УДК 517.988.6

НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ ОБОРОТНОСТІ КУСКОВО-АВТОНОМНИХ РІЗНИЦЕВИХ ОПЕРАТОРІВ У ПРОСТОРІ ОБМЕЖЕНИХ ДВОСТОРОННІХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, Україна
e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com

The necessary and sufficient conditions for the invertibility of linear difference operators with piecewise constant coefficients in the space of bounded two-sided sequences are obtained.

Одержано необхідні та достатні умови оборотності лінійних різницевих операторів з кусково-постійними коефіцієнтами у просторі обмежених двосторонніх послідовностей.

1. Основні позначення та мета статті. Нехай $E_n,\ n \in \mathbb{Z},$ — банахові простори над полем $\mathbb{K}$ дійсних або комплексних чисел, $\|\cdot\|_{E_n}$ — норма в $E_n,\ 0_n$ — нульовий елемент у просторі E_n і $\mathfrak{M}$ — банаховий простір обмежених двосторонніх послідовностей $\mathbf{x} = (x_n),$ для кожної з яких $x_n \in E_n,\ n \in \mathbb{Z},$ з нормою $\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_{E_n}$ і нульовим елементом $\mathbf{0} = (0_n).$

Позначимо через $\mathfrak{M}_{n_1,n_2},$ де $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ і $n_1 < n_2,$ окремий випадок простору $\mathfrak{M},$ коли $E_n = E_{n_1-1}$ для всіх $n \leq n_1 - 1$ і $E_n = E_{n_2}$ для всіх $n \geq n_2,$ а через $l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ — банаховий простір обмежених двосторонніх послідовностей $\mathbf{x} = (x_n),$ для кожної з яких x_n є елементом банахового простору $E,\ n \in \mathbb{Z},$ з нормою $\|\mathbf{x}\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_E.$ Очевидно, що $l_\infty(\mathbb{Z}, E) = \mathfrak{M},$ якщо $E_n = E$ для всіх $n \in \mathbb{Z}.$

Нехай $L(E_k, E_l)$ — банаховий простір лінійних неперервних операторів $A\colon E_k \to E_l$ з нормою $\|A\|_{L(E_k,E_l)} = \sup_{\|x\|_{E_k}=1} \|Ax\|_{E_l}.$

Розглянемо оператори $A_n \in L(E_n, E_{n+1}),\ n \in \mathbb{Z},$ для яких

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|A_n\|_{L(E_n,E_{n+1})} < +\infty,$$

та лінійні різницеві рівняння

$$x_n = A_{n-1}x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

і

$$x_n = A_{n-1}x_{n-1} + f_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

де $x_n \in E_n$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$ і $\mathbf{f} = (f_n) \in \mathfrak{M}.$

Для теорії різницевих рівнянь важливою є задача про умови існування та єдиності розв'язків рівняння (2) для кожної послідовності $\mathbf{f} \in \mathfrak{M},$ тобто задача про умови оборотності різницевого оператора

$$(\mathfrak{A}y)_n = y_n - A_{n-1}y_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

що діє в просторі $\mathfrak{M}.$

© В. Ю. Слюсарчук, 2020

Ця задача розв'язана автором в [1] з використанням експоненціальної дихотомії розв'язків рівняння (1).

Основним об'єктом досліджень у цій статті є різницеві рівняння

$$x_n = B_{n-1}x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

$$x_n = B_{n-1}x_{n-1} + f_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

в яких

$$B_n = \begin{cases} D, & \text{якщо} \quad n < n_1, \\ A_n, & \text{якщо} \quad n_1 \le n < n_2, \\ C, & \text{якщо} \quad n \ge n_2, \end{cases} \tag{5}$$

де n_1 і n_2 — довільні цілі числа, для яких $n_1 < n_2$, $C\colon E_{n_2} \to E_{n_2}$, $D\colon E_{n_1-1} \to E_{n_1-1}$, $A_n\colon E_n \to E_{n+1}$, $n_1 \le n < n_2$, — лінійні неперервні оператори, що й у рівняннях (1) і (2), та $\mathbf{f} = (f_n) \in \mathfrak{M}_{n_1,n_2}$.

Зазначимо, що для просторів E_{n_1-1} і E_{n_1} має виконуватися співвідношення

$$DE_{n_1-1} \subset E_{n_1},$$

оскільки визначений на просторі E_{n_1} оператор A_{n_1} згідно з (3) і (5) повинен бути визначеним на множині DE_{n_1-1}.

Очевидно, що рівняння (3) і (4) є окремими випадками рівнянь (1) і (2) відповідно і B_n є кусково-сталою операторною функцією.

Метою статті є знаходження необхідних та достатніх умов оборотності оператора $\mathfrak{B}\colon \mathfrak{M}_{n_1,n_2} \to \mathfrak{M}_{n_1,n_2}$, що визначається співвідношенням

$$(\mathfrak{B}\mathbf{x})_n = x_n - B_{n-1}x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

де $\mathbf{x} = (x_n) \in \mathfrak{M}_{n_1,n_2}$, та зображення цього оператора.

Різницевий оператор $\mathfrak{B}$ з кусково-сталим коефіцієнтом B_{n-1} будемо називати *кусково-автономним* оператором.

2. Допоміжні результати. Для встановлення умов оборотності оператора $\mathfrak{B}$ нам потрібні деякі допоміжні результати про властивості оборотного оператора $\mathfrak{A}$ та коефіцієнтів рівнянь (1) і (3).

2.1. Рівносильність оборотності оператора $\mathfrak{A}$ та експоненціальної дихотомії розв'язків рівняння (1). Різницеві рівняння (1) і (2) досліджені в [1] з використанням експоненціальної дихотомії розв'язків рівняння (1).

Означення 1. *Для рівняння (1) має місце експоненціальна дихотомія на $\mathbb{Z}$ (рівняння e-дихотомічне), якщо для кожного $m \in \mathbb{Z}$ простір E_m подається у вигляді прямої суми замкнених підпросторів $E_m = E_m^+ \oplus E_m^-$ і виконуються умови:*

а) проектори P_m^+ і P_m^- на підпростори E_m^+ і E_m^- рівномірно обмежені, тобто

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} \left(\left\| P_m^+ \right\|_{L(E_m,E_m)} + \left\| P_m^- \right\|_{L(E_m,E_m)} \right) < +\infty; \tag{6}$$

б) для кожного $z \in E_m^+$ розв'язок y_n задачі

$$y_{n+1} = A_n y_n, \quad n \geq m, \quad y_m = z, \tag{7}$$

задовольняє нерівність $\|y_n\|_{E_n} \leq N_1 (q_1)^{n-m} \|z\|_{E_m}$ для всіх $n \geq m$ з деякими $N_1 > 0$ і $q_1 \in (0,1)$, не залежними від n і m;

в) для кожного $z \in E_m^-$ розв'язок y_n задачі

$$y_{n+1} = A_n y_n, \quad n < m, \quad y_m = z, \tag{8}$$

задовольняє нерівність $\|y_n\|_{E_n} \leq N_2 (q_2)^{m-n} \|z\|_{E_m}$ для всіх $n \leq m$ з деякими $N_2 > 0$ і $q_2 \in (0,1)$, не залежними від n і m.

Ми будемо досліджувати рівняння (1), (2) та окремі випадки цих рівнянь у загальному випадку, вважаючи, що жодний із просторів E_m^+ і E_m^- не є нульовим. Якщо ця вимога не виконується, то всі розв'язки рівняння (1) задовольняють співвідношення (7) (випадок $E_m^+ = E_m$) або співвідношення (8) (випадок $E_m^- = E_m$) і дослідження рівнянь суттєво спрощується.

Важливими для теорії рівняння (1) та оператора $\mathfrak{A}$ є такі теореми.

Теорема 1. *Наведені далі твердження рівносильні:*

а) рівняння (1) e-дихотомічне;

б) оператор $\mathfrak{A}$ має неперервний обернений;

в) існує операторна функція $G_{n,m}$ ($G_{n,m} \in L(E_m, E_n)$, $m, n \in \mathbb{Z}$), для якої справджуються рівності

$$G_{n,m} - A_{n-1} G_{n-1,m} = \begin{cases} I_m, & \text{якщо} \quad n = m, \\ O_n, & \text{якщо} \quad n \neq m, \end{cases} \qquad m, n \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

$$G_{m,m} = P_m^+ \quad \text{і} \quad -A_{m-1} G_{m-1,m} = P_m^-, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{10}$$

де I_m і O_n — одиничний і нульовий елементи просторів $L(E_m, E_m)$ і $L(E_n, E_n)$ відповідно, та нерівності

$$\|G_{n,m}\|_{L(E_m, E_n)} \leq N q^{|n-m|}, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

з деякими незалежними від n і m числами $q \in (0,1)$ і $N > 0$.

Імплікації а) $\Rightarrow$ б), б) $\Rightarrow$ а) і б) $\Rightarrow$ в) доведені в [1]. Імплікація в) $\Rightarrow$ б) — наслідок такого твердження.

Теорема 2 [1]**.** *Якщо існує операторна функція $G_{n,m}$, що задовольняє (9) і (11), то оператор $\mathfrak{A}$ має неперервний обернений $\mathfrak{A}^{-1}$, який подається у вигляді*

$$\left(\mathfrak{A}^{-1} \mathbf{f}\right)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G_{n,m} f_m, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

2.2. Властивості коефіцієнтів рівняння (1) у випадку оборотного оператора $\mathfrak{A}$. Використаємо означення e-дихотомічності рівняння (1), зображення $E_m = E_m^+ \oplus E_m^-$ простору E_m та проектори P_m^+ і P_m^- на підпростори E_m^+ і E_m^-.

Теорема 3. *Нехай оператор $\mathfrak{A}$ має неперервний обернений. Тоді для кожного $m \in \mathbb{Z}$:*

1) $A_m E_m^+ \subset E_{m+1}^+$;

2) $A_m E_m^- = E_{m+1}^-$ *і оператор* $P_{m+1}^- A_m P_m^- : E_m^- \to E_{m+1}^-$ *має неперервний обернений* $\left(P_{m+1}^- A_m P_m^-\right)^{-1}$.

Доведення. Спочатку обґрунтуємо правильність першого твердження теореми.

Зафіксуємо довільні $m \in \mathbb{Z}$ і $a \in E_m^+$. Покажемо, що $A_m a \in E_{m+1}^+$.

