УДК 517.9

АВТОНОМНА НЕТЕРОВА КРАЙОВА ЗАДАЧА У ВИПАДКУ ПАРАМЕТРИЧНОГО РЕЗОНАНСУ*

С. М. Чуйко

Донбас. держ. пед. ун-т
вул. Генерала Батюка, 19, Слов'янськ, 84116, Україна
e-mail: chujko-slav@ukr.net

О. В. Нєсмєлова

Ін-т прикл. математики і механіки НАН України
вул. Добровольського, 1, Слов'янськ, 84109, Україна
e-mail: star-o@ukr.net

О. С. Чуйко

Донбас. держ. пед. ун-т
вул. Генерала Батюка, 19, Слов'янськ, 84116, Україна
e-mail: chujko-slav@ukr.net

We establish constructive conditions for the solvability of the nonlinear autonomous boundary-value problem in the case of parametric resonance and give a scheme for the construction of solutions of this problem. We propose a convergent iterative algorithm for finding approximate solutions of the nonlinear autonomous Noetherian boundary-value problem for a system of ordinary differential equations in the case of parametric resonance. As an example of application of the constructed iterative algorithm, we determine approximate solutions of the periodic boundary-value problem for the autonomous Duffing-type equation with parametric perturbation.

Одержано конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків нелінійної автономної крайової задачі у випадку параметричного резонансу. Побудовано збіжну ітераційну схему для знаходження наближень до розв'язків нелінійної автономної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу. Як приклад застосування побудованої ітераційної схеми отримано наближення до розв'язків періодичної крайової задачі для автономного рівняння типу Дюффінга з параметричним збуренням.

1. Постановка задачі. Досліджено задачу про знаходження розв'язків [1 – 3]

$$z(t,\varepsilon)\colon\, z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b(\varepsilon)], \quad z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \quad b(\varepsilon), h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

автономної системи звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу [4 – 6]

$$\frac{dz}{dt} = Az + f + \varepsilon\, Z(z, h(\varepsilon), \varepsilon), \tag{1}$$

які задовольняють крайову умову

$$\ell z(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon\, J(z(\cdot,\varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon), \quad \alpha \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

* Робота виконана за фінансової підтримки Міністерства освіти і науки України, р/н 0118U003390.

Розв'язки нетерової $(m \neq n)$ крайової задачі (1), (2) будемо шукати в малому околі розв'язку

$$z_0(t) \in \mathbb{C}^1[a, b_0], \quad b_0 = b(0), \quad h_0 = b(0) \in \mathbb{R}^q$$

породжуючої задачі

$$\frac{dz_0}{dt} = Az_0 + f, \quad f \in \mathbb{R}^n, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha. \tag{3}$$

Тут A — стала $(n \times n)$-вимірна матриця, $Z(z, h(\varepsilon), \varepsilon)$ — нелінійна вектор-функція, неперервно диференційовна за невідомими $z(t, \varepsilon)$ і $h(\varepsilon)$ в малому околі розв'язку породжуючої задачі та неперервно диференційовна за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$; $\ell z(\cdot, \varepsilon)$ — лінійний та $J(z(\cdot, h(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon)$ — нелінійний векторний функціонали $\ell z(\cdot, \varepsilon)$, $J(z(\cdot, h(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon) \colon \mathbb{C}[a, b(\varepsilon)] \to \mathbb{R}^m$, причому другий функціонал неперервно диференційовний за невідомою $z(t, \varepsilon)$ і $h(\varepsilon)$ у малому околі розв'язку породжуючої задачі та за малим параметром ε у малому околі розв'язку породжуючої задачі на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. Поставлена задача узагальнює традиційні періодичні крайові задачі у випадку параметричного резонансу [4, 5] на випадок нетерової крайової задачі та продовжує дослідження автономної нетерової крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у випадку параметричного резонансу [6].

2. Рівняння для породжуючих констант крайової задачі (1), (2). У критичному випадку $(P_{Q^*} \neq 0)$ за умови

$$P_{Q_d^*}\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\} = 0 \tag{4}$$

породжуюча задача (3) має сім'ю розв'язків [1]

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f; \alpha](t), \qquad X_r(t) = X(t)P_{Q_r}, \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

