

ПРОБЛЕМА ДОСТОВІРНОЇ ПОДІЇ В БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ З ПРИТЯГАЛЬНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

В. Д. Кошманенко

Ін-т математики НАН України

вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна

Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова

вул. Пирогова, 9, Київ, 01030, Україна

Нац. ун-т “Києво-Могилянська академія”

вул. Г. Сковороди, 2, Київ, 04070, Україна

e-mail: koshman63@gmail.com

О. Р. Сатур

Ін-т математики НАН України

вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна

e-mail: oksana@satur.in.ua

A series of sufficient conditions for emergence of a sure event as the limiting time state of a multicomponent dynamical system with attractive interaction is established. The sure event characterizes a state of system with a finite set of positions when all distribution coordinates are zero except one fixed and equal to unity. The sure event admits the interpretation of a consensus in social webs and thus our results can be used in models of voter and opinion formation models.

Одержано ряд достатніх умов виникнення достовірної події для граничного по часу стану багатокомпонентної динамічної системи з притягальною взаємодією. Достовірність події характеризує стан системи зі скінченною множиною позицій, коли всі координати розподілу є нульовими, окрім однієї фіксованої, яка дорівнює одиниці. Достовірна подія має інтерпретацію консенсусу в соціальних мережах, і тому одержані результати припускають застосування в моделях виборів та моделях формування поглядів.

1. Вступ. Чи не вперше багатокомпонентні динамічні системи, згенеровані відображенням, яке відповідає притягальній взаємодії між *a priori* незнищеними опонентами в n -вимірному, $n > 1$, просторі, досліджувалися в роботі [1]. У ній вивчалася еволюція стохастичних векторів \mathbf{p}^t , \mathbf{r}^t з простору \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, які характеризують стан опонентів. Там, зокрема, було показано, що для таких динамічних систем існують рівноважні стаціонарні стани (точкові атрактори) вигляду $\mathbf{p} = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{r} = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, де 1 може стояти на будь-якому однаковому для \mathbf{p} та \mathbf{r} місці. Такі стани є стійкими. У численних публікаціях, присвячених застосуванням, зокрема у моделях формування поглядів та моделях виборів (див., наприклад, [2–8]), стани такого типу мають інтерпретацію консенсусу. Актуальною є проблема опису басейнів притягання до таких атракторів, тобто опису всіх початкових станів, які асимптотично при $t \rightarrow \infty$ наближаються саме до цих станів. Відзначимо, що парам векторів типу

$$\mathbf{p} = \left(0, 0, \dots, \frac{1}{m}, 0, \dots, \frac{1}{m} \right), \quad \mathbf{r} = \left(0, 0, \dots, \frac{1}{m}, 0, \dots, \frac{1}{m} \right), \quad 1 < m \leq n,$$

також відповідають нерухомі стаціонарні стани, але вони є нестійкими і пов'язані з проблемою неоднозначності у задачах прийняття рішення.

З іншого боку, в теорії динамічних систем конфлікту, розвинутій у публікаціях [9–19], координати векторів $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ мають сенс імовірностей перебування опонентів в одній із позицій деякого простору $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$. За означенням, достовірна подія відповідає вектору з одиничною координатою в одній з ω_i позицій, $i = \overline{1, n}$. У випадку систем з притягальною взаємодією, як зазначалося вище, пари таких векторів утворюють стійкі нерухомі стани. Задача полягає у знаходженні умов для координат довільної початкової пари стохастичних векторів $\mathbf{p}^{t=0}$, $\mathbf{r}^{t=0} \in \mathbb{R}^n$, які забезпечують збіжність траєкторії динамічної системи до граничного стану, що має сенс одночасної достовірної події у фіксованій позиції ω_i для обох опонентів.

Відзначимо, що формула притягальної взаємодії, яка генерує динамічну систему в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, має досить простий вигляд (див. нижче (2.2)). Це дозволяє встановити цілий ряд простих достатніх ознак достовірної події, зокрема, при додаткових умовах симетрії для векторів \mathbf{p} , \mathbf{r} та їхньої розмірності. Встановлення критерію достовірної події здається нетривіальною задачею, навіть у розмірності $n = 3$, принаймні для динамічних систем із дискретним часом, які тут тільки і розглядаються. Це ілюструють приклади з комп'ютерними симуляціями.