Припустимо, що $A_m a = b^+ + b^-$, де $b^+ = P_m^+ A_m a,\ b^- = P_m^- A_m a$ і $b^- \neq 0_{m+1}$.

Розглянемо величини $y_n,\ z_n,\ z_n^+$ і z_n^-, для яких

$$y_{n+1} = A_n y_n, \quad n \geq m, \quad y_m = a,$$

$$z_{n+1} = A_n z_n, \quad n \geq m+1, \quad z_{m+1} = b^+ + b^-,$$

$$z_{n+1}^+ = A_n z_n^+, \quad n \geq m+1, \quad z_{m+1}^+ = b^+,$$

і

$$z_{n+1}^- = A_n z_n^-, \quad n \geq m+1, \quad z_{m+1}^- = b^-.$$

Очевидно, що

$$y_n = z_n \quad \text{для всіх} \quad n \geq m+1 \tag{13}$$

і

$$z_n = z_n^+ + z_n^- \quad \text{для всіх} \quad n \geq m+1. \tag{14}$$

Згідно з e-дихотомічністю рівняння (1) справджуються співвідношення

$$\|y_n\|_{E_n} \leq N_1 (q_1)^{n-m} \|a\|_{E_m} \quad \text{для всіх} \quad n \geq m$$

і

$$\|z_n^+\|_{E_n} \leq N_1 (q_1)^{n-m-1} \|b^+\|_{E_{m+1}} \quad \text{для всіх} \quad n \geq m+1$$

з деякими $N_1 > 0$ і $q_1 \in (0,1)$. Тому на підставі (13) і (14)

$$\left\|z_n^-\right\|_{E_n} \leq 2N_1 (q_1)^{n-m-1} \left\|b^-\right\|_{E_{m+1}} \quad \text{для всіх} \quad n \geq m+1. \tag{15}$$

Розглянемо задачу

$$x_{n+1} = A_n x_n, \quad n \leq m, \quad x_{m+1} = b^-. \tag{16}$$

Оскільки $b^- \in E_{m+1}^- \setminus \{0_{m+1}\}$, то згідно з означенням e-дихотомічності рівняння (1) для розв'язку u_n задачі (16) виконується співвідношення

$$\|u_n\|_{E_n} \leq N_2 (q_2)^{|n-m-1|} \|b^-\|_{E_{m+1}} \quad \text{для всіх} \quad n \leq m+1 \tag{17}$$

з деякими $N_2 > 0$ і $q_2 \in (0,1)$.

Із наведених міркувань випливає, що обмежена на підставі (15) і (17) послідовність $\mathbf{v} = (v_n)$, визначена формулою

$$v_n = \begin{cases} z_n^-, & \text{якщо} \quad n \geq m+2, \\ b^-, & \text{якщо} \quad n = m+1, \\ u_n, & \text{якщо} \quad n \leq m, \end{cases}$$

є ненульовим обмеженим розв'язком рівняння (16).

Однак, e-дихотомічне рівняння (1) має лише тривіальний обмежений розв'язок. Тому припущення про виконання співвідношення $b^- \neq 0_{m+1}$ є хибним.

Отже, включення $A_m a \in E^+_{m+1}$ є правильним. Оскільки a є довільним елементом простору E^+_m, то обґрунтування першої частини твердження теореми завершене.

Тепер обґрунтуємо правильність другої частини твердження теореми.

Зафіксуємо довільні $m \in \mathbb{Z}$ і $a \in E^-_m$.

Згідно з означенням e-дихотомічності рівняння (1) задача

$$x_{n+1} = A_n x_n, \quad n < m, \quad x_m = a, \tag{18}$$

має розв'язок y_n, для якого виконується співвідношення

$$\|y_n\|_{E_n} \leq N_2(q_2)^{|n-m|}\|a\|_{E_m} \quad \text{для всіх} \quad n \leq m \tag{19}$$

з деякими $N_2 > 0$ і $q_2 \in (0, 1)$.

Покажемо, що цей розв'язок єдиний.

Припустимо, що задача (18) також має розв'язок $\hat{y}_n \not\equiv y_n$, для якого виконується співвідношення, аналогічне (19). Тоді

$$\omega_n = \begin{cases} y_n - \hat{y}_n, & \text{якщо} \quad n \leq m, \\ 0_n, & \text{якщо} \quad n > m, \end{cases}$$

буде обмеженим ненульовим розв'язком рівняння (1). Оскільки e-дихотомічне рівняння (1) має лише нульовий обмежений розв'язок, то розв'язок y_n задачі (18) єдиний.

Покажемо, що

$$y_{m-1} \in E^-_{m-1}. \tag{20}$$

Зазначимо, що згідно з (1)

$$A_{m-1} y_{m-1} = y_m.$$

Припустимо, що $y_{m-1} \notin E^-_{m-1}$. Тоді y_{m-1} можна подати у вигляді $y_{m-1} = c^- + c^+$, де $c^- \in E^-_{m-1}$ і $c^+ \in E^+_{m-1}$, причому

$$c^+ \neq 0_{m-1}. \tag{21}$$

Розглянемо задачу

$$x_{n+1} = A_n x_n, \quad n < m - 1, \quad x_{m-1} = c^-.$$

Згідно з e-дихотомічністю рівняння (1) для розв'язку v_n цієї задачі виконується співвідношення

$$\|v_n\|_{E_n} \leq N_2(q_2)^{|n-m+1|}\|c^-\|_{E_{m-1}} \quad \text{для всіх} \quad n < m - 1. \tag{22}$$

З урахуванням (19) і (22) отримуємо, що для деякого числа $M > 1$ виконується співвідношення

$$\|y_n - v_n\|_{E_n} \leq M(q_2)^{|n-m+1|}\|c^+\|_{E_{m-1}} \quad \text{для всіх} \quad n < m - 1. \tag{23}$$

Далі використаємо задачу

$$x_{n+1} = A_n x_n, \quad n \geq m-1, \quad x_{m-1} = c^+.$$

Завдяки e-дихотомічності рівняння (1) для розв'язку z_n цієї задачі виконується співвідношення

$$\|z_n\|_{E_n} \leq N_1(q_1)^{|n-m+1|}\|c^+\|_{E_{m-1}} \quad \text{для всіх} \quad n \geq m-1. \tag{24}$$

Легко перевірити, що згідно з (23) і (24) обмежена послідовність $\mathbf{g} = (g_n)$, яка визначається співвідношенням

$$g_n = \begin{cases} y_n - v_n, & \text{якщо} \quad n > m-1, \\ c^+, & \text{якщо} \quad n = m-1, \\ z_n, & \text{якщо} \quad n < m-1, \end{cases}$$

є ненульовим розв'язком рівняння (1).

Однак, e-дихотомічне рівняння (1) має лише тривіальний обмежений розв'язок. Тому виконання співвідношення (21) є хибним.

Отже, співвідношення (20) є правильним.

Із наведених міркувань випливає, що для кожного $y_m \in E_m^-$ рівняння $y_m = A_{m-1}y_{m-1}$ має єдиний розв'язок $y_{m-1} \in E_{m-1}^-$.

Покажемо, що $A_{m-1}E_{m-1}^- = E_m^-$.

Припустимо, що $A_{m-1}c \notin E_m^-$ для деякого вектора $c \in E_{m-1}^-$. Тоді вектор $A_{m-1}c$ можна подати у вигляді

$$A_{m-1}c = d^+ + d^-,$$

де $d^+ \in E_m^+$ і $d^- \in E_m^-$. Нехай c^- — вектор простору E_{m-1}^-, для якого $A_{m-1}c^- = d^-$. Згідно з попередніми міркуваннями такий вектор існує та єдиний. Розглянемо вектор $c - c^- \in E_{m-1}^-$. Для нього $A_{m-1}\big(c - c^-\big) = d^+$.

Розглянемо задачі

$$x_{n+1} = A_n x_n, \quad n \geq m, \quad x_m = d^+$$

і

$$x_{n+1} = A_n x_n, \quad n \leq m-2, \quad x_{m-1} = c - c^-,$$

розв'язки $\hat{z}_n$ і $\hat{\hat{z}}_n$ яких відповідно обмежені на підставі e-дихотомічності рівняння (1). Очевидно, що

$$\xi_n = \begin{cases} \hat{z}_n, & \text{якщо} \quad n \geq m+1, \\ d^+, & \text{якщо} \quad n = m, \\ c - c^-, & \text{якщо} \quad n = m-1, \\ \hat{\hat{z}}_n, & \text{якщо} \quad n \leq m-2, \end{cases}$$

є обмеженим розв'язком рівняння (1). Оскільки для e-дихотомічного рівняння (1) обмеженим є лише нульовий розв'язок, то $d^+ = 0_m$ і, отже, $c - c^- = 0_{m-1}$.

Звідси та з того, що для кожного $y_m \in E_m^-$ рівняння $y_m = A_{m-1}y_{m-1}$ має єдиний розв'язок $y_{m-1} \in E_{m-1}^-$, випливає рівність $A_{m-1}E_{m-1}^- = E_m^-$. Тоді на підставі теореми

Банаха про обернений оператор [2] оператор $P_m^- A_{m-1} P_{m-1}^- : E_{m-1}^- \to E_m^-$ має неперервний обернений оператор $\left(P_m^- A_{m-1} P_{m-1}^-\right)^{-1}$.

Звідси та з довільності вибору числа $m \in \mathbb{Z}$ випливає правильність другої частини твердження теореми.

Теорему 3 доведено.

Зауваження 1. У теоремі 3 включення $A_m E_m^+ \subset E_{m+1}^+$ не можна замінити рівністю $A_m E_m^+ = E_{m+1}^+$, що підтверджує такий приклад.

Приклад 1. Розглянемо скалярне рівняння $x_n = 0x_{n-1}$, що є окремим випадком рівняння (1) і є e-дихотомічним. Очевидно, що $E_m^+ = \mathbb{R}$ для всіх $m \in \mathbb{Z}$ і $0\mathbb{R} \neq \mathbb{R}$.

