УДК 517.9

МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНЕ ЛОГІСТИЧНЕ РІВНЯННЯ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ І НЕФІКСОВАНИМИ МОМЕНТАМИ ІМПУЛЬСНОЇ ДІЇ

Ю. М. Мисло

Ужгород. нац. ун-т
пл. Народна, 3, Ужгород, 88000, Україна
e-mail: julia.pah@gmail.com

В. І. Ткаченко

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: vitk@imath.kiev.ua

By using properties of asymptotically almost periodic solutions, we obtain conditions for the existence of a positive asymptotically stable piecewise continuous almost periodic solution of the logistic equation with almost periodic coefficients and nonfixed times of pulse action.

З використанням властивостей асимптотично майже періодичних розв'язків отримано умови існування додатнозначного асимптотично стійкого кусково-неперервного майже періодичного розв'язку логістичного рівняння з майже періодичними коефіцієнтами та нефіксованими моментами імпульсної дії.

1. Вступ. Розглянемо майже періодичне логістичне рівняння із запізненням та імпульсною дією

$$\dot{x}(t) = x(t)\left(a(t) - b(t)x(t) - c(t)x(t-h)\right), \quad t \neq \tau_k(x(t)), \tag{1}$$

$$x(t+0) = (1+d_k)x(t) + q_k, \quad t = \tau_k(x(t)), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

де $x \in \mathbb{R},\ h > 0.$ Імпульсна дія відбувається при досягненні розв'язками ліній

$$\Gamma_k = \big\{(t,x)\colon t = \tau_k(x)\big\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

які рівномірно відділені одна від іншої.

Рівняння (1) описує еволюцію біологічного вигляду з короткостроковими зовнішніми впливами (див. [1]), які моделюються імпульсними співвідношеннями (2). Виходячи з біологічної інтерпретації, будемо розглядати розв'язки рівняння, які набувають невід'ємних значень. Метою даної роботи є знаходження умов існування додатного рівномірно відділеного від нуля кусково-неперервного майже періодичного розв'язку рівняння (1), (2). Ми використовуємо концепцію кусково-неперервних майже періодичних функцій у сенсі робіт [2, 3]. Спочатку доводиться існування додатнозначного асимптотично w-майже періодичного розв'язку рівняння (1), (2), з чого за результатами роботи [4] випливає існування додатнозначного асимптотично стійкого w-майже періодичного розв'язку. Такий підхід запропоновано в роботі [5] для систем функціонально-диференціальних рівнянь. У роботі [6] цей підхід поширено на системи рівнянь із запізненням та фіксованими моментами імпульсної дії, а в роботі [4] — на системи рівнянь із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії.

У системи рівнянь з нефіксованими моментами імпульсної дії розв'язки, які мають різні початкові значення, можуть мати також і різні точки розривів, що вимагає іншого підходу при дослідженні асимптотично майже періодичних розв'язків. Відмінність точок розриву різних розв'язків системи з нефіксованими моментами імпульсної дії враховується також і при означенні стійкості розв'язків. Ми будемо використовувати означення стійкості для розв'язків системи із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії з роботи [7].

Також у таких системах може з'являтися так званий феномен биття, тобто розв'язок може перетинати лінію імпульсів $t = \tau_k(x)$ кілька разів чи навіть нескінченну кількість разів [8, 9]. Ми будемо припускати виконання умов роботи [9], які виключають биття у деякій обмеженій області для рівняння (1), (2).

Структура даної статті така. У п. 2 наведено основні означення та деякі попередні результати. У п. 3 досліджено обмеженість і відокремленість від нуля невід'ємних розв'язків рівняння. Нарешті, в п. 4 доведено теорему про існування додатнозначного асимптотично стійкого кусково-неперервного майже періодичного розв'язку логістичного рівняння з майже періодичними коефіцієнтами та нефіксованими моментами імпульсної дії.

2. Основні означення та попередні результати. Позначимо через $\mathcal{PC}^k(J,\mathbb{R}),\ J \subset \mathbb{R}$, простір всіх кусково-неперервних функцій $x\colon J \to \mathbb{R}$ таких, що:

1) множина $T = \{t_j \in J,\ t_{j+1} > t_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$ розривів функції x не має скінченних граничних точок;

2) функції неперервні зліва $x(t_j - 0) = x(t_j)$ та існують границі $\lim_{t \to t_j + 0} x(t) = x(t_j + + 0)$;

3) функція $x(t)$ класу C^k гладка на множині $J \setminus T$.

Введемо означення з [3].

Означення 1. *Ціле число p називається ε-майже періодом послідовності $\{x_k\},\ x_k \in \mathbb{R}$, якщо $|x_{k+p} - x_k| < \varepsilon$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Послідовність $\{x_k\}$ називається майже періодичною, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина її ε-майже періодів.*

Множина $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ відносно щільна, якщо існує додатне число l таке, що кожний відрізок дійсної осі довжини l містить принаймні одне число, яке належить $\mathcal{A}$.

Означення 2. *Послідовність дійсних чисел $\{t_k\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина ε-майже періодів, спільних для всіх послідовностей $\left\{t_k^j\right\}$, де $t_k^j = t_{k+j} - t_k,\ j \in \mathbb{Z}$.*

Як показано в [10], послідовність $\{\tau_k\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць тоді і тільки тоді, коли $\tau_k = ak + c_k$, де $\{c_k\}$ — майже періодична послідовність, a — додатне число.

