УДК 517.9

ПРО НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ*

С. М. Чуйко

Донбас. держ. пед. ун-т
вул. Генерала Батюка, 19, Слов'янськ, 84116, Україна
e-mail: chujko-slav@ukr.net

О. В. Нєсмєлова

Ін-т прикл. математики і механіки НАН України
вул. Добровольського, 1, Слов'янськ, 84109, Україна
e-mail: star-o@ukr.net

М. В. Дзюба

Донбас. держ. пед. ун-т
вул. Генерала Батюка, 19, Слов'янськ, 84116, Україна
e-mail: dziubamaryna2015@ukr.net

For the matrix differential-algebraic boundary-value problem, we obtain conditions of existence and the structure of the best (in the sense of the least square method) pseudosolution of the matrix differential-algebraic boundary-value problem.

Для матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі одержано умови існування, а також конструкцію найкращого (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі.

1. Постановка задачі. Розглянемо задачу про побудову розв'язків $[1-3]$

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b] := \mathbb{C}^1[a;b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

матричного диференціально-алгебраїчного рівняння

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \tag{1}$$

підпорядкованих крайовій умові

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{2}$$

Тут

$$\mathcal{A}Z'(t)\colon \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a,b]$$

* Роботу виконано за фінансової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень (грант № 0118U003390).

— матричний диференціально-алгебраїчний оператор [4, 5], який, за визначенням, для будь-яких скалярних функцій $\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ та сталих матриць $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ обумовлює виконання рівності

$$\mathcal{A}(\zeta'(t)\Xi_1 + \xi'(t)\Xi_2)(t) = \zeta'(t)\mathcal{A}(\Xi_1)(t) + \xi'(t)\mathcal{A}(\Xi_2)(t).$$

Аналогічно матричний оператор

$$\mathcal{B}Z(t)\colon \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \mathbb{C}^1_{\gamma\times\delta}[a,b]$$

будемо далі називати алгебраїчним, якщо для будь-яких

$$\zeta(t), \xi(t) \in \mathbb{C}^1[a,b], \quad \Xi_1, \Xi_2 \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

має місце рівність

$$\mathcal{B}(\zeta(t)\Xi_1 + \xi(t)\Xi_2)(t) = \zeta(t)\mathcal{B}(\Xi_1)(t) + \xi(t)\mathcal{B}(\Xi_2)(t).$$

Тут також $F(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a,b]$ — неперервна матриця та $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — лінійний обмежений матричний функціонал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot)\mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b] \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}.$$

Взагалі кажучи, припускаємо, що $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \mu,\ \nu \in \mathbb{N}$ — довільні натуральні числа. Матричне диференціально-алгебраїчне рівняння (1) узагальнює традиційні постановки задач як для матричних диференціальних рівнянь [1 – 3], так і для диференціально-алгебраїчних рівнянь [6 – 9]. З іншого боку, матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача (1), (2) узагальнює нетерові крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь [10 – 12]. Систематичному вивченню диференціально-алгебраїчних крайових задач присвячені роботи С. Кемпбелла, В. Ф. Бояринцева, В. Ф. Чистякова, А. М. Самойленка, М. О. Перестюка, В. П. Яковця та О. А. Бойчука [6 – 9]. В той же час дослідження диференціально-алгебраїчних крайових задач започатковане значно раніше в роботах К. Вейєрштрасса, М. М. Лузіна та Ф. Р. Гантмахера [13]. Вивчення матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач пов'язане з численними застосуваннями таких задач у теорії нелінійних коливань, механіці, біології, радіотехніці, теорії керування, теорії стійкості руху [6 – 9]. Лінійні та нелінійні матричні алгебраїчні рівняння широко використовуються при розв'язанні диференціальних рівнянь Ріккаті та Бернуллі, в теорії стійкості руху, теорії оптимального керування, варіаційному численні, а також у задачах з відновлення та покращення зображень [1 – 3, 14].