Зауваження 2. За теоремою 3 оператор $P_{m+1}^- A_m P_m^- : E_m^- \to E_{m+1}^-$ для кожного $m \in \in \mathbb{Z}$ має неперервний обернений $\left(P_{m+1}^- A_m P_m^-\right)^{-1}$. Тому завдяки умові в) означення e-дихотомічності рівняння (1) елементи підпростору $E_m^- \subset E_m$ мають таку властивість: для кожного $x \in E_m^-$ розв'язок задачі $x_{n+1} = A_n x_n,\ n \geq m,\ x_m = x$, задовольняє співвідношення $\|x_n\|_{E_n} \geq N_2^{-1} \left(q_2^{-1}\right)^{n-m} \|x\|_{E_m},\ n \geq m.$

Зазначимо, що завдяки теоремі 3 означення 1 e-дихотомічності рівняння (1) рівносильне такому означенню e-дихотомічності цього рівняння.

Означення 2. *Для рівняння (1) має місце експоненціальна дихотомія на $\mathbb{Z}$ (рівняння e-дихотомічне), якщо для кожного $m \in \mathbb{Z}$ простір E_m подається у вигляді прямої суми замкнених підпросторів $E_m = E_m^+ \oplus E_m^-$ і виконуються умови:*

а) проектори P_m^+ і P_m^- на підпростори E_m^+ і E_m^- рівномірно обмежені, тобто виконується співвідношення (6);

б) для кожного $z \in E_m^+$ розв'язок y_n задачі (7) для всіх $n \geq m$ задовольняє співвідношення $y_n \in E_n^+$ і $\|y_n\|_{E_n} \leq N_1 (q_1)^{n-m} \|z\|_{E_m}$ з деякими $N_1 > 0$ і $q_1 \in (0,1),$ не залежними від n і $m;$

в) для кожного $z \in E_m^-$ розв'язок y_n задачі (8) для всіх $n \leq m$ задовольняє співвідношення $y_n \in E_n^-$ і $\|y_n\|_{E_n} \leq N_2 (q_2)^{m-n} \|z\|_{E_m}$ з деякими $N_2 > 0$ і $q_2 \in (0,1),$ не залежними від n і $m.$

2.3. Зображення оператора $\mathfrak{A}^{-1}$ за допомогою розв'язків задач (7) і (8). Будемо вважати, що оператор $\mathfrak{A}$ має неперервний обернений $\mathfrak{A}^{-1}$, тобто рівняння (1) є e-дихотомічним. Згідно з теоремою 2 оператор $\mathfrak{A}^{-1}$ подаються у вигляді (12), де $G_{n,m}$ задовольняє (9), (11) і (10). З'ясуємо, як зображується $G_{n,m}$ з використанням розв'язків задач (7) і (8).

Позначимо через $y_{n,m}^+(z)$ і $y_{n,m}^-(z)$ розв'язки задач (7) і (8) відповідно. Завдяки теоремі 3

$$y_{n,m}^+(z) \in E_n^+, \quad n \geq m, \qquad \text{і} \qquad y_{n,m}^-(z) \in E_n^-, \quad n \leq m.$$

Ці розв'язки єдині на підставі e-дихотомічності рівняння (1) і задовольняють нерівності

$$\left\|y_{n,m}^+(z)\right\|_{E_n^+} \leq N_1 (q_1)^{n-m} \|z\|_{E_m^+}, \quad n \geq m, \tag{25}$$

$$\left\|y_{n,m}^-(z)\right\|_{E_n^-} \leq N_2 (q_2)^{m-n} \|z\|_{E_m^-}, \quad n \leq m, \tag{26}$$

де $N_1,\ N_2,\ q_1$ і q_2 — сталі такі, що й в умовах б) і в) означення e-дихотомічності рівняння (1). Для точок $(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ n \geq m$, і $(p,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ p \leq m$, визначимо оператори $S_{n,m}^+ : E_m^+ \to E_n^+$ і $S_{p,m}^- : E_m^- \to E_p^-$ рівностями

$$S_{n,m}^+ z = y_{n,m}^+(z), \quad z \in E_m^+, \tag{27}$$

$$S_{p,m}^{-}z = y_{p,m}^{-}(z), \quad z \in E_m^{-}. \tag{28}$$

Ці оператори є лінійними завдяки лінійності рівняння (1) і неперервними завдяки (25) та (26). Очевидно, що $S_{m,m}^{+} = P_m^{+},\ S_{m,m}^{-} = P_m^{-}$ і на підставі (25) та (26) виконуються співвідношення

$$\left\|S_{n,m}^{+}\right\|_{L\left(E_m^{+},E_n^{+}\right)} \le N_1(q_1)^{n-m}, \quad n \ge m, \tag{29}$$

$$\left\|S_{p,m}^{-}\right\|_{L\left(E_m^{-},E_p^{-}\right)} \le N_2(q_2)^{p-m}, \quad p \le m. \tag{30}$$

Розглянемо операторну функцію

$$G_{n,m} = \begin{cases} S_{n,m}^{+}, & \text{якщо} \quad n \ge m, \\ -S_{n,m}^{-}, & \text{якщо} \quad n \le m-1, \end{cases} \tag{31}$$

для якої згідно з означенням $S_{n,m}^{+}$ і $S_{n,m}^{-}$

$$G_{n,m} = A_{n-1}G_{n-1,m}, \quad \text{якщо} \quad n \ne m.$$

Також

$$G_{m,m} - A_{m-1}G_{m-1,m} = I_m.$$

Справді, завдяки (27), (28), (31) та рівності $S_{m-1,m}^{-} = \left(P_m^{-}A_{m-1}P_{m-1}^{-}\right)^{-1} S_{m,m}^{-}$, що отримується з (8) з урахуванням теореми 3,

$$\begin{aligned} G_{m,m} - A_{m-1}G_{m-1,m} &= S_{m,m}^{+} + A_{m-1}S_{m-1,m}^{-} = \\ &= P_m^{+} + A_{m-1}\left(P_m^{-}A_{m-1}P_{m-1}^{-}\right)^{-1} S_{m,m}^{-} = \\ &= P_m^{+} + S_{m,m}^{-} = P_m^{+} + P_m^{-} = I_m. \end{aligned}$$

Таким чином, операторна функція $G_{n,m}$ задовольняє (9). Також ця функція на підставі (29) і (30) задовольняє (11).

Отже, правильним є таке твердження.

Теорема 4. *Якщо оператор $\mathfrak{A}$ має неперервний обернений $\mathfrak{A}^{-1}$, то оператор $\mathfrak{A}^{-1}$ подається у вигляді (12), де $G_{n,m}$ визначається рівністю (31).*

Зауваження 3. Згідно з теоремою 2 правильним є й обернене твердження до теореми 4.

Із теорем 3 і 4 та їхніх обґрунтувань випливає таке твердження.

Наслідок 1. *Якщо оператор $\mathfrak{A}$ має неперервний обернений, то для кожного $m \in \mathbb{Z}$:*

1. $S_{n,m}^{+}E_m^{+} \subset E_n^{+},\ n \ge m;$

2. $S_{n,m}^{-}E_m^{-} = E_n^{-},\ n \le m;$

3. $S_{n,m}^{+} = \begin{cases} P_m^{+}, & \textit{якщо} \quad n = m, \\ A_{n-1}\ldots A_m P_m^{+}, & \textit{якщо} \quad n > m; \end{cases}$

4. $S_{n,m}^{-} = \begin{cases} P_m^{-}, & \textit{якщо} \quad n = m, \\ \left(P_{n+1}^{-}A_nP_n^{-}\right)^{-1}\ldots\left(P_m^{-}A_{m-1}P_{m-1}^{-}\right)^{-1}P_m^{-}, & \textit{якщо} \quad n < m. \end{cases}$

2.4. Наслідки оборотності оператора $\mathfrak{B}$. Для $k \in \mathbb{Z}$ позначимо через $\mathfrak{M}_{n_1,n_2,k}$ банаховий простір обмежених двосторонніх послідовностей $\mathbf{x} = (x_{n-k})$, для кожної з яких $x_{n-k} \in E_n$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$, з нормою $\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}_{n_1,n_2,k}} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_{n-k}\|_{E_n}$. Нагадаємо, що $E_n = E_{n_1-1}$ для всіх $n \leq n_1 - 1$ і $E_n = E_{n_2}$ для всіх $n \geq n_2$.

Для подальшого викладу нам також потрібні відображення $\mathfrak{C} \in L(l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_2}), l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_2}))$, $\mathfrak{D} \in L(l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_1-1}), l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_1-1}))$ і $Q_{\varepsilon,\tau} \in L(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ $((\varepsilon,\tau) \in (0,1] \times \mathbb{R})$, де $\mathfrak{X}$ — один із просторів $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_{n_1,n_2,k}$, $k \in \mathbb{Z}$, $l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_2})$ і $l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_1-1})$, та функція $q\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, що визначаються рівностями

$$(\mathfrak{C}\mathbf{x})_n = x_n - Cx_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$
$$(\mathfrak{D}\mathbf{y})_n = y_n - Dy_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{32}$$
$$(Q_{\varepsilon,\tau}\mathbf{z})_n = q(\varepsilon(n-\tau))z_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

і

$$q(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{якщо} \quad |t| \leq 1, \\ 0, & \text{якщо} \quad |t| > 1. \end{cases}$$

Очевидно, що

$$|q(t_1) - q(t_2)| \leq |t_1 - t_2| \quad \text{для всіх} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \tag{33}$$

Важливими є такі леми.