Означення 3. *Функція $\varphi(t) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ називається w-майже періодичною, якщо:*

1) послідовність $\{t_k\}$ точок розривів функції $\varphi(t)$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць;

2) для довільного $\varepsilon > 0$ існує додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що якщо точки t' і t'' належать до одного інтервалу неперервності і $|t' - t''| < \delta$, то $|\varphi(t') - \varphi(t'')| < \varepsilon$;

3) для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина Γ ε-майже періодів таких, що якщо $\tau \in \Gamma$, то $|\varphi(t + \tau) - \varphi(t)| < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, які задовольняють умову $|t - t_k| \geq \varepsilon$, $k \in \mathbb{Z}$.

Нагадаємо, що неперервна функція $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ майже періодична за Бором, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина Γ ε-майже періодів таких, що якщо $\tau \in \Gamma$, то $|\psi(t+\tau) - \psi(t)| < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Означення 4. *Кусково-неперервна функція $\varphi_1(t) \in \mathcal{PC}(J, \mathbb{R})$ знаходиться в ε-околі функції $\varphi_2(t) \in \mathcal{PC}(J, \mathbb{R})$, якщо $|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| < \varepsilon$ для всіх $t \in J$ таких, що*

$$\left|t - \tau_i^1\right| > \varepsilon, \qquad \left|t - \tau_i^2\right| > \varepsilon \qquad і \qquad \left|\tau_i^1 - \tau_i^2\right| < \varepsilon, \quad i \in \mathbb{Z},$$

де $\left\{\tau_i^1\right\}$ і $\left\{\tau_i^2\right\}$ — послідовності розривів функцій $\varphi_1(t)$ і $\varphi_2(t)$ відповідно.

Послідовність $\{f_k(t)\}$ функцій $f_k \in \mathcal{PC}(J, \mathbb{R}),\ J \subset \mathbb{R}$, збігається в w-топології до функції $f \in \mathcal{PC}(J, \mathbb{R})$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $N = N(\varepsilon)$ таке, що $|f_k(t) - f(t)| < \varepsilon$ для всіх $k \geq N,\ |t - \tau_i| > \varepsilon$ (τ_i — точки розривів функції f на множині J) і точки розривів функцій $f_k(t)$, які лежать у J, збігаються до точок τ_i рівномірно відносно i.

В роботі [11] доведено, що функція $\varphi \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ w-майже періодична тоді і тільки тоді, коли з довільної послідовності дійсних чисел $\{\theta_n\},\ \theta_n > \theta_{n-1},\ \lim_{n\to\infty} \theta_n = \infty$, можна виділити підпослідовність $\{\theta_{n_k}\}$ таку, що послідовність $\varphi(t + \theta_{n_k})$ збігається на осі у w-топології.

Аналогічно до неперервного випадку [12, с. 154], для кусково-неперервних функцій вводиться поняття асимптотично w-майже періодичних функцій [4].

Означення 5. *Кусково-неперервна функція $\xi(t)$ називається асимптотично w-майже періодичною, якщо для кожної послідовності дійсних чисел $\{\theta_k\}$ таких, що $\theta_k \to \infty$ при $k \to \infty$, існує підпослідовність $\{\theta_{k_j}\}$ така, що $\xi(t + \theta_{k_j})$ збігається на $0 \leq t < \infty$ у w-топології.*

Для обмеженої функції $g(t)$ позначимо

$$g^L = \inf_t g(t), \qquad g^M = \sup_t g(t).$$

Аналогічно, для обмеженої послідовності $\{h_k\}$ позначимо

$$h^L = \inf_k h_k, \qquad h^M = \sup_k h_k.$$

Будемо розглядати систему (1), (2) з такими умовами:

(H_1) існує відрізок дійсної осі $[0, \rho]$ з деяким додатним числом ρ такий, що послідовність $\{\tau_k\}$ неперервно диференційовних функцій $\tau_k\colon [0, \rho] \to \mathbb{R}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць рівномірно відносно $x \in [0, \rho]$ та існують додатні сталі θ і Θ такі, що

$$\begin{gathered} \inf_{x\in[0,\rho]} \tau_{k+1}(x) - \sup_{x\in[0,\rho]} \tau_k(x) \geq \theta, \\ \sup_{x\in[0,\rho]} \tau_{k+1}(x) - \inf_{x\in[0,\rho]} \tau_k(x) \leq \Theta \end{gathered} \tag{3}$$

для $k \in \mathbb{Z}$. Також функції τ_k задовольняють умову Ліпшиця

$$|\tau_k(x) - \tau_k(y)| \leq N_1|x - y|, \quad x, y \in [0, \rho], \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

з деякою додатною сталою N_1;

(H_2) функції $a(t),\ b(t)$ і $c(t)$ майже періодичні за Бором і $a^L > 0,\ b^L \geq 0,\ c^L > 0$;

(H_3) послідовності $\{d_k\}$ та $\{q_k\}$ майже періодичні та $d^L > -1,\ q^L \geq 0$.

Означення 6. *Функція $x(t) \in \mathcal{PC}([t_0 - h, t_0 + \alpha], \mathbb{R})$, де $\alpha > 0$, є розв'язком рівняння (1), (2), якщо виконуються такі умови:*

1) множина $T = \{t \in [t_0, t_0{+}\alpha],\ t = \tau_k(x(t))$ для деякого $k\}$ точок імпульсної дії скінченна (можливо порожня);

2) $x(t)$ неперервна при всіх $t \in (t_0, t_0 + \alpha] \setminus T$;

3) $x(t)$ неперервно диференційовна при всіх $t \in (t_0, t_0 + \alpha] \setminus T$ за винятком скінченної множини точок;

4) похідна зліва функції $x(t)$ існує та задовольняє систему (1) для всіх $t \in (t_0, t_0 + \alpha] \setminus T$;

5) для $t \in T$ функція $x(t)$ задовольняє умову (2).