Позначимо

$$\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta$$

— природний базис [15] простору $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$. При цьому задача про побудову розв'язків узагальненого диференціально-алгебраїчного матричного рівняння (1) приводить до задачі про побудову вектора $z(t)$, компоненти якого $z_j(t)$ визначають розвинення матриці

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} z_j(t), \quad z_j(t) \in \mathbb{C}^1[a,b], \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta.$$

Лінійний диференціально-алгебраїчний матричний оператор $\mathcal{A}Z'(t)$ за визначенням зображується у вигляді

$$\mathcal{A}Z'(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \mathcal{A}\Xi^{(j)}(t) z_j'(t).$$

При цьому

$$\mathcal{M}\big[\mathcal{A}Z'(t)\big] = \Omega(t)z'(t), \qquad \Omega(t) := \big[\Omega_j(t)\big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{C}^1_{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta}[a,b],$$

де

$$\Omega_j(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{A}\Xi^{(j)}(t)\right], \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta.$$

Аналогічно

$$\mathcal{M}\big[\mathcal{B}Z(t)\big] = \Theta(t)z(t), \qquad \Theta(t) := \big[\Theta_j(t)\big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{C}^1_{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta}[a,b],$$

де

$$\Theta_j(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{B}\Xi^{(j)}(t)\right], \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta.$$

Таким чином, задачу про побудову розв'язків диференціально-алгебраїчного матричного рівняння (1) приведено до задачі про знаходження розв'язків

$$z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta}[a,b]$$

традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння [6–9]

$$\Omega(t)z'(t) = \Theta(t)z(t) + \mathcal{F}(t), \quad \mathcal{F}(t) := \mathcal{M}[F(t)]. \tag{3}$$

За умови [4, 12, 16]

$$P_{\Omega^*(t)}\Theta(t) = 0, \qquad P_{\Omega^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0, \qquad \Omega^+(t)\Theta(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta}[a,b], \tag{4}$$

у випадку

$$\Omega^+(t)\mathcal{F}(t),\ P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\varrho}[a,b] \tag{5}$$

система (3) розв'язна відносно похідної. У статті [16] побудовано схему наближеного розв'язання матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) методом найменших квадратів у випадку розв'язності системи (3) відносно похідної, зокрема, за умов (4), (5).

2. Випадок нерозв'язності системи (3) відносно похідної. Метою даної роботи є побудова схеми наближеного розв'язання матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) методом найменших квадратів у випадку нерозв'язності системи (3) відносно похідної. Якщо умова (4) або (5) не виконуються, то система (1) може мати розв'язки вигляду [4, 12]

$$Z(t) = \mathcal{P}_\ell Y(t)\mathcal{P}_r, \qquad \mathcal{P}_\ell \in \mathbb{R}^{\alpha\times\alpha}, \quad \mathcal{P}_r \in \mathbb{R}^{\beta\times\beta},$$

де $\mathcal{P}_\ell,\ \mathcal{P}_r$ — невідомі сталі матриці. При цьому задача про знаходження розв'язків диференціально-алгебраїчного матричного рівняння (1) приводить до задачі про знаходження вектора $y(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta}[a;b]$, компоненти якого $y_j(t)$ визначають розвинення матриці

$$Y(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} y_j(t), \qquad y_j(t) \in \mathbb{C}^1[a;b], \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta.$$

У цьому випадку лінійний обмежений диференціально-алгебраїчний матричний оператор $\mathcal{A}Z'(t)$ набирає вигляду

$$\mathcal{A}Z'(t) = \sum_{j=1}^{\alpha\beta} \mathcal{A}\,\mathcal{P}_\ell \Xi^{(j)} \mathcal{P}_r\, y_j'(t),$$

при цьому

$$\mathcal{M}\left[\mathcal{A}Z'(t)\right] = \Omega_1(t) y'(t), \qquad \Omega_1(t) := \left[\Omega_1^{(j)}(t)\right]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta},$$

де

$$\Omega_1^{(j)}(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{A}\,\mathcal{P}_\ell \Xi^{(j)} \mathcal{P}_r(t)\right], \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta.$$