де $Q := \ell X(\cdot)$ — $(m \times n)$-вимірна матриця,

$$\operatorname{rank} Q = n_1, \quad n - n_1 = r,$$

P_{Q^*} — $(m \times m)$-вимірна матриця-ортопроектор

$$P_{Q^*} \colon \mathbb{R}^m \to N\big(Q^*\big),$$

$X(t)$ — нормальна $(X(a) = I_n)$ фундаментальна матриця однорідної частини диференціальної системи (3); P_{Q_r} — $(n \times r)$-вимірна матриця, що складається з r лінійно незалежних стовпців $(n \times n)$-вимірної матриці-ортопроектора $P_Q \colon \mathbb{R}^n \to N(Q)$;

$$G[f; \alpha](t) = X(t)Q^+\big\{\alpha - \ell K[f](\cdot)\big\} + K[f](t)$$

— узагальнений оператор Гріна задачі (3), Q^+ — псевдообернена матриця за Муром – Пенроузом [1],

$$K[f](t) = X(t)\int_a^t X^{-1}(s) f ds$$

— оператор Гріна задачі Коші для диференціальної системи (3), I_n — одинична $(n \times n)$-вимірна матриця; матриця $P_{Q_d^*}$ складається з d лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{Q_d^*}$. У критичному випадку задача (1), (2) суттєво відрізняється від аналогічних неавтономних крайових задач; на відміну від останніх, правий кінець $b(\varepsilon)$ проміжку $[a, b(\varepsilon)]$, на якому визначений розв'язок задачі (1), (2), невідомий і підлягає знаходженню в процесі побудови розв'язку. Здійснюючи в задачі (1), (2) заміну незалежної змінної [3]

$$t = a + (\tau - a)(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon)), \quad b(\varepsilon) = b^* + \varepsilon\big(b^* - a\big)\beta(\varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad \beta(0) = \beta^*,$$

приходимо до задачі про відшукання розв'язків

$$z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b_0], \quad z(\tau, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad \beta(\varepsilon), h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dz(\tau, \varepsilon)}{d\tau} = Az(\tau, \varepsilon) + f + \varepsilon\, Z(z(\tau, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon) + \varepsilon\beta(\varepsilon)\big[Az(\tau, \varepsilon) + \varepsilon\, Z(z(\tau, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon)\big],$$

які задовольняють крайову умову

$$\ell z(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon\, J(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon) + \varepsilon\beta(\varepsilon)\big[\alpha + \varepsilon\, J(z(\cdot, \varepsilon), h(\varepsilon), \varepsilon)\big].$$

Далі, здійснюючи заміну невідомої

$$z(\tau, \varepsilon) = z_0(\tau, c_r) + x(\tau, \varepsilon), \quad h(\varepsilon) = h_0 + \mu(\varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) = \beta_0 + \eta(\varepsilon),$$

приходимо до задачі про відшукання розв'язків

$$x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b_0], \quad x(\tau, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad \mu(\varepsilon), \eta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(\tau, \varepsilon)}{d\tau} = Ax(\tau, \varepsilon) + \varepsilon\, Y\big(z_0(\tau, c_r) + x(\tau, \varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), \beta_0 + \eta(\varepsilon), \varepsilon\big), \tag{5}$$

які задовольняють крайову умову

$$\ell x(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon\, H(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), \beta_0 + \eta(\varepsilon), \varepsilon); \tag{6}$$

тут

$$Y\big(z_0(\tau, c_r) + x(\tau, \varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), \beta_0 + \eta(\varepsilon), \varepsilon\big) :=$$

$$:= (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))Z\left(z_0(\tau, c_r) + x(\tau, \varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), \varepsilon\right) + \beta(\varepsilon)\, A\left(z_0(\tau, c_r) + x(\tau, \varepsilon)\right),$$

$$H\big(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), \beta_0 + \eta(\varepsilon), \varepsilon\big) :=$$

$$:= (1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))\, J\left(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), \varepsilon\right) + \alpha\beta(\varepsilon) \colon \mathbb{C}[a, b_0] \to \mathbb{R}^m.$$

У критичному випадку $(P_{Q^*} \neq 0)$ за умови (4) крайова задача (5), (6) розв'язна за умови

$$P_{Q_d^*}\Big\{H(z_0(\cdot, c_r) + x(\cdot, \varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), \eta(\varepsilon), \varepsilon) -$$

$$- \ell K\big[Y(z_0(\tau,c_r)+x(\tau,\varepsilon),h_0+\mu(\varepsilon),\beta_0+\eta(\varepsilon),\varepsilon)\big](\cdot)\Big\} = 0.$$

Позначимо вектори

$$\check{c}_0 := \begin{bmatrix} c_r \\ \beta_0 \\ h_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r+q+1}, \qquad \check{c}_0^* := \begin{bmatrix} c_r^* \\ \beta_0^* \\ h_0^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r+q+1}, \qquad \check{c}(\varepsilon) := \begin{bmatrix} c_r(\varepsilon) \\ \mu(\varepsilon) \\ \eta(\varepsilon) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r+q+1}.$$