Якщо додатково функція $x(t)$ задовольняє умову

$$x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0], \quad \varphi \in \mathcal{PC}\left([-h, 0], \mathbb{R}\right), \tag{5}$$

то вона є розв'язком початкової задачі (1), (2), (5).

Функція $x(t)$ є розв'язком рівняння (1), (2) на нескінченному інтервалі, якщо вона є розв'язком на кожному обмеженому підінтервалі.

Припускаємо, що розв'язки рівняння (1), (2) неперервні зліва.

Також припускаємо, що у множині $x \in [0, \rho]$ розв'язки рівняння (1), (2) не мають биття з лініями імпульсів $t = \tau_j(x)$; іншими словами, розв'язки перетинають кожну лінію імпульсів не більше одного разу. Для цього ми перевіримо виконання для рівняння (1), (2) умов відсутності биття з [9].

Означення 7. *Розв'язок $\xi(t)$ системи (1), (2), який при всіх $t \geq t_0 - h$ набуває значення у $[0, \rho]$, називається стійким за Ляпуновим, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ таке, що для довільного іншого розв'язку $x(t)$ з початковими значеннями з $[0, \rho]$ і*

$$|\xi(\theta) - x(\theta)| < \delta, \quad \theta \in [t_0 - h, t_0], \quad \left|\theta - \tau_j^0\right| > \delta,$$

виконується $|\xi(t) - x(t)| < \varepsilon$ для всіх $t \geq t_0$ таких, що $\left|t - \tau_j^0\right| > \varepsilon$, де τ_j^0 — моменти часу, при яких розв'язок $\xi(t)$ перетинає лінії $t = \tau_j(x),\ j \in \mathbb{Z}$.

Розв'язок $\xi(t)$ рівномірно стійкий за Ляпуновим, якщо δ не залежить від початкових моментів t_0, які задовольняють нерівності $\left|t_0 - \tau_j^0\right| > \delta,\ j \in \mathbb{Z}$.

Розв'язок $\xi(t)$ називається асимптотично стійким, якщо він стійкий та існує $\delta_0 > 0$ таке, що для $t_0 \in \mathbb{R}$ і кожного $\varepsilon > 0$ існує $T = T(t_0, \varepsilon) > 0$ таке, що для будь-якого іншого розв'язку $x(t)$ системи з початковими значеннями з $[0, \rho]$ і

$$|\xi(\theta) - x(\theta)| < \delta_0, \quad \theta \in [t_0 - h, t_0], \quad \left|\theta - \tau_j^0\right| > \delta_0,$$

виконується $|\xi(t) - x(t)| < \varepsilon$ для $t \geq t_0 + T$ і $\left|t - \tau_j^0\right| > \varepsilon$.

Розв'язок $\xi(t)$ рівномірно асимптотично стійкий, якщо наведені вище нерівності виконуються для всіх $t_0 \in \mathbb{R},\ \left|t_0 - \tau_j^0\right| > \delta_0,\ j \in \mathbb{Z}$, з незалежними від t_0 моментами часу T.

Далі нам буде потрібний такий допоміжний результат [7, 13].

Розглянемо логістичне рівняння без запізнення та з імпульсною дією у фіксовані моменти

$$\dot{z} = z(a - bz), \quad t \neq t_k, \tag{6}$$

$$z(t_k+0) - z(t_k) = dz(t_k)) + q, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

де $z \geq 0,\ a$ і b — додатні сталі, $d > -1,\ q \geq 0,$ строго зростаюча послідовність $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ задовольняє умову $t_{k+1} - t_k \geq \theta > 0,\ k \in \mathbb{Z}$.

Лема 1. *Усі розв'язки $z(t),\ z(0) = z_0 > 0$ рівняння (6), (7) задовольняють оцінки*

$$0 < z(t) \leq \max\{A, A(1+d) + q\}, \quad A = \frac{a}{b\,(1 - e^{-a\theta})}$$

для $t \geq 2\theta$.

3. Обмеженість та відокремленість від нуля додатних розв'язків. Виходячи з біологічної інтерпретації, будемо розглядати невід'ємні розв'язки рівняння (1), (2). Тому початкові умови розв'язків задаються так:

$$x(\theta) = \psi(\theta), \quad 0 \leq \psi(\theta) \leq \rho, \quad \theta \in [-h, 0], \quad \psi(0) > 0. \tag{8}$$

Теорема 1. *Припустимо, що на інтервалі $x \in [0, \rho]$ рівняння (1), (2) задовольняє умови (H_1)–(H_3) і виконуються нерівності*

$$\frac{\partial \tau_k(x)}{\partial x}\, x\big(a^M - b^L x - c^L y\big) < 1, \quad \tau_k((1+d_k)x + q_k) \leq \tau_k(x), \quad x, y \in [0, \rho], \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

$$\rho \geq M_0, \tag{10}$$

де

$$M_0 = \frac{a_1 e^{a^M h}(1+d^M)^{2+h/\theta}}{(1 - e^{-a_1\theta})c^L} + q^M \tag{11}$$

при $d^M \geq 0$ і

$$M_0 = \max\left\{\frac{a_2 e^{a^M h}}{(1 - e^{-a_2\theta})c^L}; \frac{a_2 e^{a^M h}(1+d^M)}{(1 - e^{-a_2\theta})c^L} + q^M\right\} \tag{12}$$

при $d^M < 0$. Тут використано позначення

$$a_1 = a^M + \frac{q^M c^L}{e^{a^M\theta}(1+d^M) - 1},$$

$$a_2 = a^M + \frac{q^M c^L}{e^{a^M\theta} - 1}.$$

Тоді на інтервалі $x \in [0, \rho]$:

– кожний розв'язок перетинає кожну криву $t = \tau_k(x)$ не більше одного разу;

– кожний розв'язок з додатними початковими значеннями (8) задовольняє нерівність

$$x(t) \leq M_0, \quad t \geq 2\theta. \tag{13}$$

Доведення. 1. Розв'язок $x(t)$ рівняння (1) з початковою функцією (8) задовольняє рівність

$$x(t,\psi) = \psi(0) e^{\int_0^t (a(s) - b(s)x(s) - c(s)x(s-h))ds}.$$

Враховуючи останню рівність і додатність імпульсної дії, отримуємо додатність розв'язку імпульсного рівняння (1), (2) з початковою функцією $\psi(\theta)$.

