

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РИТЦА К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СОПРЯЖЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Ю. В. Троценко

*Ин-т математики НАН Украины
ул. Терещенковская, 3, Киев, 01601, Украина
e-mail: trots@imath.kiev.ua*

We propose a variational method for the construction of an approximate solution of the spectral problem of nonaxially symmetric vibrations of two conjugate shells of revolution. The solution of the problem is based on the decomposition of the integration domain of equations of the theory of shells by using the variational method. We construct a generalized functional of shell displacements for which the conditions for conjugation of solutions on the adjacent boundary of the introduced subdomains are natural boundary conditions. For a shell consisting of a cut cone and a cylinder, the efficiency of the proposed approach is analyzed and the results of calculation are compared with existing data of other authors.

Запропоновано варіаційний метод побудови наближеного розв'язку спектральної задачі про неосесиметричні коливання двох спряжених оболонок обертання. Розв'язування задачі базується на декомпозиції області інтегрування рівнянь теорії оболонок із застосуванням варіаційного методу. Побудовано узагальнений функціонал відносно переміщень оболонки, для якого умови спряження розв'язків на суміжній границі введених підобластей є природними граничними умовами. Для оболонки, яка складається зі зрізаного конуса та циліндра, проаналізовано ефективність запропонованого підходу та наведено порівняння отриманих розрахунків із опублікованими даними інших авторів.

Введение. Тонкостенные конструкции в виде составных оболочек вращения широко используются в различных областях машиностроения и строительства сооружений. К ним можно отнести корпуса ракет и ракетных двигателей, элементы энергетического и транспортного машиностроения, а также наземные объекты на цилиндрических или конических опорах.

Исследование динамики таких механических систем под воздействием нестационарных нагрузок сводится к решению достаточно сложных начально-граничных задач в частных производных. Построение решений таких задач, как правило, базируется на сведениях их к системам обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат, характеризующих возмущенное движение рассматриваемой механической системы. Для эффективной реализации этого подхода необходимо знать собственные формы колебаний конструкции. Поэтому определение резонансных частот и форм колебаний составных оболочек вращения является первоочередной задачей в общем комплексе исследований их динамического поведения.

Развитие вычислительной техники обеспечило возможность широкого внедрения в расчетную практику численных методов решения рассматриваемых задач.

Для определения свободных колебаний составных оболочек вращения может быть использован метод численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с ортогонализацией решений в некоторых внутренних точках интервала

интегрирования [1, 2]. При определении собственных частот колебаний этим методом приходится многократно решать краевые задачи, задавая значения частот в определенном диапазоне.

При использовании метода конечных элементов (МКЭ) ширина кольцевых конечных элементов, на которые делится оболочка вращения, для обеспечения необходимой точности аппроксимации решений должна быть выбрана достаточно малой [3]. В результате для удлиненных тонкостенных конструкций система уравнений МКЭ имеет достаточно высокий порядок, что усложняет построение решения. Применение МКЭ для расчета колебаний составных оболочечных конструкций изложено в работах [4, 5].

Поскольку определение собственных колебаний конструкции является базовой задачей при исследовании ее динамического поведения под воздействием нестационарной нагрузки, то при выборе метода ее решения отдается предпочтение методам, имеющим аналитическую форму решения и обеспечивающим гарантированную точность вычислений.

Аналитическое решение задачи об определении резонансных частот системы “цилиндр – усеченный конус” в рамках уравнений оболочек теории Муштари – Доннелла – Власова и Флюге предложено в работе [6]. Метод степенных рядов для вычисления собственных частот сопряженных оболочек вращения использован в [7].

Применение метода Ритца для изучения колебаний составных оболочек не является тривиальной задачей, поскольку подсистемы конструкции описываются разными уравнениями и выполнение кинематических и силовых условий сопряжения на смежной границе представляет собой сложную проблему.

Модифицированный вариационный метод для анализа колебаний составных оболочек предложен в работах [8 – 10]. Метод базируется на объединении вариационного принципа с методом наименьших квадратов с подходящим выбором весовых коэффициентов. Для повышения точности решения задачи каждая оболочка, входящая в состав конструкции, дополнительно разбивается на конечное число элементов.

Данная работа посвящена применению метода Ритца к решению задачи о свободных колебаниях составных оболочек вращения, поставленной с позиций декомпозиции области определения искомых решений. Теоретической основой для развития данного метода является построенный в работе с помощью множителей Лагранжа обобщенный функционал, зависящий только от искомых решений и их производных. При этом условия сопряжения решений на смежной границе подобластей являются естественными граничными условиями для этого функционала.

1. Постановка задачи. Рассматриваются неосесимметричные свободные колебания двух соосно расположенных тонкостенных оболочек вращения разной геометрии, которые сопряжены между собой вдоль некоторой параллели. Предполагается, что на линии сопряжения геометрические характеристики составной оболочки терпят разрыв первого рода. Это может быть разрыв угла между касательной к меридиану и осью вращения оболочки или разрыв кривизны меридиана. Также полагается, что элементы оболочечной системы выполнены из изотропного материала с плотностью ρ и имеют постоянную толщину h . Упругие свойства оболочки характеризуются модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Будем предполагать, что составная оболочка ограничена двумя параллелями L_1 и L_2 . В качестве криволинейных координат для произвольной точки срединной поверхности оболочки выберем длину дуги меридиана s , отсчитываемую от некоторой начальной параллели $s = s_1$, и угол β , определяющий положение точки на соответствующей параллели. Обозначим через R_1 радиус кривизны меридиана, а через $r = r(s)$ — расстояние от

точки меридиана до оси вращения. Второй радиус кривизны R_2 равен длине отрезка нормали к срединной поверхности от этой поверхности к оси вращения оболочки. Проекции перемещения точек срединной поверхности на положительные направления меридиана и параллели, а также внешнюю нормаль к поверхности оболочки обозначим соответственно через u , v и w .

В дальнейшем будем пользоваться основными положениями теории тонких оболочек Муштары – Доннелла – Власова [11], которая является наиболее простой и позволяет проводить расчеты для ряда оболочек с удовлетворительной точностью. При установившихся гармонических колебаниях оболочки с частотой ω для асимметричной формы деформации ее срединной поверхности перемещения u , v и w можно искать в следующем виде:

$$u(s, \beta, t) = u(s) \cos(n\beta) \exp^{i\omega t}, \quad v(s, \beta, t) = v(s) \sin(n\beta) \exp^{i\omega t},$$

$$w(s, \beta, t) = w(s) \cos(n\beta) \exp^{i\omega t}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где n — число волн упругой поверхности оболочки в окружном направлении.

Введем в рассмотрение безразмерные величины (обозначенные черточкой сверху), которые связаны с соответствующими размерными величинами следующим образом:

$$\{T_1, S, \tilde{Q}_1\} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \{\bar{T}_1, \bar{S}, \bar{Q}_1\}, \quad \{M_1, H\} = \frac{EhR_0}{(1-\nu^2)} \{\bar{M}_1, \bar{H}\}$$

$$\{u, v, w\} = R_0 \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}, \quad \lambda^2 = \frac{(1-\nu^2) \rho R_0^2 \omega^2}{E},$$

где T_1 , S и \tilde{Q}_1 — меридиональная, сдвигающая и обобщенная поперечная сила; M_1 и H — изгибающий и крутящий моменты; R_0 — некоторый характерный размер оболочки. В дальнейшем черточку над безразмерными величинами будем опускать.