Внаслідок неперервності по $z,\ \beta$ і по h нелінійної функції $Y(z,\beta(\varepsilon),h(\varepsilon),t,\varepsilon)$ та нелінійного векторного функціоналу $H(z(\cdot,\varepsilon),h(\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)$ в малому околі розв'язку породжуючої задачі (3), початкового значення h_0 функції $h(\varepsilon)$ і початкового значення β_0 функції $\beta(\varepsilon)$ одержуємо рівняння

$$\mathcal{F}(\check{c}_0) := P_{Q_d^*}\Big\{\alpha\beta_0 + J(z_0(\cdot,c_r),h_0,0) - \ell K\Big[\beta_0\, A z_0(s,c_r) + Z(z_0(s,c_r),h_0,s,0)\Big](\cdot)\Big\} = 0.$$

Необхідні умови існування розв'язку автономної нетерової крайової задачі (1), (2) у випадку параметричного резонансу визначає лема, яка є узагальненням відповідного твердження [1, 3] на випадок параметричного резонансу, а також [6] на випадок автономної крайової задачі (1), (2):

Лема. *Нехай нетерова* $(m \neq n)$ *крайова задача (1), (2) являє собою критичний* $\big(P_{Q^*} \neq 0\big)$ *випадок і виконано умову розв'язності (4) породжуючої задачі (3). Припустимо також, що в малому околі породжуючого розв'язку* $z_0\big(t,c_r^*\big) \in \mathbb{C}^1\big[a,b^*\big]$ *слабконелінійна крайова задача (1), (2) має розв'язок*

$$z(t,\varepsilon)\colon\, z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b(\varepsilon)], \quad z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0], b(\varepsilon), \quad h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0];$$

при цьому в достатньо малому околі вектора h_0^* *існує власна функція* $h(\varepsilon)$. *Тоді має місце рівність*

$$\mathcal{F}\big(\check{c}_0^*\big) = 0. \tag{7}$$

Аналогічно з нетеровими слабконелінійними крайовими задачами в критичному випадку [1, 3], а також періодичними крайовими задачами [5] рівняння (7) будемо називати рівнянням для породжуючих констант задачі (1), (2) у випадку параметричного резонансу.

3. Достатня умова. Припустимо, що рівняння (7) має дійсні корені. Фіксуючи один із розв'язків $\check{c}_0^* \in \mathbb{R}^{r+q+1}$ рівняння (7), одержуємо задачу про відшукання розв'язків

$$x(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a,b_0], \quad x(\tau,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \quad \mu(\varepsilon),\eta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

задачі (5), (6) в околі породжуючого розв'язку

$$z_0\big(t,c_r^*\big) = X_r(t)c_r^* + G[f;\alpha](t), \quad c_r^* \in \mathbb{R}^r,$$

а також функцій

$$h(\varepsilon) := h_0^* + \mu(\varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) = \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \quad \mu(\varepsilon),\eta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

в околі точок h_0^* і β_0^*. У малому околі породжуючого розв'язку $z_0\big(\tau,c_r^*\big)$, а також в околі точок h_0^* і β_0^* має місце розклад

$$Y\left(z_0\big(\tau,c_r^*\big)+x(\tau,\varepsilon),h_0^*+\mu(\varepsilon),\beta_0^*+\eta(\varepsilon),\varepsilon\right) = Y\left(z_0\big(\tau,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*,0\right) +$$

$$+\,\mathcal{A}_1\left(z_0\big(\tau,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*\right)x(\tau,\varepsilon)+\mathcal{A}_2\left(z_0\big(\tau,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*\right)\mu(\varepsilon)+$$
$$+\,\mathcal{A}_3\left(z_0\big(\tau,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*\right)\eta(\varepsilon)+\mathcal{A}_0\left(z_0\big(\tau,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*\right)\varepsilon+\mathcal{R}\left(z(\tau,\varepsilon),h(\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon\right),$$

де

$$\mathcal{A}_0\big(z_0\big(\tau,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*\big):=\frac{\partial Y(z,h,\beta,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Bigg|_{\substack{z=z_0(\tau,c_r^*),\\ h=h_0^*\\ \beta=\beta_0^*}},$$

$$\mathcal{A}_1\big(z_0\big(\tau,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*\big):=\frac{\partial Y(z,h,\beta,\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z=z_0(\tau,c_r^*),\\ h=h_0^*\\ \beta=\beta_0^*}},$$

$$\mathcal{A}_2\big(z_0\big(\tau,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*\big):=\frac{\partial Y(z,h,\beta,\varepsilon)}{\partial h}\Bigg|_{\substack{z=z_0(\tau,c_r^*),\\ h=h_0^*\\ \beta=\beta_0^*}},$$

$$\mathcal{A}_3\big(z_0\big(\tau,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*\big):=\frac{\partial Y(z,h,\beta,\varepsilon)}{\partial \beta}\Bigg|_{\substack{z=z_0(\tau,c_r^*).\\ h=h_0^*\\ \beta=\beta_0^*}}$$