2. Якщо виконуються нерівності (9), то з теореми 3.3 роботи [9] випливає, що в області $x \in [0, \rho]$ кожний розв'язок перетинає криву $t = \tau_k(x)$ не більше одного разу.

3. Покажемо, що в області $x \in [0, \rho]$ розв'язки рівняння (1), (2) фінально рівномірно обмежені та задовольняють нерівність (13).

Розглянемо довільний розв'язок $x(t)$ рівняння (1), (2) з початковою функцією (8). Позначимо через $\tilde{\tau}_j$ точки перетину $x(t)$ з кривими $\tau_j(x)$. Додатний розв'язок рівняння (1) задовольняє нерівність $\dot{x}(t) \le a^M x(t)$. Використовуючи формулу варіації сталої для імпульсного рівняння [3, c. 12], отримуємо

$$x(t) \le X_1(t, t-h+0)x(t-h) + \sum_{t-h \le \tilde{\tau}_j < t} X_1(t, \tau_j + 0) q_j,$$

де

$$X_1(t,s) = e^{a^M(t-s)} \prod_{s \le \tilde{\tau}_j < t} (1 + d_j)$$

— фундаментальний розв'язок лінійного імпульсного рівняння

$$\dot{x} = a^M x, \quad x(\tilde{\tau}_j + 0) = (1 + d_j) x(\tilde{\tau}_j), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Припустимо, що $d^M > 0$. Поки розв'язок $x(t)$ належить інтервалу $[0, \rho]$, виконуються нерівності (3) і

$$X_1(t,s) \le e^{a^M(t-s)} \left(1 + d^M\right)^{[(t-s)/\theta]+1},$$

де $[z]$ — ціла частина числа z. Тому

$$\begin{aligned} x(t) &\le e^{a^M h} \prod_{t-h \le \tilde{\tau}_j < t} (1 + d_j) x(t-h) + \\ &+ \sum_{t-h \le \tilde{\tau}_j < t} e^{a^M(t - \tilde{\tau}_j)} q_j \prod_{\tilde{\tau}_j < \tilde{\tau}_i < t} (1 + d_i) \le \\ &\le e^{a^M h} \left(1 + d^M\right)^{[h/\theta]+1} x(t-h) + q^M \sum_{j=0}^{[h/\theta]} e^{j a^M \theta} (1 + d^M)^j \le \\ &\le e^{a^M h} \left(1 + d^M\right)^{[h/\theta]+1} \left(x(t-h) + \frac{q^M}{e^{a^M\theta}(1 + d^M) - 1} \right). \end{aligned}$$

З останньої нерівності одержуємо

$$x(t-h) \ge e^{-a^M h} \left(1 + d^M\right)^{-[h/\theta]-1} x(t) - \frac{q^M}{e^{a^M\theta}\left(1 + d^M\right) - 1}. \tag{14}$$

Підставляючи (14) у рівняння (1), маємо

$$\dot{x}(t) \leq x(t)\left(a^M + \frac{q^M}{e^{a^M\theta}\left(1+d^M\right)-1} - e^{-a^M h}\left(1+d^M\right)^{-[h/\theta]-1} x(t)\right).$$

Отже, додатній розв'язок $x(t)$ рівняння (1), (2) оцінюється зверху відповідним розв'язком рівняння без запізнення

$$\dot{y}(t) = y(t)\left(a^M + \frac{q^M}{e^{a^M\theta}\left(1+d^M\right)-1} - e^{-a^M h}\left(1+d^M\right)^{-[h/\theta]-1} y(t)\right),$$

$$y(\tilde{\tau}_k+0) = (1+d_k)y(\tilde{\tau}_k) + q_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Застосовуючи до останнього лему 1, отримуємо оцінку $x(t) \leq M_0,\ t \geq 2\theta$ при $q^M \geq 0$, де M_0 задовольняє (11).

Якщо $d^M < 0$, то $X(t,s) \leq e^{a^M(t-s)}$ і

$$x(t) \leq e^{a^M h} x(t-h) + \sum_{t-h\leq\tilde{\tau}_j<t} e^{a^M(t-\tilde{\tau}_j)} q_j.$$

Повторюючи оцінки для $d^M \geq 0$, одержуємо оцінку $x(t) \leq M_0,\ t \geq 2\theta$ при $d^M < 0$, де M_0 задовольняє (12).

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай виконується одна з нерівностей*

$$a^L + \theta \ln\left(1+d^L\right) > 0 \tag{15}$$

або

$$q^L = \inf_j q_j > 0. \tag{16}$$

Тоді існує $m_0 > 0$ таке, що для кожного розв'язку рівняння (1), (2) з невід'ємними початковими функціями (8) існує $\bar{t} = \bar{t}(\psi)$ таке, що $x(t) \geq m_0,\ t \geq \bar{t}$.