Лема 1. *Нехай $\mathfrak{P}$ — довільна непорожня множина лінійних неперервних операторів $\mathfrak{S}\colon \mathfrak{M}_{n_1,n_2} \to \mathfrak{M}_{n_1,n_2,k}$, де k залежить від $\mathfrak{S}$ $(k = k(\mathfrak{S}))$, кожний з яких визначається формулою*

$$(\mathfrak{S}\mathbf{x})_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} S_{n,m}x_m, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{34}$$

і

$$\sup_{\mathfrak{S}\in\mathfrak{P}} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \|S_{n,m}\|_{L(E_m,E_n)}|n-m| < +\infty. \tag{35}$$

Тоді для всіх $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{n_1,n_2}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\mathfrak{S}\in\mathfrak{P}} \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|Q_{\varepsilon,\tau}\mathfrak{S}\mathbf{x} - \mathfrak{S}Q_{\varepsilon,\tau}\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}_{n_1,n_2,k(\mathfrak{S})}} = 0. \tag{36}$$

Доведення. Позначимо через M ліву частину (35). Завдяки (33) – (35) для всіх $\mathfrak{S} \in \mathfrak{P}$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{n_1,n_2}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon \in (0,1)$ і $\tau \in \mathbb{R}$ справджуються співвідношення

$$\left\|(Q_{\varepsilon,\tau}\mathfrak{S}\mathbf{x})_n - (\mathfrak{S}Q_{\varepsilon,\tau}\mathbf{x})_n\right\|_{E_n} = \left\|q(\varepsilon(n-\tau))\sum_{m\in\mathbb{Z}} S_{n,m}x_m - \sum_{m\in\mathbb{Z}} S_{n,m}q(\varepsilon(m-\tau))x_m\right\|_{E_n} =$$
$$= \left\|\sum_{m\in\mathbb{Z}} S_{n,m}(q(\varepsilon(n-\tau)) - q(\varepsilon(m-\tau)))x_m\right\|_{E_n} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \|S_{n,m}\|_{L(E_n,E_m)} |q(\varepsilon(n-\tau)) - q(\varepsilon(m-\tau))|\right) \|x\|_{E_m} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \|S_{n,m}\|_{L(E_n,E_m)} |n-m|\right) \varepsilon \|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}_{n_1,n_2}} \leq M\varepsilon \|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}_{n_1,n_2}},$$

з яких випливає (36).

Лему 1 доведено.

Далі вважатимемо, що оператор $\mathfrak{B}: \mathfrak{M}_{n_1,n_2} \to \mathfrak{M}_{n_1,n_2}$ має обернений неперервний оператор $\mathfrak{B}^{-1}$. За теоремою 2 цей оператор подається у вигляді

$$\left(\mathfrak{B}^{-1}\mathbf{y}\right)^{-1} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} G_{n,m} y_m, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{37}$$

де операторна функція $G_{n,m}$ задовольняє (11).

Для цілих чисел $k > 0$ і $m < 0$ визначимо оператори $\mathfrak{B}_k^+ : l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_2}) \to \mathfrak{M}_{n_1,n_2,k}$ і $\mathfrak{B}_m^- : l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_1-1}) \to \mathfrak{M}_{n_1,n_2,m},\ k \in \mathbb{Z},$ рівностями

$$\left(\mathfrak{B}_k^+\mathbf{y}\right)_n = \sum_{l+k\geq n_2} G_{n+k,l+k} y_l, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{38}$$

і

$$\left(\mathfrak{B}_m^-\mathbf{z}\right)_n = \sum_{l+m\leq n_1-1} G_{n+m,l+m} z_l, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{39}$$

де $\mathbf{y} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_2}),\ \mathbf{z} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_1-1})$ і $G_{n,l}$ — операторна функція така, що й у (37).

Зауваження 4. Для кожного зафіксованого $n \in \mathbb{Z}$ образи операторів $G_{n+k,l+k}$ і $G_{n+m,l+m}$ в (38) і (39) для достатньо великих додатних k і достатньо великих від'ємних m є підмножинами просторів E_{n_2} і E_{n_1-1} відповідно. Тому аналогічно $\left(\mathfrak{B}_k^+\mathbf{y}\right)_n \in E_{n_2}$ і $(\mathfrak{B}_m^-\mathbf{z})_n \in E_{n_1-1}$ для відповідних k і m.

Правильним є таке твердження.

Лема 2. *Нехай оператор $\mathfrak{B}$ має неперервний обернений.*

Тоді для кожних $\mathbf{f} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_2}),\ \mathbf{g} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_1-1})$ і $n \in \mathbb{Z}$ існують границі

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\mathfrak{B}_k^+\mathbf{f}\right)_n \tag{40}$$

і

$$\lim_{m\to-\infty} \left(\mathfrak{B}_m^-\mathbf{g}\right)_n, \tag{41}$$

які є елементами просторів E_{n_2} і E_{n_1-1} відповідно.

Доведення. Зафіксуємо довільне $n \in \mathbb{Z}$. Виконується рівність

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\mathfrak{C}\mathfrak{B}_k^+\mathbf{f}\right)_n = f_n. \tag{42}$$

Справді, завдяки (32), (38) і виконанню для $G_{n,m}$ співвідношення, аналогічного (11), маємо

$$\left(\mathfrak{C}\mathfrak{B}_k^+\mathbf{f}\right)_n = \sum_{l+k\geq n_2} G_{n+k,l+k} f_l - C \sum_{l+k\geq n_2} G_{n-1+k,l+k} f_l =$$

$$= \sum_{l+k \geq n_2} (G_{n+k,l+k} - CG_{n-1+k,l+k}) f_l =$$
$$= (G_{n+k,n+k} - CG_{n-1+k,n+k}) f_n +$$
$$+ \sum_{l+k \geq n_2, l \neq n} (G_{n+k,l+k} - CG_{n-1+k,l+k}) f_l. \tag{43}$$

Оскільки також для кожних фіксованих n і l для $k > \max\{n_2+1-l, n_2+1-n\}$ виконуються рівності

$$G_{n+k,n+k} - CG_{n-1+k,n+k} = I_n \tag{44}$$

і

$$G_{n+k,l+k} - CG_{n-1+k,l+k} = O_l, \quad l \neq n, \tag{45}$$

то в (43) під знаком суми можна перейти до границі при $k \to +\infty$. Ураховуючи (44) і (45), отримуємо (42).

Зауважимо, що на підставі виконання співвідношення (42) ми не можемо стверджувати, що існує границя (40), оскільки не доведено оборотність оператора $\mathfrak{C}$.

Припустимо, що для деяких $\mathbf{f} = \hat{\mathbf{f}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_2})$ і $n = \hat{n} \in \mathbb{Z}$ границя (40) не існує. Тоді для деяких додатного числа $a > 0$ і строго зростаючої послідовності натуральних чисел $k_i, \ i \geq 1,$

$$\left\| \left(\left(\mathfrak{B}^+_{k_i} - \mathfrak{B}^+_{k_j} \right) \mathbf{f} \right)_{\hat{n}} \right\|_{E_{\hat{n}}} \geq a, \quad i \geq 1, \quad j \geq 1, \quad i \neq j. \tag{46}$$

Оскільки співвідношення (42) виконується для всіх $n \in \mathbb{Z}$, то для довільних цілих чисел $\hat{n}_1, \hat{n}_2 \in \mathbb{Z}$, для яких $\hat{n}_1 < \hat{n} < \hat{n}_2$,

$$\lim_{i \to +\infty, \ j \to +\infty} \left(\mathfrak{C} \left(\mathfrak{B}^+_{k_i} - \mathfrak{B}^+_{k_j} \right) \hat{\mathbf{f}} \right)_n = 0_n, \quad \hat{n}_1 \leq n \leq \hat{n}_2.$$

Тому на підставі означення оператора $Q_{\varepsilon,\tau}$ для кожного числа $\varepsilon \in (0,1)$

$$\lim_{i \to +\infty, \ j \to +\infty} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left\| \left(Q_{\varepsilon,\hat{n}} \mathfrak{C} \left(\mathfrak{B}^+_{k_i} - \mathfrak{B}^+_{k_j} \right) \hat{\mathbf{f}} \right)_n \right\|_{E_n} = 0. \tag{47}$$

Згідно з (47) існують числа $\varepsilon_p \in (0,1), \ p \geq 1,$ і підпослідовність (k_{i_p}) послідовності $(k_i),$ для яких

$$\hat{n} + k_{i_p} - \left[\varepsilon_p^{-1} \right] - 1 \geq n_2, \quad p \geq 1, \quad \lim_{p \to +\infty} \varepsilon_p = 0$$

і

$$\lim_{p \to +\infty} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left\| \left(Q_{\varepsilon_p,\hat{n}} \mathfrak{C} \left(\mathfrak{B}^+_{k_{i_p}} - \mathfrak{B}^+_{k_{i_{p+1}}} \right) \hat{\mathbf{f}} \right)_n \right\|_{E_n} = 0. \tag{48}$$

За лемою 1 з урахуванням (48)

$$\lim_{p \to +\infty} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left\| \left(\mathfrak{C} Q_{\varepsilon_p,\hat{n}} \left(\mathfrak{B}^+_{k_{i_p}} - \mathfrak{B}^+_{k_{i_{p+1}}} \right) \hat{\mathbf{f}} \right)_n \right\|_{E_n} = 0. \tag{49}$$

Використаємо оператор зсуву $S_m : l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_2}) \to l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_2}),\ m \in \mathbb{Z},$ що визначається рівністю

$$(S_m\mathbf{x})_n = x_{n+m}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для кожного $p \in \mathbb{N}$ існує число $m_p \in \mathbb{Z}$ таке, що носій елемента

$$\mathbf{h}_p = (h_{n,p}) = S_{m_p} Q_{\varepsilon_p, \hat{n}} \left(\mathfrak{B}^+_{k_{i_p}} - \mathfrak{B}^+_{k_{i_{p+1}}} \right) \hat{\mathbf{f}}$$

є підмножиною множини $\{n \in \mathbb{Z} \colon n \geq n_2 + 1\}$. Під носієм елемента $\mathbf{h}_p$ розуміється множина $\{n \in \mathbb{Z} \colon \|h_{n,p}\|_{E_n} \neq 0\}$.

Завдяки (49) та автономності оператора $\mathfrak{C}$ маємо

$$\lim_{p\to+\infty} \|\mathfrak{C}\mathbf{h}_p\|_{l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_2})} = 0. \tag{50}$$

Використаємо величини

$$z_{n,p} = \begin{cases} h_{n,p}, & \text{якщо} \quad n \geq n_2, \\ 0_n, & \text{якщо} \quad n < n_2, \end{cases} \qquad p \geq 1.$$

Ураховуючи, що $B_{n-1} = C$ при $n - 1 \geq n_2$, на підставі (50) для $\mathbf{z}_p = (z_{n,p})$ отримуємо

$$\lim_{p\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|(\mathfrak{B}\mathbf{z}_p)_n\|_{E_n} = 0.$$

Звідси та з (46) випливає рівність

$$\inf_{\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}_{n_1,n_2}}=1} \|\mathfrak{B}\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}_{n_1,n_2}} = 0,$$

що суперечить оборотності оператора $\mathfrak{B}$.