Аналогічно

$$\mathcal{M}\big[\mathcal{B}Z(t)\big] = \Theta_1(t) y(t), \qquad \Theta_1(t) := \left[\Theta_1^{(j)}(t)\right]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta},$$

де

$$\Theta_1^{(j)}(t) = \mathcal{M}\left[\mathcal{B}\,\mathcal{P}_\ell \Xi^{(j)} \mathcal{P}_r(t)\right], \quad j = 1, 2, \ldots, \alpha\cdot\beta.$$

Таким чином, задачу про побудову розв'язків диференціально-алгебраїчного матричного рівняння (1) приведено до задачі про побудову розв'язків $y(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta\times 1}[a;b]$ традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння [6 – 9]

$$\Omega_1(t) y'(t) = \Theta_1(t) y(t) + \mathcal{F}(t), \qquad \mathcal{F}(t) := \mathcal{M}\big[F(t)\big]. \tag{6}$$

За умови [4, 12]

$$P_{\Omega_1^*(t)}\Theta_1(t) = 0, \qquad P_{\Omega_1^*(t)}\mathcal{F}(t) = 0, \tag{7}$$

у випадку

$$\Omega_1^+(t)\Theta_1(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta}[a;b], \qquad \Omega_1^+(t)\mathcal{F}(t), \quad P_{\Omega_{1,\varrho}}(t)\varphi(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\varrho}[a;b] \tag{8}$$

система (6) розв'язна відносно похідної

$$\frac{dy}{dt} = \Omega_1^+(t)\Theta_1(t) y + \mathfrak{F}_1(t,\varphi(t)), \qquad \mathfrak{F}_1(t,\varphi(t)) := \Omega_1^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{\Omega 1,\varrho}(t)\varphi(t).$$

Тут $P_{\Omega_{1,\varrho}}(t)$ — $(\alpha\cdot\beta\times\varrho)$-вимірна матриця, утворена з ϱ лінійно незалежних стовпців $(\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta)$-вимірної матриці-ортопроектора $P_{\Omega_1}(t)\colon \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(\Omega_1(t))$. Умова (7) являє собою, взагалі кажучи, нелінійне рівняння відносно сталих матриць $\mathcal{P}_\ell,\ \mathcal{P}_r$. Припустимо, що система рівнянь (7) має дійсний розв'язок

$$\mathcal{P}_\ell \in \mathbb{R}^{\alpha\times\alpha}, \qquad \mathcal{P}_r \in \mathbb{R}^{\beta\times\beta},$$

для якого виконується умова (8). Позначимо через $\mathfrak{X}(t)$ нормальну фундаментальну матрицю

$$\frac{d\mathfrak{X}(t)}{dt} = \Omega_1^+(t)\Theta_1(t)\mathfrak{X}(t), \quad X(a) = I_{\alpha\beta}$$

отриманої традиційної системи звичайних диференціальних рівнянь. За умов (7) та (8) система (6) має розв'язок вигляду

$$y(t,c) = \mathfrak{X}(t)c + K\big[\mathfrak{F}_1(t,\varphi(s))\big](t),$$

який визначає розв'язок матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1):

$$Z(t,c) = \mathfrak{W}(t,c) + \mathcal{K}\big[F(s)\big](t), \qquad \mathfrak{W}(t,c) := \mathcal{P}_\ell \mathcal{M}^{-1}\big[\mathfrak{X}(t)c\big]\mathcal{P}_r, \quad c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta},$$

де

$$\mathcal{K}\big[F(s)\big](t) := \mathcal{P}_\ell \mathcal{M}^{-1}\left\{K\big[\mathfrak{F}_1(t,\varphi(s))\big](t)\right\}\mathcal{P}_r \tag{9}$$

— узагальнений оператор Гріна матричної задачі Коші $Z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (1).