Залишок

$$\mathcal{R}\big(z_0\big(\tau,c_r^*\big)+x(\tau,\varepsilon),h_0^*+\mu(\varepsilon),\beta_0^*+\eta(\varepsilon),\varepsilon\big)$$

розкладу функції

$$Y\big(z_0\big(\tau,c_r^*\big)+x(\tau,\varepsilon),h_0^*+\mu(\varepsilon),\beta_0^*+\eta(\varepsilon),\varepsilon\big)$$

в околі породжуючого розв’язку $z_0\big(\tau,c_r^*\big)$, а також в околі точок h_0^* і β_0^* більш високого порядку малості по $x(\tau,\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$ і $\eta(\varepsilon)$, ніж перші п’ять членів розкладу, тому

$$\mathcal{R}(z(\tau,\varepsilon),h(\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)\Bigg|_{\substack{z=z_0(\tau,c_r^*)\\ h=h_0^*\\ \beta=\beta_0^*\\ \varepsilon=0}}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{R}(z(\tau,\varepsilon),h(\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Bigg|_{\substack{z=z_0(\tau,c_r^*)\\ h=h_0^*\\ \beta=\beta_0^*\\ \varepsilon=0}}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{R}(z(\tau,\varepsilon),h(\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial h}\Bigg|_{\substack{z=z_0(\tau,c_r^*)\\ h=h_0^*\\ \beta=\beta_0^*\\ \varepsilon=0}}\equiv 0,$$

$$\left.\frac{\partial\mathcal{R}(z(\tau,\varepsilon),h(\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\beta}\right|_{\substack{z=z_0(\tau,c_r^*)\\ h=h_0^*\\ \beta=\beta_0^*\\ \varepsilon=0}} \equiv 0,$$

$$\left.\frac{\partial\mathcal{R}(z(\tau,\varepsilon),h(\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\substack{z=z_0(\tau,c_r^*)\\ h=h_0^*\\ \beta=\beta_0^*\\ \varepsilon=0}} \equiv 0.$$

Аналогічно, в малому околі породжуючого розв'язку $z_0\big(\tau,c_r^*\big)$, а також в околі точок h_0^* і β_0^* має місце розклад

$$\begin{aligned} &H\left(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)+x(\cdot,\varepsilon),h_0^*+\mu(\varepsilon),\beta_0^*+\eta(\varepsilon),\varepsilon\right) = \\ &\quad= H\left(z_0\big(\cdot,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*,0\right)+\ell_1x(\cdot,\varepsilon)+\ell_2\left(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\right)\mu(\varepsilon)+\ell_3\left(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\right)\eta(\varepsilon)+ \\ &\qquad+\varepsilon\,\ell_0\left(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\right)+H_1\left(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)+x(\cdot,\varepsilon),h_0^*+\mu(\varepsilon),\beta_0^*+\eta(\varepsilon),\varepsilon\right), \end{aligned}$$

де

$$\ell_0\left(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\right) := \left.\frac{\partial H(z(\cdot,\varepsilon),h,\beta,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\substack{z=z_0(\tau,c_r^*),\\ h=h_0^*\\ \beta=\beta_0^*}}$$

$$\ell_1x(\cdot,\varepsilon) := \left.\frac{\partial H(z(\cdot,\varepsilon),h,\beta,\varepsilon)}{\partial z}\right|_{\substack{z=z_0(\tau,c_r^*),\\ h=h_0^*\\ \beta=\beta_0^*}}$$

$$\ell_2\left(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\right) := \left.\frac{\partial H(z(\cdot,\varepsilon),h,\beta,\varepsilon)}{\partial h}\right|_{\substack{z=z_0(\tau,c_r^*),\\ h=h_0^*\\ \beta=\beta_0^*}}$$

$$\ell_3\left(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\right) := \left.\frac{\partial H(z(\cdot,\varepsilon),h,\beta,\varepsilon)}{\partial\beta}\right|_{\substack{z=z_0(\tau,c_r^*).\\ h=h_0^*\\ \beta=\beta_0^*}}$$

Залишок

$$H_1\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)+x(\cdot,\varepsilon),h_0^*+\mu(\varepsilon),\beta_0^*+\eta(\varepsilon),\varepsilon\big)$$