Отже, припущення про те, що для деяких $\mathbf{f} = \hat{\mathbf{f}} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_2})$ і $n = \hat{n} \in \mathbb{Z}$ границя (40) не існує, є хибним.

Таким чином, існування границі (40) обґрунтовано.

Аналогічним чином можна показати існування границі (41).

Границі (40) і (41) є елементами просторів E_{n_2} і E_{n_1-1} відповідно згідно з зауваженням 4.

Лему 2 доведено.

Лема 3. *Нехай оператор $\mathfrak{B}$ має неперервний обернений.*

Тоді для кожних $\mathbf{f} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_2})$ і $\mathbf{g} \in l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_1-1})$ обмежені векторні величини, які визначаються рівностями

$$x^+_n = \lim_{k\to+\infty} \left(\mathfrak{B}^+_k \mathbf{f}\right)_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{51}$$

і

$$x^-_n = \lim_{k\to-\infty} \left(\mathfrak{B}^-_k \mathbf{g}\right)_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

є єдиними розв'язками рівнянь

$$(\mathfrak{C}\mathbf{x})_n = f_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{52}$$

і

$$(\mathfrak{D}\mathbf{x})_n = g_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{53}$$

відповідно.

Доведення. Зазначимо, що завдяки (11), (38) і (39) векторні величини x_n^+ і x_n^- є обмеженими.

Покажемо, що x_n^+ — розв'язок рівняння (52). Зафіксуємо довільне $n \in \mathbb{Z}$. Згідно з (9), (38), (51) та тим, що $B_n = C$ для всіх $n \geq n_2$, справджуються рівності

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{C}\mathbf{x}^+\right)_n &= x_n^+ - Cx_{n-1}^+ = \lim_{k\to+\infty}\left(\mathfrak{B}_k^+\mathbf{f}\right)_n - C\lim_{k\to+\infty}\left(\mathfrak{B}_k^+\mathbf{f}\right)_{n-1} = \\
&= \lim_{k\to+\infty}\sum_{l+k\geq n_2} G_{n+k,l+k}f_l - C\lim_{k\to+\infty}\sum_{l+k\geq n_2} G_{n-1+k,l+k}f_l = \\
&= \lim_{k\to+\infty}\sum_{l+k\geq n_2} G_{n+k,l+k}f_l - \lim_{k\to+\infty} B_{n-1+k}\lim_{k\to+\infty}\sum_{l+k\geq n_2} G_{n-1+k,l+k}f_l = \\
&= \lim_{k\to+\infty}\sum_{l+k\geq n_2} G_{n+k,l+k}f_l - \lim_{k\to+\infty}\sum_{l+k\geq n_2} B_{n-1+k}G_{n-1+k,l+k}f_l = \\
&= \lim_{k\to+\infty}\sum_{l+k\geq n_2}\left(G_{n+k,l+k} - B_{n-1+k}G_{n-1+k,l+k}\right)f_l = \\
&= \lim_{k\to+\infty}\left(G_{n+k,n+k} - B_{n-1+k}G_{n-1+k,n+k}\right)f_n + \\
&\quad + \lim_{k\to+\infty}\sum_{l\neq n,\quad l+k\geq n_2}\left(G_{n+k,l+k} - B_{n-1+k}G_{n-1+k,l+k}\right)f_l \\
&= I_{n_2}f_n + \sum_{l\neq n} O_{n_2}f_l = f_n,
\end{aligned}$$

де I_{n_2} і O_{n_2} — одиничний та нульовий елементи простору $L(E_{n_2}, E_{n_2})$. У цих співвідношеннях також використано оцінку (11) для норми оператора $G_{n,m}$, завдяки якій можливий граничний перехід під знаком суми.

Отже, x_n^+ — обмежений розв'язок рівняння (52).

Покажемо, що цей розв'язок єдиний.

Припустимо, що рівняння (52) має відмінний від x_n^+ обмежений розв'язок x_n^{++}. Тоді $y_n^+ = x_n^+ - x_n^{++}$ — обмежений ненульовий розв'язок рівняння

$$y_n - Cy_{n-1} = 0, \tag{54}$$

і для деякого $n_0 \in \mathbb{Z}$

$$y_{n_0}^+ \neq 0. \tag{55}$$

Очевидно, що обмеженим розв'язком рівняння (54) також є y_{n-k}^+ для кожного $k \in \mathbb{Z}$. За лемою 1

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\tau\in\mathbb{Z}}\left\|Q_{\varepsilon,\tau}\mathfrak{C}\mathbf{y}^+ - \mathfrak{C}Q_{\varepsilon,\tau}\mathbf{y}^+\right\|_{l_\infty\left(\mathbb{Z},E_{n_2}\right)} = 0,$$

і тому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\tau\in\mathbb{Z}}\left\|\mathfrak{C}Q_{\varepsilon,\tau}\mathbf{y}^+\right\|_{l_\infty\left(\mathbb{Z},E_{n_2}\right)} = 0, \tag{56}$$

оскільки $\mathfrak{C}\mathbf{y}^+ = 0$.

Розглянемо елементи $\mathbf{u}_\varepsilon = (u_{n,\varepsilon}) \in l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_2})$ і $\mathbf{v}_\varepsilon = (v_{n,\varepsilon}) \in \mathfrak{M}_{n_1,n_2}$, які визначаються рівностями

$$u_{n,\varepsilon} = \begin{cases} 0_{n_2}, & \text{якщо} \quad n \geq n_2, \\ q\big(\varepsilon\left(n - n_2 - \left[\varepsilon^{-1}\right] - 1\right)\big)\, y^+_{n-n_2-[\varepsilon^{-1}]-1+n_0}, & \text{якщо} \quad n > n_2, \end{cases}$$

і

$$v_{n,\varepsilon} = \begin{cases} 0_n, & \text{якщо} \quad n \geq n_2, \\ q\big(\varepsilon\left(n - n_2 - \left[\varepsilon^{-1}\right] - 1\right)\big)\, y^+_{n-n_2-[\varepsilon^{-1}]-1+n_0}, & \text{якщо} \quad n > n_2, \end{cases}$$

де $[\varepsilon^{-1}]$ — ціла частина числа ε^{-1}.

Очевидно, що

$$u_{n_2+[\varepsilon^{-1}]+1,\varepsilon} = v_{n_2+[\varepsilon^{-1}]+1,\varepsilon} = y^+_{n_0} \quad \text{для всіх} \quad \varepsilon \in (0,1), \tag{57}$$

$$\mathfrak{C} Q_{\varepsilon, n_2+[\varepsilon^{-1}]+1} \mathbf{y}^+ = \mathfrak{C}\mathbf{u}_\varepsilon, \tag{58}$$

$$(\mathfrak{B}\mathbf{v}_\varepsilon)_n = (\mathfrak{C}\mathbf{u}_\varepsilon)_n \quad \text{для всіх} \quad n \geq n_2 \tag{59}$$

і

$$\|\mathfrak{B}\mathbf{v}_\varepsilon\|_{\mathfrak{M}_{n_1,n_2}} = \|\mathfrak{C}\mathbf{u}_\varepsilon\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E_{n_2})} \quad \text{для всіх} \quad \varepsilon \in (0,1). \tag{60}$$

Завдяки співвідношенням (55) – (60) маємо

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\mathfrak{B}\mathbf{v}_\varepsilon\|_{\mathfrak{M}_{n_1,n_2}} = 0,$$

і тому

$$\inf_{\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}_{n_1,n_2}}=1} \|\mathfrak{B}\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}_{n_1,n_2}} = 0,$$

що суперечить оборотності оператора $\mathfrak{B}$.

Отже, припущення про те, що рівняння (52) має обмежений відмінний від x_n^+ розв'язок x_n^{++}, хибне.

Аналогічно з використанням рівностей $B_n = D$, $n < n_1$, можна показати, що x_n^- — обмежений розв'язок рівняння (53) і цей розв'язок єдиний.

Лему 3 доведено.

Завдяки лемам 2 і 3 справджується таке твердження.

Теорема 5. *Нехай оператор* $\mathfrak{B}\colon \mathfrak{M}_{n_1,n_2} \to \mathfrak{M}_{n_1,n_2}$ *має неперервний обернений.*

Тоді оператори $\mathfrak{C}\colon l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_2}) \to l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_2})$ *і* $\mathfrak{D}\colon l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_1-1}) \to l_\infty(\mathbb{Z}, E_{n_1-1})$ *також мають неперервні обернені.*

Наслідок 2. *Якщо хоча б один із операторів* $\mathfrak{C}$ *і* $\mathfrak{D}$ *є необоротним, то оператор* $\mathfrak{B}$ *також є необоротним.*

Далі наведемо умови оборотності операторів $\mathfrak{C}$ і $\mathfrak{D}$. Використаємо спектри $\sigma(C)$ і $\sigma(D)$ операторів C і D відповідно та одиничне коло $T = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$.

Правильною є така теорема.

Теорема 6. *Оператори* $\mathfrak{C}$ *і* $\mathfrak{D}$ *мають неперервні обернені тоді і тільки тоді, коли* $\sigma(C) \cap \cap T = \varnothing$ *і* $\sigma(D) \cap T = \varnothing$.

Умови оборотності різницевих операторів, аналогічних $\mathfrak{C}$ і $\mathfrak{D}$, та складніших операторів, для дослідження яких використання експоненціальної дихотомії неможливе, отримано в [3 – 5].

Зауваження 5. Для оборотності оператора $\mathfrak{B}$ недостатньо оборотності операторів $\mathfrak{C}$ і $\mathfrak{D}$, що підтверджується наведеним далі прикладом.

Приклад 2. Розглянемо оператори $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H} \colon l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \to l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, які визначаються рівностями

$$(\mathfrak{F}\mathbf{x})_n = x_n - \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} x_{n-1}, & \text{якщо} \quad n > 0, \\ \pi x_{n-1}, & \text{якщо} \quad n \le 0, \end{cases} \quad (\mathfrak{G}\mathbf{x})_n = x_n - \frac{1}{\pi} x_{n-1} \quad \text{і} \quad (\mathfrak{H}\mathbf{x})_n = x_n - \pi x_{n-1}.$$

Оператори $\mathfrak{G}$ і $\mathfrak{H}$ є оборотними, оскільки спектри операторів C і D, які відповідають $\mathfrak{G}$ і $\mathfrak{H}$, збігаються з множинами $\{1/\pi\}$ і $\{\pi\}$ відповідно і не мають спільних точок з T. Однак оператор $\mathfrak{F}$ не є оборотним, оскільки рівняння $\mathfrak{F}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ має ненульовий обмежений розв'язок $x_n = \pi^{-|n|}$.