Нарешті зауважимо, що динамічні системи з притягальною взаємодією можна інтерпретувати як такі, що описують конфліктні події в наступному сенсі. Кожна з позицій ω_i , $i = \overline{1, n}$, $n > 1$, з достовірним її захопленням обома опонентами є взаємовиключною для всіх інших $n - 1$ позицій. Тому притягальна взаємодія між опонентами за формулою (2.2) насправді містить у собі конфлікт n -мірної альтернативності для позицій ω_i .

2. Постановка задачі. Розглянемо в метричному просторі X деяку некомутативну бінарну композицію (відображення) $*$:

$$\{x, y\} \xrightarrow{*} \{x', y'\}, \quad x' = x * y, \quad y' = y * x, \quad x, y \in X.$$

Далі композицію $*$ називаємо взаємодією між елементами простору X . За означенням, взаємодія $*$ є притягальною, якщо

$$|x' - y'| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in X, \quad (2.1)$$

де $|x - y|$ позначає відстань між елементами в просторі X . Використовуючи відображення $*$, побудуємо дискретну динамічну систему з притягальною взаємодією в прямому добутку $X \otimes X$.

З цією метою співставимо кожній парі елементів $\{x, y\} \equiv \{x^0, y^0\} \in X \otimes X$ траєкторію

$$\{x^t, y^t\} \xrightarrow{*} \{x^{t+1}, y^{t+1}\} \in X \otimes X, \quad t = 0, 1, \dots,$$

де $x^{t+1} := x^t * y^t$, $y^{t+1} := y^t * x^t$. Завдяки умові притягання (стискання) (2.1) природно очікувати, що в X існують границі

$$x^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} x^t, \quad y^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y^t$$

і вони тотожні, $x^\infty = y^\infty$. Іншими словами, пара $\{x^\infty, y^\infty\}$ утворює нерухому стаціонарну точку динамічної системи, згенерованої відображенням $*$:

$$x^\infty * y^\infty = x^\infty, \quad y^\infty * x^\infty = y^\infty.$$

Відзначимо, що оскільки станам динамічної системи відповідають елементи з прямого добутку $X \otimes X$, то взагалі нерухома точка не єдина, як у відомій теоремі Банаха. Залежно від структури простору X та властивостей відображення $*$ нерухомих точок може бути багато, вони утворюють так звану ω -граничну множину. За означенням, граничну нерухома точку $\{x^\infty, y^\infty\}$ називаємо *достовірною подією*, якщо, окрім рівності $x^\infty = y^\infty$, ця точка є стійкою [20]. Задача полягає у знаходженні необхідних та достатніх умов належності початкової точки траєкторії до басейну притягання точки як достовірної події. У даній роботі ми досліджуємо басейни притягання стійких нерухомих точок у наступній ситуації, яка має практичну інтерпретацію.

Нехай двом опонентам А та В, які далі зветься гравцями, в момент часу $t = 0$ співставлено незалежні дискретні випадкові розподіли на просторі $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, $n \geq 2$ (множина відвідуваних позицій):

$$A \sim \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n), \quad B \sim \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n).$$

Зрозуміло, що вектори \mathbf{p} , \mathbf{r} є стохастичними:

$$0 \leq p_i, r_i \leq 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad p_1 + \dots + p_n = 1 = r_1 + \dots + r_n.$$

Далі припускаємо, що вони є різними і неортогональними, тобто в \mathbb{R}^n їхній скалярний добуток задовольняє умову $0 < (\mathbf{p}, \mathbf{r}) < 1$. Координати p_i , r_i можна інтерпретувати як незалежні ймовірності попадання А, В в ω_i . Іншими словами, величини p_i , r_i характеризують випадкові події відвідування позиції ω_i гравцями А та В у початковий момент часу $t = 0$. Отже, $p_i = \mathbf{P}$ (А перебуває в позиції ω_i), де $\mathbf{P}(\cdot)$ означає ймовірність. Аналогічні міркування для r_i .

Припустимо, що в наступні моменти дискретного часу $t = 1, 2, \dots$ гравці А та В вступають один із одним у взаємодію, яку позначаємо $*$. Це приводить до зміни відповідних їм розподілів:

$$\{\mathbf{p}, \mathbf{r}\} \equiv \{\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0\} \xrightarrow{*} \{\mathbf{p}^1, \mathbf{r}^1\} \xrightarrow{*} \dots \xrightarrow{*} \{\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t\} \xrightarrow{*} \dots$$

Покладаємо, що закон зміни координат стохастичних векторів задається ітеративно такими формулами:

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t (1 + r_i^t)}{z^t}, \quad r_i^{t+1} = \frac{r_i^t (1 + p_i^t)}{z^t}, \quad t = 0, 1, \dots, \quad p_i^0 = p_i, \quad r_i^0 = r_i, \quad (2.2)$$

де нормувальний знаменник z^t має вигляд $z^t = 1 + \theta^t$, $\theta^t = (\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t) = \sum_{i=1}^n p_i^t r_i^t$.