Підставляючи розв'язок матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1) у крайову умову (2), приходимо до задачі про знаходження розв'язків

$$c = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} c_j \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}, \qquad c_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1,2,\ldots,\alpha\cdot\beta,$$

матричного рівняння

$$\mathcal{L}\mathfrak{W}(\cdot,c) + \mathcal{L}\mathcal{K}\big[F(s)\big](\cdot) = \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{10}$$

У критичному випадку $(P_{\mathfrak{Q}^*} \neq 0)$ за умов (7), (8) матричне рівняння (10) розв'язне тоді і тільки тоді, коли

$$P_{\mathfrak{Q}_d^*}\mathcal{M}\big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}\big[F(s)\big](\cdot)\big\} = 0. \tag{11}$$

Тут $P_{\mathfrak{Q}^*}$ — $(\mu\cdot\nu \times \mu\cdot\nu)$-вимірна матриця-ортопроектор $P_{\mathfrak{Q}^*}\colon \mathbb{R}^{\mu\cdot\nu} \to \mathbb{N}(\mathfrak{Q}^*)$, де

$$\mathfrak{Q} := \big[\mathfrak{Q}_i\big]_{i=1}^{\alpha\cdot\beta} \in \mathbb{R}^{\mu\cdot\nu\times\alpha\cdot\beta}, \qquad \mathfrak{Q}_i := \mathcal{M}\left\{\mathcal{L}\mathcal{P}_\ell\mathcal{M}^{-1}\left[\mathfrak{X}(\cdot)\Theta^{(i)}\right]\mathcal{P}_r\right\}, \quad i = 1,2,\ldots,\alpha\cdot\beta.$$

Матриця $P_{\mathfrak{Q}_r}$ утворена з r лінійно незалежних стовпців матриці-ортопроектора $P_{\mathfrak{Q}}\colon \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta} \to \to \mathbb{N}(\mathfrak{Q})$. Матриця $P_{\mathfrak{Q}_d^*}$ утворена з d лінійно незалежних рядків матриці-ортопроектора $P_{\mathfrak{Q}^*}$. Припустимо, що в критичному випадку $P_{\mathfrak{Q}^*} \neq 0$ за умов (7), (8) матричне рівняння (10) не розв'язне:

$$P_{\mathfrak{Q}_d^*}\mathcal{M}\big\{\mathfrak{A} - \mathcal{L}\mathcal{K}\big[F(s)\big](\cdot)\big\} \neq 0. \tag{12}$$

3. Псевдорозв'язки крайової задачі (1), (2). Припустимо, що

$$\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_k(t), \ldots$$

— система лінійно незалежних неперервно диференційовних $\alpha\beta$-вимірних вектор-функцій. Позначимо $(\alpha\beta \times k)$-вимірну матрицю

$$\psi(t) = \big[\psi_1(t) \quad \psi_2(t) \quad \ldots \quad \psi_k(t)\big].$$

Наближення до розв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі

$$\frac{dy}{dt} = \Omega_1^+(t)\Theta_1(t)y + \mathfrak{F}_1(t,\varphi(t)), \qquad \ell y(\cdot) := \mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{P}_\ell Y(\cdot)\mathcal{P}_r = \mathcal{M}\mathfrak{A} \tag{13}$$

будемо шукати у вигляді

$$y(t) := \mathcal{M}\big[\mathcal{P}_\ell Y(t)\mathcal{P}_r\big] = \psi(t)c, \quad c \in \mathbb{R}^k.$$

Вимагатимемо [17 – 19] виконання співвідношень

$$F(c) := \left\|\frac{dy}{dt} - \Omega_1^+(t)\Theta_1(t)y - \mathfrak{F}(t,\varphi(t))\right\|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]} + \big\|\mathcal{M}\big[\mathcal{L}\mathcal{P}_\ell Y(\cdot)\mathcal{P}_r - \mathcal{A}\big]\big\|^2_{\mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu}} \to \min$$

для фіксованої матриці $\psi(t)$, при цьому

$$F(c) = \big\|\psi'(t)c - \Omega_1^+(t)\Theta_1(t)\psi(t)c - \mathfrak{F}(t,\varphi(t))\big\|^2_{\mathbb{L}^2[a,b]} +$$

$$+ \big\|\mathcal{M}\left[\mathcal{L}\mathcal{P}_\ell\mathcal{M}^{-1}\big[\psi(\cdot)c\big]\mathcal{P}_r - \mathcal{A}\right]\big\|^2_{\mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu}} \to \min.$$