Доведення. Нехай виконується нерівність (15). Оскільки $x(t) \leq M_0$ при $t \geq 2\theta$, то з рівняння (1) отримуємо

$$\dot{x} \geq x\left(a^L - b^M M_0 - c^M M_0\right).$$

Тоді з урахуванням нерівностей (3) розв'язок рівняння (1), (2) оцінюється так:

$$x(t) \geq x(t_0) \prod_{t_0\leq\tilde{\tau}_k<t} (1+d_k) e^{(a^L-b^M M_0-c^M M_0)(t-t_0)},$$

де, як і раніше, $\tilde{\tau}_k$ — точки перетину розв'язку $x(t)$ з лініями імпульсів $\tau_k(x)$. Тому

$$x(t-h) \leq x(t) \prod_{t-h\leq\tilde{\tau}_k<t} (1+d_k)^{-1} e^{-(a^L-b^M M_0-c^M M_0)h} \leq x(t)\tilde{c}, \tag{17}$$

де

$$\tilde{c} = \left(1+d^L\right)^{-[h/\Theta]} e^{-(a^L-b^M M_0-c^M M_0)h},$$

якщо $d^L > 0,$ і
$$\tilde{c} = e^{-(a^L - b^M M_0 - c^M M_0)h},$$
якщо $d^L \leq 0.$ Підставивши нерівність (17) в (1), отримаємо
$$\dot{x}(t) \geq x(t)\big(a^L - b^M x(t) - c^M \tilde{c} x(t)\big).$$

Враховуючи невід'ємність q_k, розв'язок $x(t)$ оцінюється знизу розв'язком логістичного рівняння з імпульсами
$$\frac{du}{dt} = u\left(a^L - b^M u - c^M \tilde{c} u\right), \qquad u(\tilde{\tau}_k + 0) - u(\tilde{\tau}_k) = d_k u(\tilde{\tau}_k). \tag{18}$$

Зробивши у рівнянні (18) заміну змінних $u = 1/z$, отримаємо
$$\frac{dz}{dt} = -a^L z + b^M + c^M \tilde{c}, \quad z(\tilde{\tau}_k + 0) = (1 + d_k)^{-1} z(\tilde{\tau}_k). \tag{19}$$
Фундаментальний розв'язок відповідного однорідного рівняння набуває вигляду
$$X_2(t,s) = \prod_{s \leq \tilde{\tau}_j < t} \frac{1}{1 + d_j} e^{-a^L(t-s)} =$$
$$= \exp\left\{-a^L(t-s) - \sum_{s \leq \tau_j < t} \ln(1 + d_j)\right\}.$$

При виконанні (15) для $X_2(t,s)$ виконується оцінка
$$|X_2(t,s)| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-s)}, \quad t \geq s,$$
з деякими додатними сталими K_1 і α_1, а рівняння (19) має єдиний асимптотично стійкий обмежений на осі розв'язок
$$z_0(t) = \int_{-\infty}^{t} X_2(t,s)\big(b^M + c^M \tilde{c}\big) ds \leq \frac{K_1\big(b^M + c^M \tilde{c}\big)}{\alpha_1}.$$
Кожний інший розв'язок рівняння з додатними початковими значеннями задовольняє оцінку $u(t) \leq 2K_1\left(b_1^M + c^M \tilde{c}\right)/\alpha_1$, починаючи з деякого моменту часу, який залежить від розв'язку. Відповідно кожний розв'язок рівняння (18) оцінюється знизу сталою $\alpha_1/\left(2K_1\left(b_1^M + c^M \tilde{c}\right)\right)$, починаючи з деякого моменту часу.

Нехай тепер виконується нерівність (16). Скористаємося підходом з роботи [14]. Оскільки розв'язки рівняння невід'ємні, а значення розв'язку при $t = \tilde{\tau}_k + 0$ не менші q^L, то при $a^L < c^M M_0$ на відрізку $t \in (\tilde{\tau}_k, \tilde{\tau}_{k+1}],\ k \geq 1,$ розв'язок оцінюється знизу величиною
$$z(t) \geq \frac{\left(c^M M_0 - a^L\right) q^L}{q^L b^M \left(e^{(c^M M_0 - a^L)(t - \tilde{\tau}_k)} - 1\right) + \left(c^M M_0 - a^L\right) e^{(c^M M_0 - a^L)(t - \tilde{\tau}_k)}}.$$

При $a^L = c^M M_0$ отримуємо
$$z(t) \geq \frac{q^L}{1 + q^L b^M (t - \tilde{\tau}_k)}, \quad t \in (\tilde{\tau}_k, \tilde{\tau}_{k+1}].$$
Аналогічно доводимо при $a^L > c^M M_0$.

Теорему 2 доведено.

Зауваження 1 [14]**.** Якщо $d_j = 0,\ j \in \mathbb{Z}$, і $a^L > c^M M_0$, то лінійне рівняння (19) має додатний асимптотично стійкий сталий розв'язок $z_* = b^M / \left(a^L - c^M M_0\right)$. Кожен інший розв'язок рівняння з додатними початковими значеннями задовольняє оцінку $z(t) < 2b^M / \left(a^L - c^M M_0\right)$, починаючи з деякого моменту часу, який залежить від розв'язку. Тому розв'язок $x(t)$ з невід'ємною не рівною тотожно нулю початковою функцією задовольняє оцінку

$$u(t) \geq \frac{a^L - c^M M_0}{2b^M},$$

починаючи з деякого моменту часу t_1.

4. Існування майже періодичних розв'язків. Для знаходження умов існування w-майже періодичних розв'язків рівняння (1), (2) скористаємося такими твердженнями з роботи [4] про асимптотично майже періодичні розв'язки рівнянь із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії.