розкладу функціоналу

$$H\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)+x(\cdot,\varepsilon),h_0^*+\mu(\varepsilon),\beta_0^*+\eta(\varepsilon),\varepsilon\big)$$

в околі породжуючого розв'язку $z_0\big(\tau,c_r^*\big)$, а також в околі точок h_0^* і β_0^* більш високого порядку малості по $x(\tau,\varepsilon),\ \mu(\varepsilon)$ і $\eta(\varepsilon)$, ніж перші п'ять членів розкладу, тому

$$H_1(z(\cdot,\varepsilon),h(\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)\Big|_{\substack{z=z_0(\tau,c_r^*)\\ h=h_0^*\\ \beta=\beta_0^*\\ \varepsilon=0}} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial H_1(z(\cdot,\varepsilon),h(\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial z}\Big|_{\substack{z=z_0(\tau,c_r^*)\\ h=h_0^*\\ \beta=\beta_0^*\\ \varepsilon=0}} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial H_1(z(\cdot,\varepsilon),h(\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial h}\Big|_{\substack{z=z_0(\tau,c_r^*)\\ h=h_0^*\\ \beta=\beta_0^*\\ \varepsilon=0}} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial H_1(z(\cdot,\varepsilon),h(\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \beta}\Big|_{\substack{z=z_0(\tau,c_r^*)\\ h=h_0^*\\ \beta=\beta_0^*\\ \varepsilon=0}} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial H_1(z(\cdot,\varepsilon),h(\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\substack{z=z_0(\tau,c_r^*)\\ h=h_0^*\\ \beta=\beta_0^*\\ \varepsilon=0}} \equiv 0.$$

Позначимо $(d\times(r+q+1))$-вимірну матрицю

$$\begin{aligned} C_0\big(\check c_0^*\big) := P_{Q_d^*}\Big\{&\ell_1 X_r(\cdot) - \ell K\big[\mathcal{A}_1\left(z_0\big(\tau,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*\right)X_r(\tau)\big](\cdot);\\ &\ell_3\left(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\right) - \ell K\big[\mathcal{A}_3\left(z_0\big(\tau,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*\right)\big](\cdot);\\ &\ell_2\left(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\right) - \ell K\big[\mathcal{A}_2\left(z_0\big(\tau,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*\right)\big](\cdot)\Big\}. \end{aligned}$$

Для знаходження функцій $c_r(\varepsilon),\ \mu(\varepsilon)$ та $\eta(\varepsilon)$ одержуємо рівняння

$$\begin{aligned} C_0\big(\check c_0^*\big)\check c(\varepsilon) = -P_{Q_d^*}\Big\{&\ell_1 x^{(1)}(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\,\ell_0\left(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\right) + \\ &+ H_1\left(z_0\big(\cdot,c_r^*\big) + x(\cdot,\varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \beta_0^* + \eta(\varepsilon),\varepsilon\right) - \\ &- \ell K\big[\mathcal{A}_1\left(z_0\big(\tau,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*\right)x^{(1)}(\varepsilon,\varepsilon) + \\ &+ \varepsilon\mathcal{A}_0\left(z_0\big(\tau,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*\right) + \mathcal{R}(z(\tau,\varepsilon),h(\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)\big](\cdot)\Big\}. \end{aligned}$$

Таким чином, за умови

$$P_{C_0^*(\check{c}_0^*)} P_{Q_d^*} = 0$$

задача (1), (2) має принаймні один розв'язок і власну функцію, які визначає операторна система

$$\begin{aligned}
z(\tau, \varepsilon) &= z_0\big(\tau, c_r^*\big) + x(\tau, \varepsilon), \quad \beta(\varepsilon) = \beta_0^* + \eta(\varepsilon),\\
x(\tau, \varepsilon) &= X_r(\tau) c_r(\varepsilon) + x^{(1)}(\tau, \varepsilon), \quad h(\varepsilon) = h_0^* + \mu(\varepsilon),\\
x^{(1)}(\tau, \varepsilon) &= \varepsilon G\Big[Y\left(z_0\big(s, c_r^*\big) + x(s, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \varepsilon\right);\\
&\qquad H\big(z_0\big(\cdot, c_r^*\big) + x(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \varepsilon\big)\Big](\tau),\\
\check{c}(\varepsilon) &= -C_0^+(\check{c}_0) P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x^{(1)}(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon\, \ell_0\left(z_0\big(\cdot, c_r^*\big)\right) +\\
&\qquad + H_1\big(z_0\big(\cdot, c_r^*\big) + x(\cdot, \varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \varepsilon\big) -\\
&\qquad - \ell K\Big[\mathcal{A}_1\left(z_0\big(\tau, c_r^*\big), h_0^*, \beta_0^*\right) x^{(1)}(\varepsilon, \varepsilon) +\\
&\qquad + \varepsilon\, \mathcal{A}_0\big(z_0\big(\tau, c_r^*\big), h_0^*, \beta_0^*\big) + \mathcal{R}(z(\tau, \varepsilon), h(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Тут $P_{C_0^*(\check{c}_0^*)}$ — $(d \times d)$-вимірна матриця-ортопроектор

$$P_{C_0^*(\check{c}_0^*)} \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{N}\big(C_0^*(\check{c}_0)\big),$$