Позначимо

$$\breve{\Xi}^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}, \quad j = 1,2,\ldots,\alpha\cdot\beta,$$

— базис простору $\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$ та $c_j,\ j = 1,2,\ldots,\alpha\cdot\beta,$ — константи, які визначають розвинення вектора

$$c = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \breve{\Xi}^{(j)} c_j, \qquad c_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1,2,\ldots,\alpha\cdot\beta,$$

за векторами $\breve{\Xi}^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$ базису простору $\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$. Зазначимо, що

$$\psi'(t)c - \Omega_1^+(t)\Theta_1(t)\psi(t)c = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta}\left\{\psi'(t)\breve{\Xi}^{(j)} - \Omega_1^+(t)\Theta_1(t)\psi(t)\breve{\Xi}^{(j)}\right\}c_j = \check{\Phi}(t)c,$$

де

$$\check{\Phi}(t) := \big[\check{\Phi}_1(t)\ \check{\Phi}_2(t)\ \ldots\ \check{\Phi}_k(t)\big]$$

— $(\alpha\cdot\beta\times k)$-вимірна матриця,

$$\check{\Phi}_j(t) := \psi'(t)\breve{\Xi}^{(j)} - \Omega_1^+(t)\Theta_1(t)\psi(t)\breve{\Xi}^{(j)}, \quad c \in \mathbb{R}^k.$$

Аналогічно

$$\mathcal{M}\left\{\mathcal{L}\mathcal{P}_\ell\mathcal{M}^{-1}\big[\psi(\cdot)c\big]\mathcal{P}_r\right\} = \check{\Psi}c, \qquad \check{\Psi} := \big[\check{\Psi}_1\ \check{\Psi}_2\ \ldots\ \check{\Psi}_k\big] \in \mathbb{R}^{\lambda\cdot\mu\times k},$$

де

$$\check{\Psi}_j := \mathcal{M}\big\{\mathcal{L}\mathcal{P}_\ell\mathcal{M}^{-1}\big[\psi(\cdot)\breve{\Xi}^{(j)}\big]\mathcal{P}_r\big\}, \quad j = 1,2,\ldots,\alpha\cdot\beta.$$

Функція $F(c)$ зображувана у вигляді

$$F(c) = \int_a^b \left\{\check{\Phi}(t)c - \mathfrak{F}(t,\varphi(t))\right\}^* \left\{\check{\Phi}(t)c - \mathfrak{F}(t,\varphi(t))\right\} dt + \big\{\check{\Psi}c - \mathcal{M}\big[\mathcal{A}\big]\big\}^* \big\{\check{\Psi}c - \mathcal{M}\big[\mathcal{A}\big]\big\}.$$

Для фіксованої матриці $\psi(t)$ мінімум функції $F(c)$ існує, оскільки неперервна невід'ємна функція досягає мінімуму. Необхідною умовою мінімізації функції $F(c)$ є рівняння

$$\left[\check{\Gamma}\big(\psi(\cdot)\big) + \check{\Gamma}\big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\big)\right] c = \int_a^b \check{\Phi}^*(t)\, \mathfrak{F}(t, \varphi(t))\, dt + \check{\Psi}^* \mathcal{M}\big[\mathcal{A}\big],$$

розв'язне відносно вектора

$$c = \left[\check{\Gamma}\big(\psi(\cdot)\big) + \check{\Gamma}\big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\big)\right]^+ \left\{ \int_a^b \check{\Phi}^*(t)\, \mathfrak{F}(t, \varphi(t))\, dt + \check{\Psi}^* \mathcal{M}\big[\mathcal{A}\big] \right\}$$

за умови

$$\check{\mathcal{P}}_\psi \left\{ \int_a^b \check{\Phi}^*(t)\, \mathfrak{F}(t, \varphi(t))\, dt + \check{\Psi}^* \mathcal{M}\big[\mathcal{A}\big] \right\} = 0, \tag{14}$$