Теорема 3 [4]**.** *Припустимо, що рівняння (1), (2) має розв'язок $\xi(t)$, означений на $I = [0, \infty)$ такий, що $|\xi(t)| \leq \rho < \infty$ для всіх $t \geq 0$. Якщо розв'язок $\xi(t)$ асимптотично w-майже періодичний, то рівняння (1), (2) має w-майже періодичний розв'язок $p(t)$.*

Теорема 4 [4]**.** *Припустимо, що $\tilde{K}_1 N_1 + N_1 < 1$, де*

$$\tilde{K}_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}, x, y \in [0, \rho]} |x\left(a(t) - b(t)x - c(t)y\right)|, \tag{20}$$

а N_1 — стала Ліпшиця для ліній імпульсів (4). Нехай розв'язок $\xi(t)$ рівняння (1), (2) при всіх $t \in [0, \infty)$ належить відрізку $[0, \rho]$ і є рівномірно асимптотично стійким при $t \geq 0$. Тоді $\xi(t)$ асимптотично w-майже періодичний, а рівняння (1), (2) має w-майже періодичний розв'язок, який є асимптотично стійким при $t \geq 0$.

Тепер сформулюємо основний результат даної роботи.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови теорем 1 і 2 та*

$$\alpha_2 + K_2 c^M M_0 e^{-\alpha_2 h} < 0, \tag{21}$$

де

$$\alpha_2 = \left(a^M - \left(2b^L + c^L\right) m_0 + \frac{1}{\theta} \ln\left(1 + d^M\right)\right), \quad K_2 = 1 + d^M, \quad \textit{якщо} \quad d^M \geq 0,$$

$$\alpha_2 = \left(a^M - \left(2b^L + c^L\right) m_0 + \frac{1}{\Theta} \ln\left(1 + d^M\right)\right), \quad K_2 = \left(1 + d^M\right)^{-1}, \quad \textit{якщо} \quad d^M < 0.$$

Тоді рівняння (1), (2) при достатньо малому коефіцієнті Ліпшиця N_1 має в області $x \in [0, \rho]$ єдиний додатний асимптотично стійкий w-майже періодичний розв'язок.

Доведення. З доведення теорем 1 і 2 випливає, що якщо початкова функція φ розв'язку $x_0(t)$ рівняння (1), (2) задовольняє умову $m_0 \leq \varphi(\theta) \leq M_0,\ \theta \in [t_0 - h, t_0]$, то розв'язок залишається в цій області при всіх $t \geq t_0$. Доведемо, що розв'язок $x_0(t)$ рівномірно асимптотично стійкий. Перевіримо виконання умов означення 7. Нехай δ_0 — деяке мале додатне число. Розглянемо інший розв'язок $y_0(t)$ з початковою функцією $\psi,\ m_0 \leq \psi(\theta) \leq M_0$, $\theta \in [t_0 - h, t_0]$, яка задовольняє оцінки

$$|\varphi(\theta) - \psi(\theta)| \leq \delta_0, \quad \theta \in [t_0 - h, t_0], \qquad \left|\theta - \tau_j^1\right| \geq \delta_0,$$

де τ_j^1 — точки перетину розв'язку $x_0(t)$ з кривими $\tau_j(x)$.

Різниця розв'язків $x_0(t)-y_0(t)$ задовольняє рівняння

$$\dot{x}(t)-\dot{y}(t)=\Big(a(t)-b(t)\left(x_0(t)+y_0(t)\right)-c(t)y_0(t-h)\Big)(x(t)-y(t))-$$

$$-c(t)x_0(t)(x(t-h)-y(t-h))$$

та імпульсні умови

$$x\left(\tau_j^1+0\right)-y\left(\tau_j^1+0\right)=(1+d_j)\left(x\big(\tau_j^1\big)-y\big(\tau_j^1\big)\right)+d_jy\big(\tau_j^1\big)+q_j,$$

$$x\big(\tau_j^2+0\big)-y\big(\tau_j^2+0\big)=\big(x\big(\tau_j^2\big)-y\big(\tau_j^2\big)\big)-d_jy\big(\tau_j^2\big)-q_j.$$

Тут τ_j^2 — точки перетину розв'язку $y(t)$ з лініями $\tau_j(x),\ j\in\mathbb{Z}$.

Позначимо

$$U(t,s)=\exp\int\limits_s^t\big(a(s_1)-b(s_1)\big(x_0(s_1)+y_0(s_1)\big)-$$

$$-c(s_1)y_0(s_1-h)\big)ds_1\prod_{s\le\tau_j'<t}(1+d_j)$$

і запишемо відповідне інтегральне рівняння

$$w(t)=U(t,t_0)w_0+\int\limits_{t_0}^t U(t,s)c(s)x_0(s)w(s-h)ds+$$

$$+\sum_{t_0\le\tau_j^1<t}U\big(t,\tau_j^1+0\big)\left(d_jy\big(\tau_j^1\big)+q_j\right)-$$

$$-\sum_{t_0\le\tau_j^2<t}U\left(t,\tau_j^2+0\right)\left(d_jy\big(\tau_j^2\big)+q_j\right). \tag{22}$$

Функція $U(t,s)$ задовольняє оцінку

$$|U(t,s)|\le K_2e^{\alpha_2(t-s)},\quad t\ge s. \tag{23}$$

Позначимо

$$w(t)=x(t)-y(t),\qquad \tau_j'=\min\big\{\tau_j^1,\tau_j^2\big\},\qquad \tau_j''=\max\big\{\tau_j^1,\tau_j^2\big\}.$$