Безразмерные усилия и моменты, действующие в срединной поверхности оболочки, связаны с ее перемещениями по следующим формулам:

$$T_1 = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1} + \nu \left(\frac{n}{r} v + \frac{r'}{r} u + \frac{w}{R_2} \right), \quad S = \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{dv}{ds} - \frac{r'}{r} v - \frac{n}{r} u \right),$$

$$M_1 = -c^2 \left[\frac{d^2 w}{ds^2} + \nu \left(\frac{r'}{r} \frac{dw}{ds} - \frac{n^2}{r^2} w \right) \right], \quad \tilde{Q}_1 = -c^2 \left[\frac{d}{ds} \Delta w - \frac{(1-\nu)n^2}{r^2} \left(\frac{dw}{ds} - \frac{r'}{r} w \right) \right], \quad (1)$$

$$\Delta w = \frac{1}{r} \frac{d}{ds} \left(r \frac{dw}{ds} \right) - \frac{n^2}{r^2} w, \quad c^2 = \frac{h^2}{12R_0^2}, \quad H = c^2(1-\nu) \left(\frac{n}{r} \frac{dw}{ds} - \frac{r'n}{r^2} w \right).$$

Определение вектор-функций $\bar{u}^{(k)} = \{u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}\}^T$ и частот свободных колебаний составной оболочки сводится к интегрированию двух однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка с переменными коэффициентами:

$$\mathfrak{A}^{(k)} \left(\bar{u}^{(k)} \right) = \mathcal{A}^{(k)} \bar{u}^{(k)} - \lambda^2 \bar{u}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (2)$$

где

$$\mathcal{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} L_{11}^{(k)} & L_{12}^{(k)} & L_{13}^{(k)} \\ L_{21}^{(k)} & L_{22}^{(k)} & L_{23}^{(k)} \\ L_{31}^{(k)} & L_{32}^{(k)} & L_{33}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Явные выражения для дифференциальных операторов $L_{ij}^{(k)}$, $k = 1, 2$, $i, j = 1, 2, 3$, приведены в работе [11].

Здесь и в дальнейшем верхний индекс $k = 1, 2$ при функциях и операторах обозначает соответствующие величины, относящиеся к первой или второй оболочке. Системы уравнений (2) при $k = 1$ и $k = 2$ имеют одинаковую структуру и отличаются друг от друга только коэффициентами. Первой оболочке соответствует область изменения независимой переменной s , $G^{(1)} = [s_1, s_0]$, а второй — $G^{(2)} = [s_0, s_2]$.

К уравнениям (2) следует добавить граничные условия, выражающие условия закрепления торцов составной оболочки. Помимо этих условий необходимо еще выполнить условия сопряжения решений на смежной границе первой и второй оболочки. При формулировании этих условий необходимо учитывать, что силы и перемещения для разных частей составной оболочки рассчитываются в локальных системах координат. Наиболее простые условия сопряжения можно получить на основе проектирования ортов первой оболочки на орты второй оболочки. При этом условия сопряжения при $s = s_0$ для перемещений оболочки принимают вид

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= u^{(1)} \cos \psi - w^{(1)} \sin \psi, & w^{(2)} &= u^{(1)} \sin \psi + w^{(1)} \cos \psi, \\ v^{(2)} &= v^{(1)}, & \frac{dw^{(2)}}{ds} &= \frac{dw^{(1)}}{ds}. \end{aligned} \quad (3)$$

В свою очередь, силовые условия сопряжения при $s = s_0$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} T_1^{(2)} &= T_1^{(1)} \cos \psi - \tilde{Q}_1^{(1)} \sin \psi, & \tilde{Q}_1^{(2)} &= T_1^{(1)} \sin \psi + \tilde{Q}_1^{(1)} \cos \psi, \\ S^{(2)} &= S^{(1)}, & M_1^{(2)} &= M_1^{(1)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\psi = \theta^{(2)}(s_0) - \theta^{(1)}(s_0)$, $\theta^{(1)}(s_0)$ и $\theta^{(2)}(s_0)$ — углы, образованные нормалью к срединной поверхности и осью вращения первой и второй оболочки в точке $s = s_0$ соответственно.

Таким образом, при решении задачи о собственных колебаниях составных оболочек помимо граничных условий на торцах необходимо выполнить еще восемь достаточно сложных условий сопряжения (3) и (4). Это существенно усложняет построение ее решений по сравнению с решением соответствующей спектральной задачи для оболочки с непрерывно изменяющимся меридианом.

Далее предлагается приближенный метод решения рассматриваемой задачи, который базируется на ее эквивалентной вариационной формулировке. Этот метод ранее успешно применялся для решения одномерных и двумерных задач сопряжения [12, 13].

2. Построение обобщенного функционала. Для определенности будем считать, что при $s = s_1$ торец оболочки свободен и при $s = s_2$ — жестко закреплен. Тогда граничные условия принимают вид

$$\left(u = v = w = \frac{dw}{ds} \right)_{s=s_2} = 0, \quad (5)$$

$$\left(T_1 = S = \tilde{Q}_1 = M_1 \right)_{s=s_1} = 0. \quad (6)$$

Вариационную формулировку исходной спектральной задачи можно получить из принципа возможных перемещений Лагранжа в сочетании с принципом Д'Аламбера. В результате задача сводится к отысканию стационарных значений для функционала $I(\vec{u})$

$$I(\vec{u}) = \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} F^{(k)}(\vec{u}^{(k)}) dG^{(k)} \quad (7)$$

на классе функций, подчиненных граничным условиям (3) – (6). В дальнейшем предполагается, что в каждой из введенных подобластей поле перемещений, усилий и моментов обладает свойством непрерывности и дифференцируемости.

С учетом интегрирования по частям вариацию от функционала (7) на классе функций, удовлетворяющих граничным условиям (5), можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta I = & \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} \bar{\mathfrak{L}}^{(k)}(\vec{u}^{(k)}) \delta(\vec{u}^{(k)}) dG^{(k)} + \\ & + \left(T_1^{(1)} \delta u^{(1)} + S^{(1)} \delta v^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(1)} \delta w^{(1)} - M_1^{(1)} \frac{d\delta w^{(1)}}{ds} \right)_{s=s_0} - \\ & - \left(T_1^{(2)} \delta u^{(2)} + S^{(2)} \delta v^{(2)} + \tilde{Q}_1^{(2)} \delta w^{(2)} - M_1^{(2)} \frac{d\delta w^{(2)}}{ds} \right)_{s=s_0} + \\ & + \left(T_1^{(2)} \delta u^{(2)} + S^{(2)} \delta v^{(2)} + \tilde{Q}_1^{(2)} \delta w^{(2)} - M_1^{(2)} \frac{d\delta w^{(2)}}{ds} \right)_{s=s_1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Приравнявая выражение (8) к нулю получим вариационное уравнение для определения функций $\vec{u}^{(k)}$ в областях $\vec{G}^{(k)}$. В силу произвольности варьирования функций $\vec{u}^{(k)}$ в областях $\vec{G}^{(k)}$ и на границе при $s = s_1$ из этого уравнения следует, что в пределах каждой из введенных подобластей должны выполняться уравнения (2) и граничные условия (6) при $s = s_1$.