У подальшому будемо використовувати множини

$$\sigma^+(C) = \{\lambda \in \sigma(C) \colon |\lambda| < 1\},$$

$$\sigma^-(C) = \{\lambda \in \sigma(C) \colon |\lambda| > 1\},$$

$$\sigma^+(D) = \{\lambda \in \sigma(C) \colon |\lambda| < 1\},$$

$$\sigma^-(D) = \{\lambda \in \sigma(C) \colon |\lambda| > 1\}$$

та проектори $P_C^+,\ P_C^-,\ P_D^+,\ P_D^-$ і підпростори $E_C^+ = P_C^+ E,\ E_C^- = P_C^- E,\ E_D^+ = P_D^+ E,\ E_D^- = P_D^- E$ простору E, що відповідають цим множинам. Також будемо використовувати оператори $C^+ = P_C^+ C P_C^+,\ C^- = P_C^- C P_C^-,\ D^+ = P_D^+ D P_D^+$ і $D^- = P_D^- D P_D^-$, спектрами яких є множини $\sigma^+(C),\ \sigma^-(C),\ \sigma^+(D)$ і $\sigma^-(D)$ відповідно, і спектральний радіус $r(A) = \max\{|\lambda| \colon \lambda \in \sigma(A)\}$ оператора $A \in L(E, E)$.

Корисною є така лема.

Лема 4. *Якщо $r(A) < 1$, то для кожного числа $q \in (r(A), 1)$ існує таке число $M \ge 1$, що $\|A^n\|_{L(E,E)} \le M q^n,\ n \in \mathbb{N}$.*

Твердження леми є наслідком формули Гельфанда [6]:

$$r(A) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|_{L(E,E)}}.$$

Оскільки $\sigma^+(C) \cup \sigma^+(D) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| < 1\}$, то $r\left(C^+\right) < 1$ і $r\left(D^+\right) < 1$.

Оскільки $\sigma^-(C) \cup \sigma^-(D) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| > 1\}$, то оператори C^- і D^- мають неперервні обернені $\left(C^-\right)^{-1},\ \left(D^-\right)^{-1}$ і згідно з теоремою Данфорда про відображення спектра [7] $r\big(\left(C^-\right)^{-1}\big) < 1$ і $r\big(\left(D^-\right)^{-1}\big) < 1$.

Отже, справджується таке твердження.

Теорема 7. *Оператори $C^- \colon E_C^- \to E_C^-$ і $D^- \colon E_D^- \to E_D^-$ мають неперервні обернені $\left(C^-\right)^{-1}$ і $\left(D^-\right)^{-1}$ відповідно і спектральні радіуси операторів $C^+,\ D^+,\ \left(C^-\right)^{-1},\ \left(D^-\right)^{-1}$, менші 1.*

Далі наведемо аналог теореми 3 для рівняння (3) та відповідного оператора $\mathfrak{B}$.

Теорема 8. *Якщо оператор* $\mathfrak{B}$ *має неперервний обернений, то для коефіцієнтів рівняння (3) справджуються твердження теореми 3 і додатково*

$$E_n^+ = E_C^+ \qquad і \qquad E_n^- = E_C^- \quad \textit{для всіх} \quad n \geq n_2 \tag{61}$$

та

$$E_n^+ = E_D^+, \qquad і \qquad E_n^- = E_D^- \quad \textit{для всіх} \quad n \leq n_1 - 1. \tag{62}$$

Доведення. Оскільки рівняння (3) є окремим випадком рівняння (1), то для коефіцієнтів рівняння (3) справджуються твердження теореми 3.

Покажемо виконання співвідношень (61) і (62).

Спочатку покажемо, що $E_{n_2}^+ = E_C^+$. Згідно з умовою б) означення e-дихотомічності рівняння (1) $E_C^+ \subset E_{n_2}^+$. Припустимо, що $E_{n_2}^+ \neq E_C^+$ і нехай $z = P_C^+ z + P_C^- z$ — елемент з $E_{n_2}^+$, для якого $P_C^- z \neq 0$. За означенням $E_{n_2}^+$, $\lim_{n\to+\infty} \left\| C^n \left(P_C^+ z + P_C^- z \right) \right\|_{E_{n_2}} = 0$. Оскільки $CE_C^+ \subset E_C^+$ і $r\left(C^+\right) < 1$, то

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| C^n P_C^+ z \right\|_{E_{n_2}} = \lim_{n\to+\infty} \left\| \left(C^+\right)^n P_C^+ z \right\|_{E_{n_2}} = 0.$$

Звідси випливає рівність $\lim_{n\to+\infty} \left\| C^n P_C^- z \right\|_{E_{n_2}} = 0$, що не можливо. Справді, згідно з умовою в) означення e-дихотомічності рівняння (1), включенням $E_C^- \subset E_{n_2}^-$ та зауваженням 2 $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \left\| C^n P_C^- z \right\|_{E_{n_2}} = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \left\| \left(C^-\right)^n P_C^- z \right\|_{E_{n_2}} \neq 0$.

Отже, припущення про те, що $E_{n_2}^+ \neq E_C^+$, хибне.

Аналогічним чином доводиться, що $E_n^+ = E_C^+$ для $n > n_2$.

Далі покажемо, що $E_{n_2}^- = E_C^-$. Згідно з умовою в) означення e-дихотомічності рівняння (1) та нерівністю $r\left(\left(C^-\right)^{-1}\right) < 1$ справджується включення $E_C^- \subset E_{n_2}^-$. Припустимо, що $E_{n_2}^- \neq E_C^-$ і нехай $z = P_C^+ z + P_C^- z$ — елемент простору $E_{n_2}^-$, для якого $P_C^+ z \neq 0$. За означенням $E_{n_2}^-$ розв'язки задачі

$$x_n = B_{n-1} x_{n-1}, \quad n \leq n_2, \quad x_{n_2} = a$$

при $a = P_C^+ z + P_C^- z$ і $a = P_C^- z$ прямують до 0 при $n \to -\infty$. Аналогічну властивість має розв'язок цієї задачі і при $a = P_C^+ z$, оскільки $P_C^+ z + P_C^- z$, $P_C^- z$ — вектори з простору $E_{n_2}^-$, і тому $\left(P_C^+ z + P_C^- z\right) - P_C^- z = P_C^+ z \in E_{n_2}^-$. Тоді на підставі зауваження 2 $\lim_{n\to+\infty} \left\| C^n P_C^+ z \right\|_{E_{n_2}} = +\infty$, що суперечить співвідношенням $CE_C^+ \subset E_C^+$, $C^n P_C^+ z = \left(C^+\right)^n P_C^+ z$, $n \in \mathbb{N}$, і $r(C^+) < 1$, з яких випливає, що $\lim_{n\to+\infty} \left\| C^n P_C^+ z \right\|_{E_{n_2}} = 0$.

Отже, припущення про те, що $E_{n_2}^- \neq E_C^-$, хибне.

Аналогічним чином доводиться, що $E_n^- = E_C^-$ для $n > n_2$.

Тепер покажемо, що $E_{n_1-1}^- = E_D^-$. З означення простору $E_{n_1-1}^-$, рівності $D^- E_D^- = E_D^-$ та оборотності оператора $D^- : E_D^- \to E_D^-$ (на підставі теореми 3) випливає, що $E_D^- \subset E_{n_1-1}^-$. Припустимо, що $E_{n_1-1}^- \neq E_D^-$, і нехай вектор $z = P_D^+ z + P_D^- z$ з простору $E_{n_1-1}^-$ такий, що $P_D^+ z \neq 0$. Згідно з тим, що простори E_D^+ і E_D^- інваріантні відносно оператора D, оператор $D^- : E_D^- \to E_D^-$ оборотний і задача

$$x_n = D x_{n-1}, \quad n \leq n_1 - 1, \quad x_{n_1} = a \tag{63}$$

при $a = z$ має розв'язок z_n, для якого $\lim_{n\to-\infty} \|z_n\|_{E_{n_1-1}} = 0$, випливає, що цей розв'язок можна подати у вигляді $z_n = P_D^+ z_n + P_D^- z_n$, причому $DP_D^+ z_n = P_D^+ Dz_n$ і $DP_D^- z_n = P_D^- Dz_n$. Оскільки $P_D^- z \in E_D^- \subset E_{n_1-1}^-$ і $P_D^+ z = z - P_D^- z \in E_{n_1-1}^-$, то для розв'язків $P_D^- z_n$ і $P_D^+ z_n$ задачі (63) при $a = P_D^- z$ і $a = P_D^+ z$ відповідно згідно з означенням простору $E_{n_1-1}^-$ виконуються співвідношення $\lim_{n\to-\infty} \left\|P_D^- z_n\right\|_{E_{n_1-1}} = 0$ і

$$\lim_{n\to-\infty} \left\|P_D^+ z_n\right\|_{E_{n_1-1}} = 0. \tag{64}$$

З іншого боку, $P_D^+ z \neq 0$ і $P_D^+ z_n = D^+ P_D^+ z_{n-1}$, $n \leq n_1$. Тому $P_D^+ z_n \neq 0$, $n \leq n_1 - 1$. Оскільки $r(D^+) < 1$, то на підставі леми 4 $\left\|P_D^+ z\right\|_{E_{n_1-1}} \leq Mq^{|n-n_1+1|} \left\|P_D^+ z_n\right\|_{E_{n_1-1}}$, $n \leq n_1 - 1$, для деяких чисел $M > 0$ і $q \in (0,1)$. Це співвідношення суперечить (64) і вказує на хибність припущення про те, що $E_{n_1-1}^- \neq E_D^-$.

Аналогічним чином доводиться, що $E_n^- = E_D^-$ для $n < n_1 - 1$.

Нарешті покажемо, що $E_{n_1-1}^+ = E_D^+$.

Згідно з оборотністю оператора $\mathfrak{B}$, і, отже, e-дихотомічністю рівняння (3), а також оборотністю оператора $\mathfrak{D}$ (завдяки теоремам 4 і 5) справджуються рівності

$$E_{n_1-1} = E_{n_1-1}^+ \oplus E_{n_1-1}^- = E_{n_1-1}^+ \oplus E_D^- = E_D^+ \oplus E_D^-. \tag{65}$$

Тут на підставі попередніх міркуваньураховано, що $E_D^- = E_{n_1-1}^-$.