Спочатку оцінимо $\left|\tau_j^1-\tau_j^2\right|$ за допомогою різниці $\left|x(\tau_j')-y(\tau_j')\right|$. Нехай $\tau_j^2\ge\tau_j^1=\tau_j'$. Тоді

$$\left|\tau_j^1-\tau_j^2\right|\le N_1\left|y(\tau_j'')-x(\tau_j')\right|\le N_1\left|y(\tau_j'')-y(\tau_j')\right|+N_1\left|y(\tau_j')-x(\tau_j')\right|\le$$

$$\le N_1\left|y(\tau_j')-x(\tau_j')\right|+N_1\int\limits_{\tau_j'}^{\tau_j''}|y(s)(a(s)-b(s)y(s)-c(s)y(s-h))|\,ds\le$$

$$\leq N_1 \left| y(\tau_j') - x(\tau_j') \right| + N_1 \tilde{K}_1 \left| \tau_j^1 - \tau_j^2 \right|,$$

де $\tilde{K}_1$ визначається формулою (20). Випадок $\tau_j^2 \leq \tau_j^1$ розглядається аналогічно. Тоді

$$\left| \tau_j^1 - \tau_j^2 \right| \leq \frac{N_1}{1 - N_1 \tilde{K}_1} \left| x(\tau_j') - y(\tau_j') \right|. \tag{24}$$

Припустимо, що $\tau_j^1 > \tau_j^2$, і розглянемо різницю

$$\left| U\big(t, \tau_j^1 + 0\big) \left(d_j y\big(\tau_j^1\big) + q_j \right) - U\left(t, \tau_j^2 + 0\right) \left(d_j y\big(\tau_j^2\big) + q_j \right) \right| =$$

$$= \Big| U\big(t, \tau_j^1 + 0\big) \Big(d_j y\big(\tau_j^1\big) - d_j y\big(\tau_j^2 + 0\big) +$$

$$+ (1 + d_j) \left(1 - U\big(\tau_j^1, \tau_j^2\big)\right) \left(d_j y\big(\tau_j^2\big) + q_j \right) \Big) \Big|. \tag{25}$$

Оскільки $\left| \tau_j^1 - \tau_j^2 \right| \leq N_1 M_0$, то існує незалежна від $j \in \mathbb{Z}$ додатна стала $\tilde{K}_2$ така, що

$$\left| U\big(\tau_j^1, \tau_j^2\big) - 1 \right| \leq \tilde{K}_2 \left| \tau_j^1 - \tau_j^2 \right|.$$

Також

$$\left| y\big(\tau_j^1\big) - y\big(\tau_j^2 + 0\big) \right| = \left| \int\limits_{\tau_j^2}^{\tau_j^1} \frac{dy(\xi)}{d\xi} \, d\xi \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\tau_j^2}^{\tau_j^1} y(s) \left(a(s) - b(s) y(s) - c(s) y(s-h) \right) ds \right| \leq$$

$$\leq \tilde{K}_1 \left| \tau_j^1 - \tau_j^2 \right|.$$

Підставляючи останні нерівності в (25) і враховуючи (23) і (24), отримуємо

$$\left| U\big(t, \tau_j^1 + 0\big) \left(d_j y\big(\tau_j^1\big) + q_j \right) - U\left(t, \tau_j^2 + 0\right) \left(d_j y\big(\tau_j^2\big) + q_j \right) \right| =$$

$$\leq N_1 K_2 e^{\alpha_2 \left(t - \tau_j''\right)} \frac{\left(d^M \tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 (1 + d^M)(d^M M_0 + q^M) \right)}{1 - N_1 \tilde{K}_1} \left| x(\tau_j') - y(\tau_j') \right| =$$

$$= \tilde{K}_3 N_1 e^{\alpha_2 \left(t - \tau_j''\right)} \left| x(\tau_j') - y(\tau_j') \right|. \tag{26}$$

Якщо $\tau_j^1 < \tau_j^2$, то

$$U\big(t, \tau_j^1 + 0\big) \left(d_j y\big(\tau_j^1\big) + q_j \right) - U\left(t, \tau_j^2 + 0\right) \left(d_j y\big(\tau_j^2\big) + q_j \right) =$$

$$= U\left(t, \tau_j^2 + 0\right) \left(d_j y\big(\tau_j^1\big) - d_j y\big(\tau_j^2\big) + \left(U\left(\tau_j^2, \tau_j^1 + 0\right) - 1 \right) \left(d_j y\big(\tau_j^1\big) + q_j \right) \right).$$

Повторюючи наведені вище оцінки, одержуємо нерівність (26) при $\tau_j^1 < \tau_j^2$.

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $t_0 \in \left(\tau_0^1 + \delta_0, \tau_1^1\right]$. З (22), (23) і (26) випливає нерівність для $|w(t)| = |x(t) - y(t)|$ при $t \in \left(\tau_m'', \tau_{m+1}'\right]$:

$$|w(t)| \le K_2 e^{\alpha_2(t-t_0)}|\varphi(t_0) - \psi(t_0)| +$$

$$+ \int\limits_{t_0-h}^{t_0} K_2 e^{\alpha_2(t-s-h)} c^M M_0 |\varphi(s) - \psi(s)| ds +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-1} \int\limits_{\tau_j''}^{\tau_{j+1}'} K_2 e^{\alpha_2(t-s-h)} c^M M_0 |w(s)| ds +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-1} \int\limits_{\tau_{j+1}'}^{\tau_{j+1}''} K_2 e^{\alpha_2(t-s-h)} c^M M_0 |w(s)| ds +$$

$$+ \int\limits_{\tau_m''}^{t} K_2 e^{\alpha_2(t-s-h)} c^M M_0 |w(s)| ds + \sum_{t_0 < \tau_j' < t} \tilde{K}_3 N_1 e^{\alpha_2\left(t-\tau_j''\right)} \left|w(\tau_j')\right|. \tag{27}$$