Если предположить, что класс допустимых функций подчинен кинематическим условиям сопряжения (3) при $s = s_0$, то можно показать, что условия (4) являются естественными граничными условиями для функционала (7). Таким образом при применении метода Ритца для решения вариационного уравнения $\delta I = 0$, аппроксимации для функций $u^{(k)}$, $v^{(k)}$ и $w^{(k)}$ должны выбираться таким образом, чтобы они обеспечивали выполнение условий (3), что представляет собой в общем случае достаточно сложную самостоятельную задачу. В связи с этим возникает задача о преобразовании функционала (7) в такой обобщенный функционал, для которого условия сопряжения (3) и (4) были бы естественными условиями. Теория преобразования вариационных задач создана уже давно [14, 15], но в литературе известны лишь немногие примеры ее применения к задачам теории оболочек.

Граничные условия (3) можно рассматривать как дополнительные ограничения на задачу о нахождении стационарных значений функционала (7). Исключить их из рассмотрения можно с помощью множителей Лагранжа. В соответствии с этим введем в рассмотрение расширенный функционал, который имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_1(\vec{u}) = I(\vec{u}) + \left[\alpha_1 \left(u^{(1)} \cos \psi - w^{(1)} \sin \psi - u^{(2)} \right) + \alpha_2 \left(v^{(1)} - v^{(2)} \right) + \right. \\ \left. + \alpha_3 \left(u^{(1)} \sin \psi + w^{(1)} \cos \psi - w^{(2)} \right) + \alpha_4 \left(\frac{dw^{(1)}}{ds} - \frac{dw^{(2)}}{ds} \right) \right]_{s=s_0}, \quad (9) \end{aligned}$$

где α_i — множители Лагранжа, подлежащие определению в дальнейшем.

Преобразование функционала (7) в функционал (9) достигнуто ценой увеличения количества неизвестных исходной задачи, что затрудняет построение решений. Эту задачу можно существенно упростить, если предварительно найти явные выражения для множителей Лагранжа в терминах исходных неизвестных \vec{u} . С этой целью выпишем первую вариацию функционала (9) при свободном варьировании функций $\vec{u}^{(k)}$, $k = 1, 2$, и постоянных α_i , $i = \overline{1, 4}$. Из этой вариации выпишем только внеинтегральные члены при $s = s_0$. При этом будем иметь

$$\begin{aligned} \left\{ \left[\delta\alpha_1 \left(u^{(1)} \cos \psi - w^{(1)} \sin \psi - u^{(2)} \right) + \delta\alpha_2 \left(v^{(1)} - v^{(2)} \right) + \right. \right. \\ \left. + \delta\alpha_3 \left(u^{(1)} \sin \psi + w^{(1)} \cos \psi - w^{(2)} \right) + \delta\alpha_4 \left(\frac{dw^{(1)}}{ds} - \frac{dw^{(2)}}{ds} \right) + \right. \\ \left. + \left(\alpha_1 \cos \psi + T_1^{(1)} + \alpha_3 \sin \psi \right) \delta u^{(1)} - \left(\alpha_1 + T_1^{(2)} \right) \delta u^{(2)} + \right. \\ \left. + \left(S^{(1)} + \alpha_2 \right) \delta v^{(1)} - \left(\alpha_2 + S^{(2)} \right) \delta v^{(2)} + \left(\alpha_3 \cos \psi - \alpha_1 \sin \psi + \tilde{Q}_1^{(1)} \right) \delta w^{(1)} - \right. \\ \left. - \left(\alpha_3 + \tilde{Q}_1^{(2)} \right) \delta w^{(2)} + \left(\alpha_4 - M_1^{(1)} \right) \frac{d\delta w^{(1)}}{ds} + \left(M_1^{(2)} - \alpha_4 \right) \frac{d\delta w^{(2)}}{ds} \right] \times r \Bigg\}_{s=s_0}. \quad (10) \end{aligned}$$

Если функционал (9) принимает стационарные значения для произвольных вариаций $\delta\vec{u}^{(k)}$, $\frac{d\delta w^{(k)}}{ds}$, $k = 1, 2$, и $\delta\alpha_i$, $i = \overline{1, 4}$, то из выражения (10) после ряда тождественных преобразований можно установить следующие формулы для множителей Лагранжа:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = -\frac{1}{2} \left[T_1^{(1)} \cos \psi - \tilde{Q}_1^{(1)} \sin \psi + T_1^{(2)} \right]_{s=s_0}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} \left[S^{(1)} + S^{(2)} \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_3 = -\frac{1}{2} \left[\tilde{Q}_1^{(1)} \cos \psi + T_1^{(1)} \sin \psi + \tilde{Q}_1^{(2)} \right]_{s=s_0}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2} \left[M_1^{(1)} + M_1^{(2)} \right]_{s=s_0}. \quad (11) \end{aligned}$$

Полученные соотношения (11) позволяют теперь сформулировать обобщенный функционал $\Pi(\vec{u})$, заменив в функционале (9) множители Лагранжа α_i соответственно равными им величинами (11). Граничные условия (3), (4) и (6) являются естественными граничными условиями для функционала $\Pi(\vec{u})$, так как они автоматически выполняются для функций, доставляющих ему стационарные значения.

3. Построение систем координатных функций и алгебраических систем. Сформулированный обобщенный функционал позволяет проводить независимое варьирование функций $u^{(k)}(s)$, $v^{(k)}(s)$ и $w^{(k)}(s)$ в подобластях $G^{(k)}$, $k = 1, 2$. В соответствии с методом Ритца представим искомые функции в виде следующих отрезков обобщенных рядов:

$$u^{(k)}(s) = \sum_{j=1}^N a_j^{(k)} U_j^{(k)}(s), \quad v^{(k)}(s) = \sum_{j=1}^N b_j^{(k)} V_j^{(k)}(s), \quad w^{(k)}(s) = \sum_{j=1}^N c_j^{(k)} W_j^{(k)}(s). \quad (12)$$

Здесь $a_j^{(k)}$, $b_j^{(k)}$ и $c_j^{(k)}$, $k = 1, 2$, — произвольные постоянные, подлежащие определению в дальнейшем, $\{U_j^{(k)}(s), V_j^{(k)}(s), W_j^{(k)}(s)\}$ — системы координатных функций, которые определены в подобластях $G^{(k)}$.

