *Ряди Остроградського – Серпінського – Пірса та їхні застосування*, Наук. думка, Київ (2013).
7. М. В. Працьовитий, *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*, Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, Київ (1998).
8. А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый, *Фрактальные множества, функции, распределения*, Наук. думка, Киев (1992).
9. В. Ф. Кравченко, В. М. Масюк, *Новый класс фрактальных функций в задачах анализа и синтеза антенн*, Кн. 3, ИПРЖР, Москва (2002).
10. M. Pratsiovytyi, N. Vasylenko, *Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation*, Int. J. Math. Anal. (N.S.), **7**, № 61-67, 3155 – 3169 (2013).
11. Н. В. Працевитый, *Случайные величины с независимыми Q_2-символами*, Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей, Ин-т математики АН УССР, Киев, 92 – 102 (1987).
12. Н. В. Працевитый, *Непрерывные канторовские проекторы*, Методы исследования алгебраических и топологических структур, Киев. гос. пед. ин-т, Киев (1989), сс. 95 – 105.
13. В. В. Коваль, *Самоафінні графіки функцій*, Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки, № 5, 292 – 299 (2004).
14. О. Б. Панасенко, *Фрактальна розмірність графіків неперервних канторівських проекторів*, Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки, № 9, 104 – 111 (2008).
15. М. В. Працьовитий, *Фрактальні властивості однієї неперервної ніде не диференційовної функції*, Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки, № 3, 351 – 362 (2002).
16. K. A. Bush, *Continuous functions without derivatives*, Amer. Math. Monthly, **59**, № 4, 222 – 225 (1951).
17. W. Wunderlich, *Eine uberall stetige und nirgends differenziebare funktion*, Elem. Math., № 7, 73 – 79 (1952).
18. М. В. Працьовитий, А. С. Чуйков, *Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах негатрійкових і ланцюгових A_2-дробів*, Зб. праць, Ін-т математики НАН України, Т. 15, № 1 (2018), сс. 147 – 161.
19. М. В. Працьовитий, О. М. Барановський, Ю. П. Маслова, *Узагальнення Трибін-функції*, Нелін. коливання, **22**, № 3, 380 – 390 (2019).
20. М. В. Працьовитий, С. П. Ратушняк, *Властивості та розподіли значень фрактальних функцій, пов'язаних з Q_2-зображенням дійсних чисел*, Теорія ймовірностей та мат. статистика, вип. 2(99), 187 – 202 (2018).
21. М. В. Працьовитий, С. П. Ратушняк, *Розподіл значень однієї фрактальної функції від випадкового аргументу*, Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки, № 16, 150 – 160 (2014).
22. М. В. Працьовитий, С. В. Скрипник, *Q_2-зображення дробової частини дійсного числа та інверсор його цифр*, Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки, № 15, 134 – 143 (2013).

Одержано 08.05.20