Зазначимо, що з (65) не випливає рівність $E_{n_1-1}^+ = E_D^+$.

Припустимо, що $E_{n_1-1}^+ \neq E_D^+$. Тоді

$$E_{n_1-1}^+ \setminus E_D^+ \neq \varnothing \tag{66}$$

або

$$E_{n_1-1}^+ \subset E_D^+ \qquad \text{і} \qquad E_D^+ \setminus E_{n_1-1}^+ \neq \varnothing. \tag{67}$$

Розглянемо випадок виконання співвідношення (66). Зафіксуємо довільний ненульовий вектор

$$v \in E_{n_1-1}^+ \setminus E_D^+. \tag{68}$$

Завдяки (65) вектор v можна подати у вигляді $v = P_{n_1-1}^+ v + P_D^- v$, де $P_D^- v \neq 0$. Очевидно, що рівність $P_D^- v = 0$ не виконується згідно з (68), оскільки тоді $v = P_D^+ v$.

З означень просторів $E_{n_1-1}^+$ і $E_{n_1-1}^-$ випливає, що для розв'язку v_n^+ задачі

$$x_n = B_{n-1} x_{n-1}, \quad n \geq n_1, \quad x_{n_1-1} = v$$

виконується співвідношення

$$\lim_{n\geq n_2,\ n\to+\infty} \left\|v_n^+\right\|_{E_{n_2}} = 0, \tag{69}$$

а для розв'язку $\tilde{v}_n$ задачі

$$x_n = B_{n-1} x_{n-1}, \quad n \geq n_1, \quad x_{n_1-1} = a, \tag{70}$$

при $a = P_D^- v$ згідно з рівністю $E_{n_1-1}^- = E_D^-$ та зауваженням 2 для деяких чисел $M > 0$ і $Q > 1$ виконується співвідношення

$$\|\tilde{v}_n\|_{E_{n_2}} \geq MQ^{n-n_1+1} \left\|P_D^- v\right\|_{E_{n_1-1}}, \quad n \geq n_2. \tag{71}$$

Завдяки (69) і (71) для розв'язку $\tilde{\tilde{v}}_n$ задачі (70) при $a = P_{n_1-1}^+ v$ також буде виконуватися співвідношення

$$\left\|\tilde{\tilde{v}}_n\right\|_{E_{n_2}} \geq M_1 (Q_1)^{n-n_1+1} \|P_D^+ v\|_{E_{n_1-1}}, \quad n \geq n_2,$$

для деяких чисел $M_1 > 0$ і $Q_1 > 1$, аналогічне (71). Останнє співвідношення суперечить означенню простору $E_{n_1-1}^+$.

Отже, припущення про те, що $E_{n_1-1}^+ \neq E_D^+$ у випадку виконання (66), хибне.

Далі розглянемо випадок виконання співвідношень (67).

Зафіксуємо довільний ненульовий вектор

$$v \in E_D^+ \setminus E_{n_1-1}^+. \tag{72}$$

Тоді

$$v \in E_D^+ \oplus E_D^- = E_{n_1-1} \tag{73}$$

і згідно з (72) та рівністю $E_D^- = E_{n_1-1}^-$

$$v \notin E_{n_1-1}^+ \oplus E_D^- = E_{n_1-1},$$

що суперечить (73).

Отже, припущення про виконання співвідношення (67) є хибним.

Таким чином, припущення про те, що $E_{n_1-1}^+ \neq E_D^+$ у випадку (67), також хибне і, отже, $E_{n_1-1}^+ = E_D^+$.

Аналогічним чином доводиться, що $E_n^+ = E_D^+$ для $n < n_1 - 1$.

Теорему 8 доведено.

3. Умови оборотності оператора $\mathfrak{B}$. Наведені допоміжні результати дають змогу отримати необхідні та достатні умови оборотності оператора $\mathfrak{B}$.

Справджується таке твердження.

Теорема 9. *Для оборотності оператора $\mathfrak{B}$ необхідно та достатньо виконання умов:*

1) для кожного $m \in \mathbb{Z}$ банаховий простір E_m ($E_m = E_{n_1-1}$ для $m \leq n_1 - 1$ і $E_m = E_{n_2}$ для $m \geq n_2$) подається у вигляді прямої суми замкнених підпросторів

$$E_m = E_m^+ \oplus E_m^-, \tag{74}$$

для яких

$$E_n^+ = E_{n_2}^+ \quad \text{і} \quad E_n^- = E_{n_2}^- \quad \text{для всіх} \quad n \geq n_2 \tag{75}$$

і

$$E_n^+ = E_{n_1-1}^+ \quad \text{і} \quad E_n^- = E_{n_1-1}^- \quad \text{для всіх} \quad n \leq n_1 - 1; \tag{76}$$

2) $CE^+_{n_2} \subset E^+_{n_2}$, $CE^-_{n_2} = E^-_{n_2}$, *оператор* $P^-_{n_2} C P^-_{n_2} : E^-_{n_2} \to E^-_{n_2}$ *має неперервний обернений* $\left(P^-_{n_2} C P^-_{n_2}\right)^{-1}$ *і*

$$r\left(P^+_{n_2} C P^+_{n_2}\right) < 1, \tag{77}$$

$$r\left(\left(P^-_{n_2} C P^-_{n_2}\right)^{-1}\right) < 1; \tag{78}$$

3) $DE^+_{n_1-1} \subset E^+_{n_1-1} \cap E^+_{n_1}$, $DE^-_{n_1-1} = E^-_{n_1-1} = E^-_{n_1}$, *оператор* $P^-_{n_1-1} D P^-_{n_1-1} : E^-_{n_1-1} \to$ $\to E^-_{n_1-1}$ *має неперервний обернений* $\left(P^-_{n_1-1} D P^-_{n_1-1}\right)^{-1}$ *і*

$$r\left(P^+_{n_1-1} D P^+_{n_1-1}\right) < 1, \tag{79}$$

$$r\left(\left(P^-_{n_1-1} D P^-_{n_1-1}\right)^{-1}\right) < 1; \tag{80}$$

4) $A_{n_1} E^+_{n_1} \subset E^+_{n_1+1}$, $A_{n_1+1} E^+_{n_1+1} \subset E^+_{n_1+2}, \ldots, A_{n_2-1} E^+_{n_2-1} \subset E^+_{n_2}$*;*

5) $A_{n_1} E^-_{n_1} = E^-_{n_1+1}$, $A_{n_1+1} E^-_{n_1+1} = E^-_{n_1+2}, \ldots, A_{n_2-1} E^-_{n_2-1} = E^-_{n_2}$ *і оператори* $A_{n_1}|_{E^-_{n_1}} :$ $E^-_{n_1} \to E^-_{n_1+1}$, $A_{n_1+1}|_{E^-_{n_1+1}} : E^-_{n_1+1} \to E^-_{n_1+2}, \ldots, A_{n_2-1}|_{E^-_{n_2-1}} : E^-_{n_2-1} \to E^-_{n_2}$ *мають неперервні обернені оператори.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай оператор $\mathfrak{B}$ має неперервний обернений, тобто рівняння (3) (за теоремою 1) e-дихотомічне.

За означенням e-дихотомічності рівняння для кожного $m \in \mathbb{Z}$ банаховий простір E_m подається у вигляді (74), а завдяки теоремі 8 виконуються співвідношення (75) і (76).

Отже, умова 1 виконується.

Умова 2 також виконується. Справді, згідно з твердженнями теорем 3 і 7 $CE^+_{n_2} \subset E^+_{n_2}$ і $CE^-_{n_2} = E^-_{n_2}$. За другою частиною твердження теореми 3 з урахуванням рівностей $P^-_{n_2+1} =$ $= P^-_{n_2} = P^-_C$ оператор $C^- = P^-_C C P^-_C = P^-_{n_2+1} C P^-_{n_2}$ має неперервний обернений $(C^-)^{-1} =$ $= \left(P^-_{n_2+1} C P^-_{n_2}\right)^{-1} = \left(P^-_{n_2} C P^-_{n_2}\right)^{-1}$. Тоді за теоремою 7 виконуються співвідношення (77) і (78).

Аналогічним чином обґрунтовується виконання умови 3. Дійсно, завдяки рівності $D = A_{n_1-1}$ інваріантності просторів $E^+_D = E^+_{n_1-1}$ і $E^-_D = E^-_{n_1-1}$ відносно оператора D та оборотності оператора $D^- : E^-_D \to E^-_D$ (за теоремою 7) виконуються співвідношення $DE^+_{n_1-1} \subset E^+_{n_1-1}$ і $DE^-_{n_1-1} = E^-_{n_1-1}$. За теоремою 3 $DE^+_{n_1-1} \subset E^+_{n_1}$, $DE^-_{n_1-1} = E^-_{n_1}$ (тому $DE^+_{n_1-1} \subset E^+_{n_1-1} \cap E^+_{n_1}$) і оператор $D^- = P^-_{n_1-1} D P^-_{n_1-1} : E^-_{n_1-1} \to E^-_{n_1-1}$ має неперервний обернений $(D^-)^{-1} = \left(P^-_{n_1-1} D P^-_{n_1-1}\right)^{-1}$. Тоді за теоремою 7 виконуються співвідношення (79) і (80).

Умови 4 і 5 виконуються на підставі теореми 3.

Таким чином, оборотність оператора $\mathfrak{B}$ гарантує виконання п'яти умов, що містяться у формулюванні теореми.

Достатність. Нехай виконуються умови, що містяться у формулюванні теореми.

Покажемо e-дихотомічність рівняння (3).

Умова а) e-дихотомічності різницевого рівняння для (3) виконується, оскільки завдяки (75) і (76)

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}}\left(\left\|P_m^+\right\|_{L(E_m,E_m)}+\left\|P_m^-\right\|_{L(E_m,E_m)}\right)=$$
$$=\max_{m\in[n_1-1,n_2]\cap\mathbb{Z}}\left(\left\|P_m^+\right\|_{L(E_m,E_m)}+\left\|P_m^-\right\|_{L(E_m,E_m)}\right)<+\infty.$$

Умова б) e-дихотомічності різницевого рівняння для (3) також виконується. Справді, зафіксуємо довільні $m\in\mathbb{Z}$ і вектор $x_m\in E_m^+$.