Для незамкнутых в меридиональном направлении составных оболочек коэффициенты исходных уравнений являются аналитическими функциями в некоторой области. В соответствии с теорией дифференциальных уравнений регулярные решения таких уравнений могут быть представлены в виде разложений в степенные ряды, которые сходятся в этой же области. Следовательно систему базисных функций для метода Ритца можно построить на классе степенных функций. Такая система координатных функций может быть использована для построения приближенного решения при небольшом количестве базисных элементов. В противном случае существенно возрастают ошибки округления как при определении алгебраической системы, так и при ее решении, что приводит к потере устойчивости вычислительного процесса. В существенной мере избежать этих проблем можно заменив степенные функции полиномами Лежандра $P_n(y)$ первого рода с неотрицательными целыми индексами, абсолютные значения которых не возрастают на отрезке ортогональности $[-1, 1]$ с увеличением их порядка. Для аппроксимации функций на отрезке $[a, b]$ необходимо ввести преобразование сегмента $[-1, 1]$ на сегмент $[a, b]$. Линейное преобразование этих сегментов при $y \in [-1, 1]$ и $x \in [a, b]$ осуществляется по формуле $2x = (b - a)y + a + b$.

При принятых выше условиях закрепления торцов составной оболочки системы координатных функций, удовлетворяющих главным граничным условиям задачи (5), принимают вид

$$U_j^{(1)} = V_j^{(1)} = W_j^{(1)} = P_j(y), \quad y = \frac{2s}{s_0 - s_1} - \frac{s_1 + s_0}{s_0 - s_1},$$

$$U_j^{(2)} = V_j^{(2)} = (s_2 - s)P_j(x), \quad W_j^{(2)} = (s_2 - s)^2 P_j(x), \quad x = \frac{2(s - s_2)}{s_2 - s_0} + 1,$$

где $P_j(z)$ — смещенные на единицу по индексу j многочлены Лежандра.

Вычисление многочленов Лежандра и их производных можно проводить с помощью известных рекуррентных соотношений. Введенные системы базисных функций являются линейно независимыми и полными системами функций, и они обеспечивают устойчивость вычислительного процесса при большом числе членов N в разложениях (12).

Из условий стационарности обобщенного функционала получаем однородную систему алгебраических уравнений

$$(A - \lambda^2 B) \vec{X}^T = 0,$$

где

$$\vec{X} = \left\{ a_1^{(1)}, \dots, a_N^{(1)}, b_1^{(1)}, \dots, b_N^{(1)}, c_1^{(1)}, \dots, c_N^{(1)}, a_1^{(2)}, \dots, a_N^{(2)}, b_1^{(2)}, \dots, b_N^{(2)}, c_1^{(2)}, \dots, c_N^{(2)} \right\}.$$

Представим матрицу A в виде суммы двух матриц

$$A = A^{(1)} + A^{(2)},$$

где элементы матрицы $A^{(1)}$ образованы из необходимых условий экстремума функционала $I(\vec{u})$ (7), а элементы матрицы $A^{(2)}$ обусловлены наличием в обобщенном функционале дополнительных членов с множителями Лагранжа.

В связи со сложным видом выражений для $F^{(k)}(\vec{u}^{(k)})$ в функционале (7), построение элементов матрицы $A^{(1)}$ не является простой задачей и приводит к их достаточно громоздким формулам, что делает алгоритм неудобным в его реализации. Чтобы избежать этих трудностей предлагается строить алгебраическую систему исходя из вариации функционала I , которая представляется в следующем виде

$$\begin{aligned} \delta I = \int_{s_1}^{s_2} & \left[\Psi_{11}(u, \delta u) + \Psi_{12}(v, \delta v) + \Psi_{13}(w, \delta w) + \Psi_{12}(\delta v, u) + \Psi_{22}(v, \delta v) + \Psi_{23}(w, \delta w) + \right. \\ & \left. + \Psi_{13}(\delta w, u) + \Psi_{23}(\delta w, v) + \Psi_{33}(w, \delta w) \right] r ds - \lambda^2 \int_{s_1}^{s_2} (u \delta u + v \delta v + w \delta w) r ds. \end{aligned} \quad (13)$$

Введенные здесь операторы $\Psi_{ij}(p, q)$ для произвольной оболочки вращения определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(p, q) &= \left(\frac{\cos^2 \theta}{r^2} + \frac{\nu_1 n^2}{r^2} \right) pq + \left(\frac{dp}{ds} + \frac{\nu \cos \theta}{r} p \right) \frac{dq}{ds} + \frac{\nu \cos \theta}{r} \frac{dp}{ds} q, \\ \Psi_{12}(p, q) &= \left(\frac{n \cos \theta}{r^2} + \frac{\nu_1 n \cos \theta}{r^2} \right) pq + \frac{\nu n}{r} p \frac{dq}{ds} - \frac{\nu_1 n}{r} q \frac{dp}{ds}, \\ \Psi_{13}(p, q) &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu \sin \theta}{r} \right) p \frac{dq}{ds} + \left(\frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} + \frac{\nu \cos \theta}{r R_1} \right) pq, \\ \Psi_{22}(p, q) &= \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{\nu_1 \cos^2 \theta}{r^2} \right) pq + \left(\nu_1 \frac{dp}{ds} - \frac{\nu_1 \cos \theta}{r} p \right) \frac{dq}{ds} - \frac{\nu_1 \cos \theta}{r} \frac{dp}{ds} q, \\ \Psi_{23}(p, q) &= \left(\frac{n \sin \theta}{r^2} + \frac{\nu n}{r R_1} \right) pq, \\ \Psi_{33}(p, q) &= c^2 \left[\frac{d^2 p}{ds^2} \frac{d^2 q}{ds^2} + \frac{\nu \cos \theta}{r} \left(\frac{d^2 p}{ds^2} \frac{dq}{ds} + \frac{d^2 q}{ds^2} \frac{dp}{ds} \right) - \frac{\nu n^2}{r^2} \left(\frac{d^2 p}{ds^2} q + \frac{d^2 q}{ds^2} p \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\cos^2 \theta + 2(1 - \nu)n^2}{r^2} \frac{dp}{ds} \frac{dq}{ds} - \frac{n^2 \cos \theta (3 - 2\nu)}{r^3} \left(\frac{dq}{ds} p + \frac{dp}{ds} q \right) \right] + \\ & + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} + \frac{2\nu \sin \theta}{r R_1} + \frac{c^2 n^4 + 2(1 - \nu)c^2 n^2 \cos^2 \theta}{r^4} \right) pq, \end{aligned}$$

где $\nu_1 = (1 - \nu)/2$, p и q — произвольные, достаточное число раз дифференцируемые функции, $\theta = \theta(s)$ — угол между нормалью к срединной поверхности оболочки и ее осью вращения.