зокрема, у випадку невиродженості суми $(k \times k)$-вимірних матриць Грама [20, 21]

$$\check{\Gamma}\big(\psi(\cdot)\big) := \int_a^b \check{\Phi}^*(t) \check{\Phi}(t) dt, \qquad \check{\Gamma}\big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\big) := \check{\Psi}^* \check{\Psi}.$$

Тут

$$\check{\mathcal{P}}_\psi := P_{\left[\check{\Gamma}(\psi(\cdot)) + \check{\Gamma}(\mathcal{L}\psi(\cdot))\right]^*} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{N}\left[\check{\Gamma}\big(\psi(\cdot)\big) + \check{\Gamma}\big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\big)\right]^*$$

— $(k \times k)$-вимірна матриця-ортопроектор. Отриманий псевдорозв'язок

$$z^\dagger(\psi(t)) = \psi(t) \left[\check{\Gamma}\big(\psi(\cdot)\big) + \check{\Gamma}\big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\big)\right]^+ \left\{ \int_a^b \check{\Phi}^*(t)\, \mathfrak{F}(t, \varphi(t))\, dt + \check{\Psi}^* \mathcal{M}\big[\mathcal{A}\big] \right\}$$

забезпечує мінімум функції $F(c)$ і залежить від вибору матриці $\psi(t)$.

Теорема 1. *Для фіксованого числа k та фіксованої $(\alpha\beta \times k)$-вимірної матриці $\psi(t)$ за умов (7), (8) та (14) псевдорозв'язок*

$$Z^\dagger(\psi(t)) = \mathcal{M}^{-1} \left\{ \psi(t) \left[\check{\Gamma}\big(\psi(\cdot)\big) + \check{\Gamma}\big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\big)\right]^+ \left\{ \int_a^b \check{\Phi}^*(t)\, \mathfrak{F}(t, \varphi(t))\, dt + \check{\Psi}^* \mathcal{M}\big[\mathcal{A}\big] \right\} \right\} \tag{15}$$

матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1), що задовольняє крайову умову (2), найкращим чином (у сенсі найменших квадратів) мінімізує нев'язку $F(c)$.

Наслідок. *Для фіксованого числа k та фіксованої $(\alpha\beta \times k)$-вимірної матриці $\psi(t)$ за умов (7), (8) та*

$$\det\left[\check{\Gamma}\big(\psi(\cdot)\big) + \check{\Gamma}\big(\mathcal{L}\psi(\cdot)\big)\right] \neq 0$$

псевдорозв'язок (15) найкращим чином (у сенсі найменших квадратів) мінімізує нев'язку $F(c)$ псевдорозв'язку $Z^\dagger(\psi(t))$ матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (1), що задовольняє крайову умову (2).

У частинному випадку, коли $\ell\psi(\cdot) = 0,$ умова (14) у вигляді

$$\check{\mathcal{P}}_\psi \int\limits_a^b \check{\Phi}^*(t)\, \mathfrak{F}(t, \varphi(t))\, dt = 0 \tag{16}$$

та формула (15) значно спрощуються:

$$Z^\dagger(\psi(t)) = \psi(t)\big[\check{\Gamma}\big(\psi(\cdot)\big)\big]^+ \int\limits_a^b \check{\Phi}^*(t)\, \mathfrak{F}(t, \varphi(t))\, dt.$$

У випадку розв'язності матричної крайової задачі (1), (2) за умов (7), (8) та (14) для відповідного вибору матриці $\psi(t)$ найкращий (у сенсі найменших квадратів) псевдорозв'язок (15) матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) є точним розв'язком. Доведена теорема та наслідок узагальнюють відповідні твердження [4, 16, 22, 23] для випадку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2).