$C_0^+(\check{c}_0^*)$ — псевдообернена за Муром – Пенроузом матриця [1]. Для побудови наближеного розв'язку операторної системи (8) у випадку $P_{C_0^*} P_{Q_d^*} = 0$ можна використати метод простих ітерацій [1, 6].

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема. *Нехай для крайової задачі (1), (2) має місце критичний випадок $P_{Q^*} \neq 0$ і виконано умову розв'язності (4) породжуючої задачі (3). Тоді для кожного кореня $\check{c}_0 \in \mathbb{R}^{r+q+1}$ рівняння для породжуючих констант (7) за умови*

$$P_{C_0^*(\check{c}_0^*)} P_{Q_d^*} = 0$$

в малому околі розв'язку $z_0\big(t, c_r^*\big)$, а також в околі точок h_0^* і β_0^* крайова задача (1), (2) має принаймні один розв'язок

$$z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[a, b(\varepsilon)], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad h(\varepsilon), \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

який визначається операторною системою (8). Для побудови розв'язку операторної системи (8) для $\varepsilon \in \big[0, \varepsilon^*\big]$ можна використати ітераційну схему

$$z_{k+1}(\tau, \varepsilon) = z_0\big(\tau, c_r^*\big) + x_{k+1}(\tau, \varepsilon), \quad \beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta_0^* + \eta_{k+1}(\varepsilon),$$

$$x_{k+1}(\tau, \varepsilon) = X_r(\tau) c_{r_{k+1}}(\varepsilon) + x_{k+1}^{(1)}(\tau, \varepsilon), \quad h_{k+1}(\varepsilon) = h_0^* + \mu_{k+1}(\varepsilon),$$

$$x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon G\Big[Y\left(z_0\big(s,c_r^*\big)+x_k(s,\varepsilon),h_0^*+\mu_k(\varepsilon),\beta_0^*+\eta_k(\varepsilon),\varepsilon\right);$$

$$H\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)+x_k(\cdot,\varepsilon),h_0^*+\mu_k(\varepsilon),\beta_0^*+\eta_k(\varepsilon),\varepsilon\big)\Big](\tau),$$

$$\check c_{k+1}(\varepsilon)=-C_0^+\big(\check c_0^*\big)P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 x_{k+1}^{(1)}(\cdot,\varepsilon)+\varepsilon\,\ell_0\left(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\right)+$$

$$+H_1\big(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)+x_k(\cdot,\varepsilon),h_0^*+\mu_k(\varepsilon),\beta_0^*+\eta_k(\varepsilon),\varepsilon\big)-$$

$$-\ell K\Big[\mathcal{A}_1\left(z_0\big(\tau,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*\right)x_{k+1}^{(1)}(\varepsilon,\varepsilon)+\varepsilon\,\mathcal{A}_0\left(z_0\big(\tau,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*\right)+$$

$$+\mathcal{R}(z_k(\tau,\varepsilon),h_k(\varepsilon),\beta_k(\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\},\quad k=0,1,2,\ldots.$$

Довжину відрізка $\big[0,\varepsilon^*\big]$, на якому можна використати метод простих ітерацій, можна оцінити як із умови стискання оператора, який визначається системою (8) аналогічно [7, 8], так і за допомогою мажоруючих рівнянь Ляпунова [1, 9].

Приклад. Умови доведеної теореми виконуються у випадку автономної періодичної задачі для рівняння типу Дюффінга з параметричним збуренням

$$y''+y=\varepsilon y^3+\varepsilon h(\varepsilon)\big(y'+y'^3\big). \tag{9}$$

Відмітимо, що на відміну від статті [6] рівняння типу Дюффінга (9) з параметричним збуренням є автономним. Рівняння (9) зводиться до вигляду (1) при

$$z(t,\varepsilon)=\begin{bmatrix} z^{(a)}(t,\varepsilon)\\ z^{(b)}(t,\varepsilon)\end{bmatrix},\qquad A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},$$

$$Z(z(t,\varepsilon),h(\varepsilon),t,\varepsilon)=\begin{bmatrix}0\\ h(\varepsilon)z^{(b)}(t,\varepsilon)+h(\varepsilon)\big(z^{(b)}(t,\varepsilon)\big)^3+\big(z^{(a)}(t,\varepsilon)\big)^3\end{bmatrix}.$$