На інтервалі $[t_0 - h, t_0]$ не більше ніж $[h/\theta] + 1$ точок імпульсів. В δ_0-околах точок імпульсів функція $|\varphi(s) - \psi(s)|$ оцінюється зверху величиною $M_0 - m_0$, а в інших точках — величиною δ_0. Тому з умови (3) отримуємо

$$\int\limits_{t_0-h}^{t_0} |\varphi(s) - \psi(s)| ds \le 2\delta_0 \left([h/\theta] + 1\right)\left(M_0 - m_0\right) + \left(h - 2\delta_0\left([h/\theta] + 1\right)\right)\delta_0 = M_1 \delta_0.$$

Позначимо $\alpha_3 = -\alpha_2(M_0 - m_0)/(1 - N_1 \tilde{K}_1)$. Тоді

$$e^{\alpha_2\left(\tau_j' - \tau_j''\right)} \le \exp\left(-\alpha_2 \frac{N_1\left|x\left(\tau_j'\right) - y\left(\tau_j'\right)\right|}{1 - N_1 \tilde{K}_1}\right) \le e^{N_1 \alpha_3}.$$

Враховуючи останні оцінки, в нерівності (27) зробимо перетворення

$$|w(t)| \le \delta_0 \tilde{K}_4 e^{\alpha_2(t-t_0)} + \int\limits_{t_0}^{t} K_2 e^{\alpha_2(t-s)} M_0 e^{-\alpha_2 h} |w(s)| ds + \sum_{t_0 < \tau_j' < t} N_1 \tilde{K}_5 e^{\alpha_2(t-\tau_j')} \left|w(\tau_j')\right|,$$

де

$$\tilde{K}_4 = K_2\left(1 + e^{-\alpha_2 h} c^M M_0 M_1 h\right),$$

$$\tilde{K}_5 = \left(\tilde{K}_3 + \frac{K_2 c^M M_0^2}{1 - N_1 \tilde{K}_1}\right) e^{-\alpha_2 h + N_1 \alpha_3}.$$

Застосувавши до останньої нерівності узагальнену лему Гронуолла, одержимо

$$|x(t) - y(t)| \le e^{\left(\alpha_2 + K_2 c^M M_0 e^{-\alpha_2 h}\right)(t-t_0)} \tilde{K}_4 \delta_0 \prod_{t_0 < \tau_j' < t} (1 + N_1 \tilde{K}_5).$$

При виконанні нерівності (21) і при досить малому N_1 різниця $|x(t) - y(t)|$ експоненціально прямує до нуля при $t \to \infty$ і $t \notin \left(\tau_j', \tau_j''\right]$, $j \in \mathbb{Z}$. Виконуються умови рівномірної асимптотичної стійкості розв'язку $x_0(t)$. За теоремою 4 рівняння (1), (2) має w-майже періодичний розв'язок зі значеннями в інтервалі $[m_0, M_0]$.

Теорему 5 доведено.

Література

1. *Kuang Y.* Delay differential equations with applications in population dynamics. – Boston: Acad. Press, 1993. – XII + 398 p.
2. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 310 с.
3. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci. Publ., 1995. – X+462 p.
4. *Myslo Yu. M., Tkachenko V. I.* Asymptotically almost periodic solutions of equations with delays and nonfixed times of pulse action // J. Math. Sci. (N.Y.). – 2018. – **228**, № 3. – P. 290 – 305.
5. *Yoshizawa T.* Asymptotically almost periodic solutions of an almost periodic system // Funkcial. Ekvac. – 1969. – **12**. – P. 23 – 40.
6. *Myslo Yu. M., Tkachenko V. I.* Global attractivity in almost periodic single species models // Funct. Differ. Equ. – 2011. – **18**, № 3-4. – P. 269 – 278.
7. *Dvornyk A. V., Tkachenko V. I.* Almost periodic solutions for systems with delay and nonfixed times of impulsive actions // Ukr. Math. J. – 2017. – **68**, № 11. – P. 1673 – 1693.
8. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A., Trofimchuk S. I.* Generalized solutions of impulse systems and the phenomenon of pulsations // Ukr. Math. J. – 1991. – **43**. – P. 610 – 615.
9. *Liu X., Ballinger G.* Existence and continuability of solutions for differential equations with delays and state-dependent impulses // Nonlinear Anal. – 2004. – **51**, № 4. – P. 633 – 647.
10. *Samoilenko A. M., Trofimchuk S. I.* Unbounded functions with almost periodic differences // Ukr. Math. J. – 1991. – **43**, № 10. – P. 1409 – 1413.
11. *Akhmetov M. U., Perestyuk N. A.* Periodic and almost periodic solutions of strongly nonlinear impulse systems // J. Appl. Math. Mech. – 1992. – **56**, № 6. – P. 829 – 837.
12. *Fink A. M.* Almost periodic differential equations // Lect. Notes Math. – 1974. – **377**. – 336 p.
13. *Akhmet M. U., Beklioglu M., Ergenc T., Tkachenko V. I.* An impulsive ratio-dependent predator-prey system with diffusion // Nonlinear Anal. Real World Appl. – 2005. – **7**. – P. 1255 – 1267.
14. *Dvornyk A. V., Struk O. O., Tkachenko V. I.* Almost periodic solutions of Lotka – Volterra systems with diffusion and pulsed action // Ukr. Math. J. – 2018. – **70**, № 2. – P. 197 – 216.

Одержано 15.08.19