Розглянемо задачу

$$y_n=B_{n-1}y_{n-1},\quad n\ge m+1,\quad y_m=x_m, \tag{81}$$

і операторну функцію $S_{n,m}^+: E_m^+\to E_n^+$, яка визначається рівністю

$$S_{n,m}^+=\begin{cases}P_m^+, & \text{якщо}\quad n=m,\\ \left(C^+\right)^{n-m}P_m^+, & \text{якщо}\quad n_2\le m\le n,\\ A_{n-1}\dots A_mP_m^+, & \text{якщо}\quad n_1\le m<n\le n_2,\\ \left(C^+\right)^{n-n_2}A_{n_2-1}\dots A_mP_m^+, & \text{якщо}\quad n_1\le m<n_2<n,\\ \left(D^+\right)^{|m-n|}P_m^+, & \text{якщо}\quad m\le n\le n_1-1,\\ A_{n-1}\dots A_{n_1}\left(D^+\right)^{|m-n_1+1|}P_m^+, & \text{якщо}\quad m\le n_1-1<n\le n_2,\\ \left(C^+\right)^{n-n_2}A_{n_2-1}\dots A_{n_1}\left(D^+\right)^{|m-n_1+1|}P_m^+, & \text{якщо}\quad m\le n_1-1,\quad n_2<n,\end{cases}$$

де $C^+=P_C^+CP_C^+=P_{n_2}^+CP_{n_2}^+$ і $D^+=P_D^+DP_D^+=P_{n_1-1}^+DP_{n_1-1}^+$.

З обмеженості операторної функції B_n, співвідношень (77) і (79) та леми 4 випливає, що для деяких чисел $N_1\ge1$ і $q_1\in(0,1)$ виконується співвідношення

$$\left\|S_{n,m}^+\right\|_{L(E_m,E_n)}\le N_1(q_1)^{n-m},\quad n\ge m. \tag{82}$$

Можна показати (із-за громіздкості викладу ми це не робимо), що на підставі (5) та умов 1 – 4 теореми розв'язок задачі (81) подається у вигляді

$$y_n=S_{n,m}^+x_m,\quad n\ge m.$$

Завдяки (82) маємо

$$\|y_n\|_{E_n}\le N_1(q_1)^{n-m}\|x_m\|_{E_m},\quad n\ge m.$$

Отже, умова б) e-дихотомічності різницевого рівняння для (3) виконується.

Аналогічним чином показується, що умова в) e-дихотомічності різницевого рівняння для (3) також виконується. Справді, зафіксуємо довільні $m\in\mathbb{Z}$ і вектор $x_m\in E_m^-$.

Розглянемо задачу

$$z_n=B_{n-1}z_{n-1},\quad n\le m-1,\quad z_m=x_m, \tag{83}$$

і операторну функцію $S^-_{n,m}\colon E^-_m \to E^-_n$, що визначається рівністю

$$S^-_{n,m} = \begin{cases} P^-_m, & \text{якщо} \quad n = m, \\ \big((D^-)^{-1}\big)^{|n-m|} P^-_m, & \text{якщо} \quad n \le m \le n_1 - 1, \\ \big(A_n|_{E^-_n}\big)^{-1} \ldots \big(A_{m-1}|_{E^-_{m-1}}\big)^{-1} P^-_m, & \text{якщо} \quad n_1 \le n < m \le n_2, \\ \big((D^-)^{-1}\big)^{|n-n_1|} \big(A_{n_1}|_{E^-_{n_1}}\big)^{-1} \ldots \big(A_{m-1}|_{E^-_{m-1}}\big)^{-1} P^-_m, & \text{якщо} \quad n \le n_1 < m \le n_2, \\ \big((C^-)^{-1}\big)^{|m-n|} P^-_m, & \text{якщо} \quad n_2 \le n \le m, \\ \big(A_n|_{E^-_n}\big)^{-1} \ldots \big(A_{n_2-1}|_{E^-_{n_2-1}}\big)^{-1} \big((C^-)^{-1}\big)^{|m-n_2|} P^-_m, & \text{якщо} \quad n_1 \le n < n_2 \le m, \\ \big((D^-)^{-1}\big)^{n-n_1} \big(A_{n_1}|_{E^-_{n_1}}\big)^{-1} \ldots & \\ \qquad \ldots \big(A_{n_2-1}|_{E^-_{n_2-1}}\big)^{-1} \big((C^-)^{-1}\big)^{|m-n_2|} P^-_m, & \text{якщо} \quad n < n_1, \quad n_2 \le m, \end{cases}$$

де $C^- = P^-_C C P^-_C = P^-_{n_2} C P^-_{n_2}$ і $D^- = P^-_D D P^-_D = P^-_{n_1-1} D P^-_{n_1-1}$.

Із співвідношень (78), (80) та леми 4 випливає, що для деяких чисел $N_2 \ge 1$ і $q_2 \in (0,1)$ виконується співвідношення

$$\big\| S^-_{n,m} \big\|_{L(E_m, E_n)} \le N_2 (q_2)^{|n-m|}, \quad n \le m. \tag{84}$$

Можна показати (із-за громіздкості викладу ми цього також не робимо), що на підставі співвідношення (5) та умов 1 – 3, 5 теореми розв’язок задачі (83) подається у вигляді

$$z_n = S^-_{n,m} x_m, \quad n \le m.$$

Завдяки (84)

$$\| z_n \|_{E_n} \le N_2 (q_2)^{|n-m|} \| x_m \|_{E_m}, \quad n \le m.$$

Отже, умова в) e-дихотомічності різницевого рівняння для (3) також виконується.

Таким чином, рівняння (3) e-дихотомічне. Звідси та з теореми 1 випливає оборотність оператора $\mathfrak{B}$.

Теорему 9 доведено.

4. Додаткові зауваження та літературні вказівки. Лінійні різницеві рівняння (1) і (2) з операторним коефіцієнтом A_{n-1}, область визначення якого залежить від n і є залежним від n банаховим простором, та оборотність відповідного оператора $\mathfrak{A}$ досліджені автором у [1]. Дослідження різницевих рівнянь (3) і (4) з кусково-сталим операторним коефіцієнтом $B_{n-1}\colon E_{n_1} \to E_n$, для якого банахові простори E_{n_1-1} і E_{n_2} можуть не збігатися, а також дослідження оборотності відповідного оператора $\mathfrak{B}$ та його зображення наведені в цій статті вперше. У викладених дослідженнях суттєве значення має e-дихотомічність рівнянь (1) і (3).

Леми 1 – 3 та теореми 5 – 9 статті є новими.

Розглянуті в статті дослідження різницевих рівнянь (3) і (4) та оператора $\mathfrak{B}$ є завершеними і наводяться вперше.

Окремий випадок рівнянь (3) і (4) зі стрибком операторного коефіцієнта, коли простори E_n, $n \in \mathbb{Z}$, однакові, розглянуто в [8].

Дослідження задач про умови існування обмежених розв’язків різницевих рівнянь та зображення і властивості таких розв’язків розглянуто в багатьох роботах (див., наприклад, [9 – 21]).

Література

1. В. Е. Слюсарчук, *Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем*, Укр. мат. журн., **35**, № 1, 109 – 115 (1983).
2. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, Москва (1968).
3. В. Е. Слюсарчук, *Разностные уравнения в функциональных пространствах*, Дополнение II монографии Д. И. Мартынюка, Лекции по качественной теории разностных уравнений, Наук. думка, Киев (1972).
4. В. Е. Слюсарчук, *Ограниченные и почти периодические решения разностных уравнений в банаховом пространстве*, Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений, Ин-т математики АН УССР, Киев (1975).
5. В. Е. Слюсарчук, *Об ограниченных и почти периодических решениях неявных разностных уравнений в банаховом пространстве*, Докл. АН УССР. Сер. А., № 6, 503 – 509 (1975).
6. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, *Коммутативные нормированные кольца*, Физматгиз, Москва (1960).
7. Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория, Т. I.*, Изд-во иностр. лит., Москва (1962).
8. М. Ф. Городній, І. В. Гончар, *Про обмежені розв'язки різницевого рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта*, Нелін. коливання, **20**, № 1, 66 – 73 (2017).
9. S. V. Coffman, J. J. Schaffer, *Dichotomies for linear difference equations*, Math. Ann., **172**, 139 – 166 (1967).
10. А. Халанай, Д. Векслер, *Качественная теория импульсных систем*, Мир, Москва (1971).
11. А. Н. Шарковский, Ю. Л. Майстренко, Е. Ю. Романенко, *Разностные уравнения и их приложения*, Наук. думка, Киев (1986).
12. А. Я. Дороговцев, *Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем*, Вища шк., Киев (1992).
13. В. Ю. Слюсарчук, *Оборотність нелінійних різницевих операторів*, Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування, Рівне (2006).
14. В. Ю. Слюсарчук, *Неявні недиференційовні функції в теорії операторів*, Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування, Рівне (2008).
15. В. Е. Слюсарчук, *О представлении ограниченных решений линейных дискретных систем*, Укр. мат. журн., **39**, № 2, 210 – 215 (1987).
16. В. Ю. Слюсарчук, *Зображення обмежених розв'язків лінійних дискретних рівнянь*, Нелін. коливання, **22**, № 2, 262 – 279 (2019).
17. М. Ф. Городний, *Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве*, Укр. мат. журн., **43**, № 1, 42 – 46 (1991).
18. А. Г. Баскаков, *Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов*, Мат. заметки., **67**, вып. 6., 816 – 827 (2000).
19. В. Ю. Слюсарчук, *Експоненціально дихотомічні різницеві рівняння з неліпшицевими збуреннями*, Нелін. коливання, **14**, № 4, 536 – 555 (2011).
20. В. Ю. Слюсарчук, *Метод локального лінійного наближення нелінійних різницевих операторів слабко регулярними операторами*, Нелін. коливання, **15**, № 1, 122 – 126 (2012).
21. В. Ю. Слюсарчук, *Майже періодичні та періодичні розв'язки різницевих рівнянь у метричному просторі*, Нелін. коливання, **18**, № 1, 112 – 119 (2015).

Одержано 29.08.19