Породжуюча періодична задача для рівняння типу Дюффінга (9) з параметричним збуренням розв'язна і, за відповідної фіксації початку відліку незалежної змінної, має загальний розв'язок [2]

$$z_0(t,c_r)=X_r(t)\,c_r,\quad X_r(t)=\begin{bmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{bmatrix},\quad c_r\in\mathbb{R}^1.$$

Рівняння для породжуючих констант (7) у випадку періодичної задачі для рівняння типу Дюффінга (9) з параметричним збуренням

$$\begin{cases}\pi c_r\left(3\,c_r^2-8\beta_0\right)=0,\\ \pi c_r h_0\left(3\,c_r^2+4\right)=0\end{cases}$$

має корінь

$$c_r^*=\frac{1}{10},\quad \beta_0^*=\frac{3}{800},\quad h_0^*=0,$$

якому відповідає матриця повного рангу

$$C_0\big(\check c_0^*\big)=\frac{\pi}{4000}\begin{bmatrix}0&-800&0\\403&0&403\end{bmatrix}.$$

Таким чином, відповідно до доведеної теореми автономна періодична задача для рівняння типу Дюффінга (9) з параметричним збуренням розв'язна. Перше наближення до розв'язку періодичної задачі для рівняння (9)

$$y_1(\tau,\varepsilon) = c_{r_1}(\varepsilon)\cos\tau + y_1^{(1)}(\tau,\varepsilon), \quad h_1(\varepsilon) = h_0^* + \mu_1(\varepsilon)$$

визначають функції

$$y_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{32\,000}\,(\cos\tau - \cos 3\tau)\,,$$

а також

$$c_{r_1}(\varepsilon) \approx \frac{19\,\varepsilon}{64000} + \frac{821\,\varepsilon^2}{819\,200\,000} - \frac{9\,891\,\varepsilon^3}{2\,621\,440\,000\,000} + \frac{1\,882\,967\,\varepsilon^4}{134\,217\,728\,000\,000\,000} -$$
$$- \frac{22\,550\,643\,\varepsilon^5}{429\,496\,729\,600\,000\,000\,000} + \ldots, \quad \mu_1(\varepsilon) = 0, \quad \eta_1(\varepsilon) = 0.$$

Знайдені два наближення до періодичного розв'язку рівняння типу Дюффінга (9) з параметричним збуренням і функції $h(\varepsilon)$ характеризують нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon) = \Big\| y_k''(t,\varepsilon) + y_k(t,\varepsilon) - \varepsilon\, y_k^3(t,\varepsilon) -$$
$$- \varepsilon\, h_k(\varepsilon)\, y_k'(t,\varepsilon) - \varepsilon\, h_k(\varepsilon)\, {y'}_k^3(t,\varepsilon) \Big\|_{\mathbb{C}[0;2\pi(1+\varepsilon\beta_k(\varepsilon))]}, \quad k = 0, 1.$$

Зокрема, при $\varepsilon = 0,1$ маємо

$$\Delta_0(0,1) \approx 0{,}000\,025, \qquad \Delta_1(0,1) \approx 5{,}85\,895 \times 10^{-9}.$$

Зазначимо, що, як і у випадку нетерових крайових задач, а також критичних періодичних задач за відсутності параметричного резонансу, для автономної нетерової крайової задачі (1), (2) у випадку параметричного резонансу має місце рівність, аналогічна [1, 9]

$$C_0(\check{c}_0^*) = \mathcal{F}'_{\check{c}(\varepsilon)}\,(\check{c}(\varepsilon))\Big|_{\check{c}(\varepsilon)=\check{c}_0^*}.$$