Используя выражение (13), для элементов матрицы $A^{(1)}$ можно получить компактные и удобные для программирования формулы. Так, вычисляя, например, частную производную $\frac{\partial I}{\partial a_i^{(1)}}$, положим в (13) $\delta u = U_i^{(1)}$, $\delta v = 0$, $\delta w = 0$. При этом получим первые N уравнений относительно вектора \vec{X} . Аналогично действуем и при вычислении частных производных от функционала I по другим переменным. Ненулевые элементы верхней части относительно главной диагонали симметричной матрицы $A^{(1)}$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^{(1)} &= \int_{s_1}^{s_0} \Psi_{11} \left(U_j^{(1)}, U_i^{(1)} \right) r ds, & \alpha_{i+N, j+N}^{(1)} &= \int_{s_1}^{s_0} \Psi_{22} \left(V_j^{(1)}, V_i^{(1)} \right) r ds, \\ \alpha_{i+2N, j+2N}^{(1)} &= \int_{s_1}^{s_0} \Psi_{33} \left(W_j^{(1)}, W_i^{(1)} \right) r ds, & i &= \overline{1, N}, \quad j = i, \\ \alpha_{i, j+N}^{(1)} &= \int_{s_1}^{s_0} \Psi_{12} \left(V_j^{(1)}, U_i^{(1)} \right) r ds, & \alpha_{i, j+2N}^{(1)} &= \int_{s_1}^{s_0} \Psi_{13} \left(W_j^{(1)}, U_i^{(1)} \right) r ds, \\ \alpha_{i+N, j+2N}^{(1)} &= \int_{s_1}^{s_0} \Psi_{23} \left(W_j^{(1)}, V_i^{(1)} \right) r ds, & i, j &= \overline{1, N}. \end{aligned} \tag{14}$$

Формулы для коэффициентов

$$\alpha_{i+3N, j+3N}^{(1)}, \alpha_{i+3N, j+4N}^{(1)}, \alpha_{i+3N, j+5N}^{(1)}, \alpha_{i+4N, j+4N}^{(1)}, \alpha_{i+4N, j+5N}^{(1)}, \alpha_{i+5N, j+5N}^{(1)}$$

можно получить из формул (3) после соответствующей замены в них функций $U_k^{(1)}$, $V_k^{(1)}$, $W_k^{(1)}$ на функции $U_k^{(2)}$, $V_k^{(2)}$, $W_k^{(2)}$ и пределов интегрирования от s_0 до s_2 . Остальные коэффициенты равны нулю.

Элементы $\alpha_{ij}^{(2)}$ верхней части относительно главной диагонали симметричной матрицы $A^{(2)}$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha_{i, j}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[T_1^{(1)} \left(U_i^{(1)}, 0, 0 \right) U_j^{(1)} + T_1^{(1)} \left(U_j^{(1)}, 0, 0 \right) U_i^{(1)} \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_{i, j+N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[T_1^{(1)} \left(0, V_j^{(1)}, 0 \right) U_i^{(1)} + S^{(1)} \left(U_i^{(1)}, 0 \right) V_j^{(1)} \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_{i, j+2N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[T_1^{(1)} \left(0, 0, W_j^{(1)} \right) U_i^{(1)} \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_{i, j+3N}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[T_1^{(1)} \left(U_i^{(1)}, 0, 0 \right) U_j^{(2)} - T_1^{(2)} \left(U_j^{(2)}, 0, 0 \right) U_i^{(1)} \right] \cos \psi \Big|_{s=s_0}, \\ \alpha_{i, j+4N}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[S^{(1)} \left(U_i^{(1)}, 0 \right) V_j^{(2)} - T_1^{(2)} \left(0, V_j^{(2)}, 0 \right) U_i^{(1)} \cos \psi \right]_{s=s_0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j+5N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[T_1^{(2)}(0, 0, W_j^{(2)}) U_i^{(1)} \cos \psi + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{Q}_1^{(2)}(W_j^{(2)}) U_i^{(1)} \sin \psi - T_1^{(1)}(U_i^{(1)}, 0, 0) W_j^{(2)} \sin \psi \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_{i+N,j+N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[S^{(1)}(0, V_i^{(1)}) V_j^{(1)} + S^{(1)}(0, V_j^{(1)}) V_i^{(1)} \right]_{s=s_0}, \quad \alpha_{i+N,j+2N}^{(2)} = 0, \\ \alpha_{i+N,j+3N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[S^{(2)}(U_j^{(2)}, 0) V_i^{(1)} - T_1^{(1)}(0, V_i^{(1)}, 0) U_j^{(2)} \cos \psi \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_{i+N,j+4N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[S^{(2)}(0, V_j^{(2)}) V_i^{(1)} - S^{(1)}(0, V_i^{(1)}) V_j^{(2)} \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_{i+N,j+5N}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[T_1^{(1)}(0, V_i^{(1)}, 0) W_j^{(2)} \sin \psi \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_{i+2N,j+2N}^{(2)} &= -\frac{1}{2} \left[\tilde{Q}_1^{(1)}(W_i^{(1)}) W_j^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(1)}(W_j^{(1)}) W_i^{(1)} - \right. \\ &\quad \left. - M_1^{(1)}(W_i^{(1)}) \frac{dW_j^{(1)}}{ds} - M_1^{(1)}(W_j^{(1)}) \frac{dW_i^{(1)}}{ds} \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_{i+2N,j+3N}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[T_1^{(1)}(0, 0, W_i^{(1)}) U_j^{(2)} \cos \psi - \right. \\ &\quad \left. - (\tilde{Q}_1^{(1)}(W_i^{(1)}) U_j^{(2)} - T_1^{(2)}(U_j^{(2)}, 0, 0) W_i^{(1)}) \sin \psi \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_{i+2N,j+4N}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[T_1^{(2)}(0, V_j^{(2)}, 0) W_i^{(1)} \sin \psi \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_{i+2N,j+5N}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[T_1^{(2)}(0, 0, W_j^{(2)}) W_i^{(1)} + T_1^{(1)}(0, 0, W_i^{(1)}) W_j^{(2)} \right] \sin \psi + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\tilde{Q}_1^{(1)}(W_i^{(1)}) W_j^{(2)} - \tilde{Q}_1^{(2)}(W_j^{(2)}) W_i^{(1)} \right] \cos \psi - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[M_1^{(1)}(W_i^{(1)}) \frac{dW_j^{(2)}}{ds} - M_1^{(2)}(W_j^{(2)}) \frac{dW_i^{(1)}}{ds} \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_{i+3N,j+3N}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[T_1^{(2)}(U_i^{(2)}, 0, 0) U_j^{(2)} + T_1^{(2)}(U_j^{(2)}, 0, 0) U_i^{(2)} \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_{i+3N,j+4N}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[T_1^{(2)}(0, V_j^{(2)}, 0) U_i^{(2)} + S^{(2)}(U_i^{(2)}, 0) V_j^{(2)} \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_{i+3N,j+5N}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[T_1^{(2)}(0, 0, W_j^{(2)}) U_i^{(2)} \right]_{s=s_0}, \\ \alpha_{i+4N,j+4N}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[S^{(2)}(0, V_i^{(2)}) V_j^{(2)} + S^{(2)}(0, V_j^{(2)}) V_i^{(2)} \right]_{s=s_0}, \quad \alpha_{i+4N,j+5N}^{(2)} = 0, \end{aligned}$$

$$\alpha_{i+5N, j+5N} = \frac{1}{2} \left[\tilde{Q}_1^{(2)}(W_i^{(2)}) W_j^{(2)} + \tilde{Q}_1^{(2)}(W_j^{(2)}) W_i^{(2)} - \right. \\ \left. - M_1^{(2)}(W_i^{(2)}) \frac{dW_j^{(2)}}{ds} - M_1^{(2)}(W_j^{(2)}) \frac{dW_i^{(2)}}{ds} \right]_{s=s_0}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (15)$$

Введенные в выражениях (15) функции $T_1^{(i)}(p, q, f)$, $S^{(i)}(p, q)$, $M_1^{(i)}(f)$ и $\tilde{Q}_1^{(i)}(f)$, $i = 1, 2$, определяются по формулам (1). При этом, если в функциях один из аргументов полагается равным нулю, то подразумевается, что и соответствующие производные тождественно равны нулю.