Приклад. Побудуємо псевдорозв'язок $Z^\dagger(\psi(t))$ коректно поставленої 2π-періодичної диференціально-алгебраїчної крайової задачі

$$\mathcal{A}Z'(t) = \mathcal{B}Z(t) + F(t), \tag{17}$$

де

$$\mathcal{A}Z'(t) := \sum_{i=1}^{2} S_i Z'(t) R_i, \qquad \mathcal{B}Z(t) := \sum_{i=1}^{2} \Phi_i Z(t) \Psi_i,$$

— лінійні матричні оператори, крім того (див. [4])

$$S_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Phi_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(t) := \begin{pmatrix} 0 & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Psi_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Psi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Theta(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$P_{\Omega^*(t)}\Theta(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^* \neq 0,$$

отже, умову (4) не виконано, а система (3) не розв'язна відносно похідної; при цьому система (17) має розв'язки вигляду

$$Z(t) = \mathcal{P}_\ell Y(t) \mathcal{P}_r, \qquad \mathcal{P}_\ell \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad \mathcal{P}_r \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

де $\mathcal{P}_\ell,\ \mathcal{P}_r$ — невідомі сталі матриці. Зокрема, система рівнянь (7) має дійсний розв'язок

$$\mathcal{P}_\ell := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{P}_r := I_2,$$

для якого виконуються умови (7), (8). Добуток

$$Q_1^+(t)\Omega_1(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

визначає матрицю

$$\mathfrak{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{t\,(4+t)}{8} & 0 & 0 & \frac{t}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

та загальний розв'язок

$$\mathfrak{W}(t,c) = \begin{pmatrix} 8c_1 & 8c_4 + 4c_1 t \\ 8c_2 & 8c_3 + t(4c_4 + c_1(t+4)) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

задачі Коші $Z(a) = \mathfrak{A}$ для однорідної частини диференціально-алгебраїчної системи (17). Тут

$$\Omega_1(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Theta_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$\mathfrak{Q} = -\frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2+\pi & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_{\mathfrak{Q}^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

то $P_{\mathfrak{Q}^*} \neq 0$. Отже, в задачі про побудову 2π-періодичних розв'язків матричної диференціально-алгебраїчної системи (17) має місце критичний випадок. Загальний розв'язок

$$\mathfrak{W}(t, c_r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_1 & c_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad c_r := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

однорідної частини 2π-періодичної матричної задачі для диференціально-алгебраїчної системи (17) визначають матриці

$$P_{\mathfrak{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_{\mathfrak{Q}_r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок $\mathcal{P}_\ell$, $\mathcal{P}_r$ системи рівнянь (7) визначає матриці

$$P_{\Omega_1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_{\Omega_{1,\varrho}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, вектор

$$\mathfrak{F}_1(t, \varphi(t)) := \Omega_1^+(t)\mathcal{F}(t) + P_{\Omega_{1,\varrho}}(t)\varphi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sin t & \cos t & 0 \end{pmatrix}^*$$

залежить від довільної функції $\varphi(t) \in \mathbb{R}^\varrho$; тут

$$P_{Q_\varrho}(t)\varphi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \varphi(t) := \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \varrho = 2.$$

Покладемо

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

при цьому узагальнений оператор Гріна задачі Коші для системи (17) має вигляд

$$\mathcal{K}\big[\mathfrak{F}_1(s,\varphi(s))\big](t) := \mathcal{P}_\ell\, \mathcal{M}^{-1}\big\{K\big[\mathfrak{F}_1(s,\varphi(s))\big](t)\big\}\, \mathcal{P}_r =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4\sin^2\dfrac{t}{2} \\ 0 & t+\sin t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

і дозволяє пересвідчитись у виконанні умови (11). Позначимо (6×18)-вимірну матрицю

$$\psi(t) := I_6 \otimes (1 \cos t \sin t).$$

Оскільки $\ell\psi(\cdot) = 0,$ для знаходження псевдорозв'язку коректно поставленої 2π-періодичної диференціально-алгебраїчної крайової задачі для системи (17) використовуємо формулу (14); тут

$\check{\Gamma}\,(\psi(\cdot)) =$

$$= \frac{4}{\pi}\begin{pmatrix}
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4
\end{pmatrix},$$

при цьому умова (16) виконується:

$$\check{\mathcal{P}}_\psi \int\limits_a^b \check{\Phi}^*(t)\,\mathfrak{F}(t,\varphi(t))\,dt = 0.$$

Оскільки умову (16) виконано, отримуємо розв'язок 2π-періодичної матричної задачі для диференціально-алгебраїчної системи (17)

$$Z(t,\varphi(t)) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2\cos t \\ 0 & \sin t \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

який співпадає з розв'язком, одержаним у [4].