Дійсно,

$$\mathcal{F}'_{\check{c}(\varepsilon)}(\check{c}(\varepsilon))\Big|_{\check{c}(\varepsilon)=\check{c}_0^*} = \frac{\partial}{\partial\check{c}(\varepsilon)} P_{Q_d^*}\Big\{ H(z_0(\cdot,c_r) + x(\cdot,\varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), \eta(\varepsilon), \varepsilon) -$$
$$- \ell K\left[Y(z_0(\tau,c_r) + x(\tau,\varepsilon), h_0 + \mu(\varepsilon), \beta_0 + \eta(\varepsilon), \varepsilon)\right](\cdot)\Big\}\Big|_{\check{c}(\varepsilon)=\check{c}_0^*} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial\check{c}(\varepsilon)}\, P_{Q_d^*}\Big\{ H\left(z_0(\cdot,c_r^*), h_0^*, \beta_0^*, 0\right) + \ell_1 x(\cdot,\varepsilon) +$$
$$+ \ell_2\left(z_0(\cdot,c_r^*)\right)\,\mu(\varepsilon) + \ell_3\left(z_0(\cdot,c_r^*)\right)\,\eta(\varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon\,\ell_0\left(z_0(\cdot,c_r^*)\right) + H_1\left(z(\cdot,\varepsilon), h_0^* + \mu(\varepsilon), \beta_0^* + \eta(\varepsilon), \varepsilon\right)\Big\} -$$
$$- \ell K\Big[Y\left(z_0(\tau,c_r^*), h_0^*, \beta_0^*, 0\right) + \mathcal{A}_1\left(z_0(\tau,c_r^*), h_0^*, \beta_0^*\right) x(\tau,\varepsilon) +$$

$$+\mathcal{A}_2\left(z_0\big(\tau,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*\right)\mu(\varepsilon)+\mathcal{A}_3\left(z_0\big(\tau,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*\right)\eta(\varepsilon)+$$

$$+\mathcal{A}_0\big(z_0\big(\tau,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*\big)\varepsilon+\mathcal{R}(z(\tau,\varepsilon),h(\varepsilon),\beta(\varepsilon),\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}\Big|_{\check{c}(\varepsilon)=\check{c}_0^*}=$$

$$=P_{Q_d^*}\Big\{\ell_1 X_r(\cdot)-\ell K\big[\mathcal{A}_1\left(z_0\big(\tau,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*\right)X_r(\tau)\big](\cdot);$$

$$\ell_3\left(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\right)-\ell K\big[\mathcal{A}_3\left(z_0\big(\tau,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*\right)\big](\cdot);$$

$$\ell_2\left(z_0\big(\cdot,c_r^*\big)\right)-\ell K\big[\mathcal{A}_2\left(z_0\big(\tau,c_r^*\big),h_0^*,\beta_0^*\right)\big](\cdot)\Big\}=C_0\big(\check{c}_0^*\big).$$

У випадку параметричного резонансу доведена теорема є узагальненням відповідних тверджень [10]. Використані при доведенні теореми розклади нелінійностей автономної нетерової крайової задачі (1), (2) у випадку параметричного резонансу суттєво відрізняються від відповідних розкладів [1, 9] відмінністю від нуля значення малого параметра в усіх членах розкладу.

Для знаходження розв'язку операторної системи (8) у випадку $P_{C_0^*}P_{Q_d^*}=0$ можна використати метод Ньютона [11, 12]. Зокрема, при знаходженні наближень до періодичного розв'язку рівняння типу Дюффінга (9) з параметричним збуренням і функції $h(\varepsilon)$ з використанням методу Ньютона [12] відсутня проблема появи вікових членів у наближень до періодичного розв'язку рівняння типу Дюффінга (9).

Література

1. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems: 2th ed.*, Berlin; Boston, De Gruyter (2016).
2. И. Г. Малкин, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, Гостехиздат, Москва (1956).
3. A. Boichuk, S. Chuiko, *Autonomous weakly nonlinear boundary-value problems in critical cases*, Differ. Equ., № 10, 1353 – 1358 (1992).
4. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, *О параметрическом возбуждении электрических колебаний*, Журн. техн. физики, № 3, 5 – 29 (1934).
5. В. А. Якубович, В. М. Старжинский, *Параметрический резонанс в линейных системах*, Наука, Москва (1987).
6. S. M. Chuiko, *Nonlinear Noetherian boundary-value problem in the case of parametric resonance*, J. Math. Sci. (N.Y.), **205**, № 6, 859 – 870 (2015).
7. S. M. Chuiko, *Domain of convergence of an iterative procedure for an autonomous boundary value problem*, Nonlinear Oscil., **9**, № 3, 405 – 422 (2006).
8. A. S. Chuiko, *The convergence domain of an iterative procedure for a weakly nonlinear boundary value problem*, Nonlinear Oscil., **8**, № 2, 277 – 287 (2005).
9. Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов, *Конструктивные методы анализа нелинейных систем*, Наука, Москва (1979).
10. С. М. Чуйко, П. В. Кулиш, *Линейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса*, Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины, **24**, 243 – 252 (2012).
11. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1977).
12. S. M. Chuiko, *To the generalization of the Newton – Kantorovich theorem*, Вісн. Харк. нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна. Сер. Математика, прикл. математика і механіка, **85**, № 1, 62 – 68 (2017).

Одержано 29.09.19