Элементы b_{ij} симметричной матрицы B вычисляются по формулам

$$b_{ij} = \int_{s_1}^{s_0} U_i^{(1)} U_j^{(1)} r ds, \quad b_{i+N, j+N} = \int_{s_1}^{s_0} V_i^{(1)} V_j^{(1)} r ds, \\ b_{i+2N, j+2N} = \int_{s_1}^{s_0} W_i^{(1)} W_j^{(1)} r ds, \quad b_{i+3N, j+3N} = \int_{s_0}^{s_2} U_i^{(2)} U_j^{(2)} r ds, \\ b_{i+4N, j+4N} = \int_{s_0}^{s_2} V_i^{(2)} V_j^{(2)} r ds, \quad b_{i+5N, j+5N} = \int_{s_0}^{s_2} W_i^{(2)} W_j^{(2)} r ds, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Остальные коэффициенты матрицы B равны нулю.

Приведенные выше формулы для элементов матриц A и B справедливы для технической теории оболочек. Однако не составляет особого труда применить аналогичный алгоритм для любого варианта теории оболочек так как изменения коснутся лишь операторов $\Psi_{i,j}$ и выражений для усилий и моментов, действующих в срединной поверхности оболочки. Все остальные формулы останутся без изменений.

4. Некоторые результаты расчетов. Приведем результаты расчетов частот, форм собственных колебаний, усилий и моментов, возникающих в срединной поверхности конкретной составной оболочки по предложенному выше алгоритму.

Рассмотрим конструкцию, состоящую из усеченной конической оболочки и соосно сопряженной с ней цилиндрической оболочкой. Пусть l_2 и R_0 — длина и радиус цилиндрической, а r_0 и α — радиус срезанного торца и угол полураствора конической оболочек соответственно. Предполагается, что обе оболочки имеют одинаковую толщину h . В качестве характерного линейного размера выберем радиус цилиндрической оболочки R_0 . Коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Параметр $\delta = R_0/h$, характеризующий толщину оболочки, в дальнейшем будем варьировать.

Выберем следующие безразмерные геометрические параметры конструкции: $l_2 = 1$, $r_0 = 0,4226$, $\alpha = 30^\circ$. Предполагается, что край конической оболочки при $s = s_1$ свободен, а край цилиндрической оболочки при $s = s_2$ жестко закреплен. В табл. 1 приведены значения первых пяти собственных значений λ_i при числе волн в окружном направлении $n = 1$ в зависимости от числа приближений N в разложениях (12). Сравнение данных этой таблицы при $\delta = 100$ с результатами предыдущих исследований [6, 7, 10] свидетельствует об их полном соответствии.

Табл. 1. Значения частот λ_i колебаний составной оболочки в зависимости от числа приближений N в разложениях (12)

N	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
$\delta = 100$					
6	.3000289	.7084596	.8115446	.9328656	.9914872
8	.2938229	.6413195	.8114776	.9316673	.9555952
10	.2929439	.6359227	.8114753	.9316009	.9529279
12	.2929350	.6358722	.8114745	.9315879	.9522254
14	.2929327	.6358630	.8114744	.9315870	.9522030
16	.2929327	.6358629	.8114744	.9315870	.9522028
18	.2929327	.6358629	.8114744	.9315870	.9522027
20	.2929327	.6358629	.8114744	.9315870	.9522027
$\delta = 1000$					
12	.2745943	.5093951	.8093994	.8807276	.9178388
14	.2645987	.4865509	.8093876	.8788393	.9171672
16	.2623339	.4827320	.8093871	.8781308	.9167650
18	.2620999	.4824745	.8093869	.8778745	.9159623
20	.2620858	.4824363	.8093869	.8778396	.9158720
22	.2620730	.4824134	.8093869	.8778302	.9158106
24	.2620705	.4824114	.8093869	.8778290	.9158035
26	.2620704	.4824113	.8093869	.8778289	.9158028
28	.2620704	.4824113	.8093869	.8778289	.9158026
30	.2620704	.4824113	.8093869	.8778289	.9158026
$\delta = 2000$					
20	.2448188	.4506320	.8092686	.8657443	.8951632
22	.2447481	.4505838	.8092685	.8657267	.8950180
24	.2447288	.4505527	.8092685	.8657001	.8947864
26	.2447140	.4505372	.8092685	.8656993	.8947726
28	.2447106	.4505352	.8092685	.8656983	.8947596
30	.2447104	.4505351	.8092685	.8656983	.8947591
32	.2447104	.4505351	.8092685	.8656983	.8947588
34	.2447104	.4505351	.8092685	.8656983	.8947587
36	.2447104	.4505351	.8092685	.8656983	.8947587

Предельные значения кинематических параметров и силовых факторов для первой формы колебаний составной оболочки при подходе справа и слева к точке $s = s_0$ при разном количестве членов N в разложениях Ритца приведены в табл. 2 и 3. Так $u(s_0 + 0) = [u^{(1)} \cos \psi - w^{(1)} \sin \psi]_{s=s_0}$ — верхняя строка и $u(s_0 - 0) = u^{(2)}(s_0)$ — нижняя строка. В соответствии с условиями сопряжения (3) и (4) вводятся аналогичные обозначения и для

Табл. 2. Выполнение кинематических условий сопряжения (3) для первой формы колебаний составной оболочки в зависимости от числа приближений N в разложениях (12)

N	$u(s_0 \pm 0)$	$v(s_0 \pm 0)$	$w(s_0 \pm 0)$	$dw/ds _{s_0 \pm 0}$
$\delta = 100$				
10	.1990179E+00 .1990136E+00	-.6023953E+00 -.6023669E+00	.1021936E+01 .1021810E+01	-.4626239E+00 -.4813238E+00
14	.1985777E+00 .1985759E+00	-.6009961E+00 -.6009966E+00	.1019838E+01 .1019848E+01	-.4689842E+00 -.4701514E+00
18	.1985786E+00 .1985786E+00	-.6010018E+00 -.6010018E+00	.1019853E+01 .1019853E+01	-.4695714E+00 -.4695689E+00
22	.1985786E+00 .1985786E+00	-.6010018E+00 -.6010018E+00	.1019853E+01 .1019853E+01	-.4695701E+00 -.4695702E+00
26	.1985786E+00 .1985786E+00	-.6010018E+00 -.6010018E+00	.1019853E+01 .1019853E+01	-.4695702E+00 -.4695702E+00
$\delta = 1000$				
26	.1588462E+00 .1588471E+00	-.4277903E+00 -.4277903E+00	.1434574E+01 .1434570E+01	-.1550980E+00 -.1460247E+00
30	.1588467E+00 .1588467E+00	-.4277904E+00 -.4277904E+00	.1434573E+01 .1434573E+01	-.1505039E+00 -.1506676E+00
34	.1588467E+00 .1588467E+00	-.4277904E+00 -.4277904E+00	.1434573E+01 .1434573E+01	-.1505833E+00 -.1505882E+00
38	.1588467E+00 .1588467E+00	-.4277904E+00 -.4277904E+00	.1434573E+01 .1434573E+01	-.1505859E+00 -.1505856E+00
42	.1588467E+00 .1588467E+00	-.4277904E+00 -.4277904E+00	.1434573E+01 .1434573E+01	-.1505858E+00 -.1505858E+00
$\delta = 2000$				
30	.1379559E+00 .1379566E+00	-.3517353E+00 -.3517353E+00	.1625016E+01 .1625013E+01	.7814371E-02 .3149641E-01
34	.1379560E+00 .1379560E+00	-.3517346E+00 -.3517346E+00	.1625012E+01 .1625012E+01	.1917353E-01 .1999781E-01
38	.1379561E+00 .1379561E+00	-.3517348E+00 -.3517348E+00	.1625013E+01 .1625013E+01	.1967580E-01 .1949538E-01
42	.1379561E+00 .1379561E+00	-.3517348E+00 -.3517348E+00	.1625013E+01 .1625013E+01	.1958122E-01 .1958995E-01
46	.1379561E+00 .1379561E+00	-.3517348E+00 -.3517348E+00	.1625013E+01 .1625013E+01	.1958565E-01 .1958541E-01