Запропонована у даній статті схема наближеного розв'язання матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) за допомогою методу найменших квадратів аналогічно [10, 24, 25] може бути перенесена на матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі в банахових просторах.

Література

1. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
2. *Деревенский В. П.* Матричные уравнения Бернулли. I // Изв. вузов. Математика. – 2008. – № 2. – С. 14 – 23.
3. *Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* A critical periodic boundary value problem for a matrix Riccati equations // Differ. Equ. – 2001. – **37**, № 4. – P. 464 – 471.
4. *Чуйко С. М.* Оператор Грина обобщенной матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи // Сиб. мат. журн. – 2015. – **56**, № 4. – С. 942 – 951; ***English translation:*** Sib. Math. J. – 2015. – **56**, № 4. – P. 752 – 760.
5. *Chuiko S. M.* A generalized matrix differential-algebraic equation // J. Math. Sci. (N.Y.). – 2015. – **210**, № 1. – P. 9 – 21.
6. *Campbell S. L.* Singular systems of differential equations // Research Notes in Mathematics (Book 40). – London; Melbourne; San Francisco: Pitman Publ., 1980. – 176 p.
7. *Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. – Новосибирск: Наука, 1996. – 280 с.
8. *Бояринцев Ю. Е., Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.
9. *Чистяков В. Ф., Щеглова А. А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. – Новосибирск: Наука, 2003. – 317 с.
10. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV + 317 p.
11. *Бойчук А. А., Шегда Л. М.* Вироджені нетерові крайові задачі // Нелін. коливання. – 2007. – **10**, № 3. – С. 303 – 312; ***English translation:*** Nonlinear Oscill. – 2007. – **10**, № 3. – P. 306 – 314.
12. *Чуйко С. М.* Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем // Комп. исследования и моделирование. – 2013. – **5**, № 5. – С. 769 – 783.
13. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
14. *Stanimirovic P. S.* On removing blur in images using least squares solutions // Filomat. – 2016. – **30**, № 14. – P. 3855 – 3866.
15. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 318 с.
16. *Chuiko S. M., Nesmelova O. V., Dzyuba M. V.* Метод найменших квадратів у теорії матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 2. – С. 280 – 292; ***English translation:*** Ukr. Math. J. – 2018. – **70**, № 2. – P. 319 – 333.

17. *Чуйко С. М., Старкова О. В.* О приближенном решении автономных краевых задач методом наименьших квадратов // Нелін. коливання. – 2009. – **12**, № 4. – С. 556 – 573; ***English translation:*** Nonlinear Oscill. – 2009. – **12**, № 4. – P. 574 – 591.

18. *Дзюба М. В.* Про наближене розв'язання матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті методом найменших квадратів // Праці Ін-ту прикл. проблем механіки і математики. – 2017. – **31**. – С. 46 – 53.

19. *Чуйко С. М.* Метод наименьших квадратов в теории некорректно поставленных линейных краевых задач с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**. – No 5. – С. 690 – 697; ***English translation:*** Ukr. Math. J. – 2010. – **62**. – No 5. – P. 794 – 803.

20. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 408 с.

21. *Кравчук М.* Вибрані математичні праці. – К.: Задруга; Нью-Йорк: [б.в.], 2002. – 792 с.

22. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – К.: Вища шк., 2000. – 296 с.

23. *Чуйко С. М.* Метод найменших квадратів в теорії некоректно поставлених крайових задач // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. – 2007. – № 7. – С. 51 – 53.

24. *Boichuk A. A.* Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations // Comput. Math. Math. Phys. – 2013. – **53**, № 6. – P. 777 – 788.

25. *Чуйко С. М.* О разрешимости матричной краевой задачи // Итоги науки и техники. Сер. "Совр. математика и ее прил.". – 2017. – **132**. – С. 139 – 143; ***English translation:*** J. Math. Sci. (N.Y.). – 2018. – **230**, № 5. – P. 794 – 798.

Одержано 13.06.19