других характеристик деформированной оболочки. При вычислении форм колебаний была принята нормировка $w^{(1)}(s_1) = 1$.

Табл. 3. Выполнение силовых условий сопряжения (4) для первой формы колебаний составной оболочки в зависимости от числа приближений N в разложениях (12)

N	$S(s_0 \pm 0)$	$T_1(s_0 \pm 0)$	$M_1(s_0 \pm 0)$	$\tilde{Q}_1(s_0 \pm 0)$
$\delta = 100$				
14	.1109078E+00 .1109506E+00	-.7933097E-01 -.7894373E-01	.8799305E-03 .8793210E-03	-.2177155E-01 -.2172304E-01
18	.1109303E+00 .1109300E+00	-.7913747E-01 -.7913872E-01	.8796349E-03 .8796362E-03	-.2174749E-01 -.2174758E-01
22	.1109302E+00 .1109302E+00	-.7913813E-01 -.7913806E-01	.8796355E-03 .8796355E-03	-.2174752E-01 -.2174755E-01
26	.1109302E+00 .1109302E+00	-.7913810E-01 -.7913810E-01	.8796355E-03 .8796355E-03	-.2174754E-01 -.2174753E-01
30	.1109302E+00 .1109302E+00	-.7913810E-01 -.7913810E-01	.8796355E-03 .8796355E-03	-.2174753E-01 -.2174754E-01
$\delta = 1000$				
22	.7644686E-01 .7665946E-01	-.7491265E-01 -.6949103E-01	.2540667E-03 .2502163E-03	-.2053309E-01 -.1952515E-01
26	.7657799E-01 .7657630E-01	-.7184907E-01 -.7260432E-01	.2520584E-03 .2524058E-03	-.1999659E-01 -.2007686E-01
30	.7657760E-01 .7657673E-01	-.7223624E-01 -.7221720E-01	.2522349E-03 .2522293E-03	-.2003667E-01 -.2003679E-01
34	.7657714E-01 .7657719E-01	-.7222730E-01 -.7222615E-01	.2522323E-03 .2522320E-03	-.2003682E-01 -.2003664E-01
38	.7657716E-01 .7657716E-01	-.7222670E-01 -.7222675E-01	.2522321E-03 .2522321E-03	-.2003673E-01 -.2003673E-01
42	.7657716E-01 .7657716E-01	-.7222672E-01 -.7222673E-01	.2522321E-03 .2522321E-03	-.2003673E-01 -.2003673E-01
$\delta = 2000$				
30	.6215635E-01 .6216210E-01	-.6611987E-01 -.6690803E-01	.1637409E-03 .1640156E-03	-.1844802E-01 -.1850101E-01
34	.6216084E-01 .6215737E-01	-.6647171E-01 -.6655595E-01	.1638659E-03 .1638898E-03	-.1846498E-01 -.1848398E-01
38	.6215904E-01 .6215924E-01	-.6652370E-01 -.6650405E-01	.1638800E-03 .1638759E-03	-.1847581E-01 -.1847317E-01
42	.6215914E-01 .6215914E-01	-.6651325E-01 -.6651449E-01	.1638779E-03 .1638781E-03	-.1847443E-01 -.1847455E-01
46	.6215914E-01 .6215914E-01	-.6651388E-01 -.6651387E-01	.1638780E-03 .1638780E-03	-.1847449E-01 -.1847450E-01

Результаты табл. 2 и 3 демонстрируют точность выполнения кинематических и силовых граничных условий сопряжения в зависимости от числа приближений N в методе Ритца. Приведенные расчеты показывают, что разработанный на основе энергетического метода алгоритм определения колебаний составной оболочки обеспечивает необходимую сходимость для решений, усилий, моментов и перерезывающих сил во всей области интегрирования исходных уравнений, включая и ее границы.

Как и следовало ожидать, уменьшение относительной толщины оболочки приводит к необходимости увеличения числа приближений для получения решений с заданной точностью.

На рис. 1 приведены графики, демонстрирующие поведение функций w_1 , T_1 , S , Q_1 и M_1 в окрестности параллели сопряжения оболочки.

Здесь величины w_1 , Q_1 и T_1 представляют собой проекции перемещений, перерезывающих сил и меридиональных усилий на направления нормали и образующей цилиндрической оболочки соответственно (первая форма колебаний $n = 1$).

Из графиков, представленных на рис. 1 а видно, что все кривые $w(s)$ для различных относительных толщин оболочки имеют явно выраженный максимум на линии сопряжения конуса и цилиндра, указывающий на локализацию больших изгибных деформаций составной оболочки. Функции $T_1(s)$, $S(s)$ и $Q_1(s)$ (рис. 1 б–г) являются гладкими непрерывными функциями своего аргумента с небольшой изменчивостью. Наиболее существенные изменения в окрестности параллели сопряжения претерпевает функция $M_1(s)$ (рис. 1 д). В очень узкой области точки s_0 , функция $M_1(s)$ обладает большой изменчивостью. Более детальный расчет функции $M_1(s)$ при $s \rightarrow s_0$ (рис. 1 е) показывает, что эта функция также является гладкой и непрерывной.

Большие изгибные перемещения, возникающие на соединении оболочек, подобно краевому эффекту быстро затухают при удалении от него. Величина этих местных изгибных перемещений может быть гораздо более существенной по сравнению с их значениями вблизи краев оболочки. Поэтому при проектировании составных конструкций необходимо уделять особое внимание расчету их напряженно-деформированного состояния.

Приведенные численные результаты показывают, что предложенный алгоритм может быть эффективно применен к анализу колебаний и других сопряженных оболочек.

5. Заключение. В работе предложен алгоритм расчета собственных колебаний сопряженных оболочек вращения. Решение спектральной задачи базируется на применении метода декомпозиции области определения искомых функций с использованием вариационной формулировки задачи. Построен обобщенный функционал относительно перемещений для составных оболочек, для которого условия сопряжения на смежной границе введенных подобластей относятся к числу естественных граничных условий. Определение стационарных значений функционала осуществляется с помощью метода Ритца, в котором искомые решения варьируются независимо от их определения в каждой из подобластей.

На примере расчета колебаний оболочки, состоящей из кругового цилиндра и усеченного конуса, показано, что предложенный алгоритм имеет достаточно высокую эффективность вычислений и обеспечивает сходимость в равномерной метрике для решений, усилий, моментов и перерезывающих сил во всей области интегрирования уравнений. Это позволяет использовать данный подход при анализе динамической прочности составных оболочек.

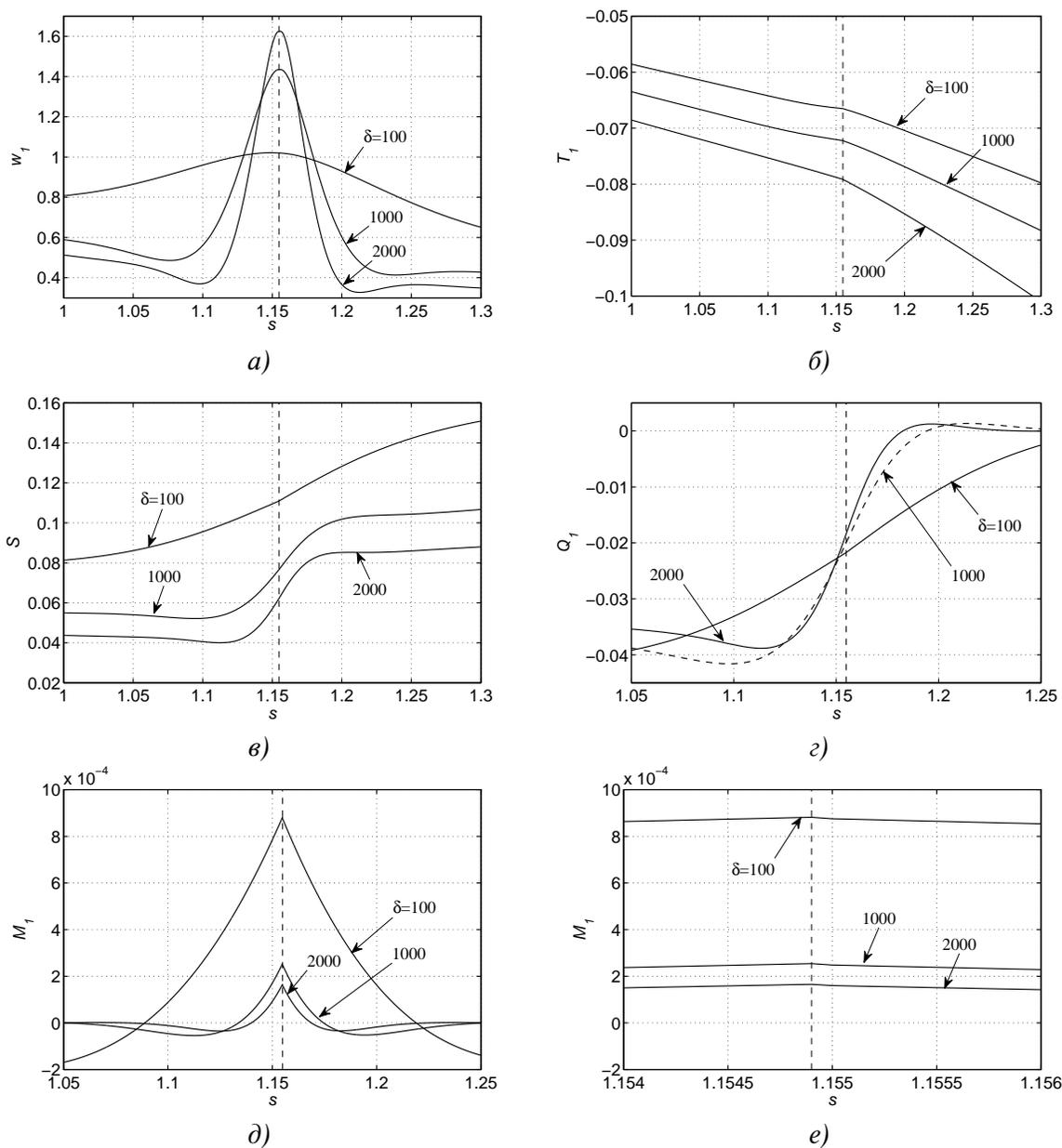


Рис. 1. Поведение функций w_1 , T_1 , S , Q_1 и M_1 в окрестности параллели сопряжения оболочки.

Литература

1. Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 172 с.
2. Кармишин А. В., Лясковец В. А., Мяченков В. И., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. – М.: Машиностроение, 1975. – 375 с.
3. Вольмир А. С., Куранов Б. А., Турбаивский А. Т. Статика и динамика сложных структур. Прикладные многоуровневые методы исследований. – М.: Машиностроение, 1989. – 247 с.

4. *Benjeddou A.* Vibrations of complex shells of revolution using B-spline finite elements // *Comput. Struct.* – 2000. – **74**. – P. 429–440.
5. *Sivadas K. R., Ganesan N.* Free vibration analysis of combined and stiffened shells // *Comput. Struct.* – 1993. – **46**. – P. 537–546.
6. *Caresta M., Kessissoglou N. J.* Free vibrational characteristics of isotropic coupled cylindrical-conical shells // *J. Sound Vib.* – 2010. – **329**. – P. 733–751.
7. *Etraim E., Eisenberger M.* Exact vibration frequencies of segmented axisymmetric shells // *Thin-Walled Struct.* – 2006. – **44**. – P. 281–289.
8. *Qu Y. G., Chen Y., Long X. H., Hua H. X., Meng G.* A modified variational approach for vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical shell combinations // *Eur. J. Mech. A Solids.* – 2013. – **37**. – P. 200–215.
9. *Wu S., Qu Y., Hua H.* Vibration characteristics of a spherical-cylindrical-spherical shell a domain decomposition method // *Mech. Res. Commun.* – 2013. – **49**. – P. 17–26.
10. *Qu Y.G., Chen Y., Long X. H., Hua H. X., Meng G.* A variational method for free vibration analysis of joined cylindrical-conical shells // *J. Vib. Control.* – 2013. – **19(16)**. – P. 2319–2334.
11. *Leissa A.* Vibrations of shells. – Acoustical Society of America, 1993. – 428 p.
12. *Trotsenko V. A., Trotsenko Yu. V.* Nonaxisymmetric vibrations of shell of revolution partially filled with liquid // *J. Math. Sci.* – 2017. – **220(3)**. – P. 341–358.
13. *Trotsenko Yu. V.* Determination of the frequencies and modes of natural oscillations of liquids in composed vessels // *J. Math. Sci.* – 2016. – **215(3)**. – P. 395–407.
14. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
15. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. – М.: Гостехиздат, 1951. – **1**. – 476 с.

Получено 14.06.19