На множині всіх стохастичних векторів фіксованої розмірності $n > 1$, яка є симплексом Δ^{n-1} , введемо відстань за формулою

$$D(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_i d_i, \quad d_i = |p_i - r_i|.$$

Легко перевірити, що тоді Δ^{n-1} стає метричним простором.

З формул (2.2) випливає, що взаємодія $*$ задовольняє умову (2.1), тобто є притягальною

$$D(\mathbf{p}^{t+1}, \mathbf{r}^{t+1}) \leq D(\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t), \quad t > 0.$$

Це дійсно так, тому що для всіх $i \in \overline{1, n}$ маємо

$$d_i^{t+1} = \frac{d_i^t}{z^t} < d_i^t, \quad z^t = 1 + \theta^t > 1, \quad t = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Тому ми говоримо, що гравці А, В притягуються. Більш за те, очевидно, що з (2.3) випливає монотонна збіжність до нуля всіх послідовностей d_i^t :

$$d_i^\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} d_i^t = \lim_{t \rightarrow \infty} |p_i^t - r_i^t| = 0.$$

Тому існують границі $\mathbf{p}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}^t$, $\mathbf{r}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{r}^t$ такі, що $D(\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty) = 0$. Нас цікавить відповідь на таке питання: для яких початкових розподілів \mathbf{p} , \mathbf{r} обидва граничні вектори \mathbf{p}^∞ , \mathbf{r}^∞ мають єдину, наприклад i -ту, ненульову координату, тобто існує єдина позиція ω_i , де гравці А, В зустрінуться з одиничною ймовірністю, $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$? Вище зазначалося, що таку ситуацію ми звемо достовірною подією. Зрозуміло, що це питання еквівалентне задачі опису басейнів притягання до станів вигляду $\mathbf{p}^\infty = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{r}^\infty = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.

3. Попередні результати. Далі, як і вище, $*$ позначає бінарне відображення векторів, записане в термінах їхніх координат згідно з формулою (2.2). У прямому добутку симплексів Δ^{n-1} відображення $*$ породжує $2(n-1)$ -параметричну динамічну систему:

$$\Delta^{n-1} \times \Delta^{n-1} \ni \{\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t\} \xrightarrow{*,t} \{\mathbf{p}^{t+1}, \mathbf{r}^{t+1}\} \in \Delta^{n-1} \times \Delta^{n-1}. \quad (3.1)$$

Виявляється, що кожна траєкторія цієї динамічної системи збігається до нерухомої точки $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$ (див. далі теорему 3.2). При цьому, питання, які саме координати p_i^∞ , r_i^∞ граничних векторів є ненульовими та скільки їх, є досить не тривіальним. Наведемо декілька результатів у цьому напрямку.

Твердження 3.1. *Нехай для деякої пари $i, k \in \overline{1, n}$ відповідні координати початкової точки $\{\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0\}$, $\mathbf{p}^0 \equiv \mathbf{p}$, $\mathbf{r}^0 \equiv \mathbf{r}$ траєкторії (3.1) задовольняють нерівності*

$$p_i \geq p_k, \quad r_i > r_k \quad \text{або} \quad p_i > p_k, \quad r_i \geq r_k. \quad (3.2)$$

Тоді з необхідністю k -ті координати граничної пари є нульовими, $p_k^\infty = r_k^\infty = 0$.

Доведення. Безпосередньо з (2.2) випливає, що завдяки умовам (3.2) відношення $\frac{p_k^t}{p_i^t}$, як і $\frac{r_k^t}{r_i^t}$, монотонно спадають при $t \rightarrow \infty$ і прямують до нуля. Тому $p_k^\infty = r_k^\infty = 0$.

Введемо позначення суми та добутку координат з фіксованим індексом для векторів із траєкторії (3.1):

$$\sigma_i^t := p_i^t + r_i^t, \quad \rho_i^t := p_i^t r_i^t.$$

Твердження 3.2. *Якщо для деякої пари $i, k \in \overline{1, n}$ початкові значення сум та добутків координат задовольняють нерівності*

$$\sigma_i \geq \sigma_k, \quad \rho_i > \rho_k \quad \text{або} \quad \sigma_i > \sigma_k, \quad \rho_i \geq \rho_k, \quad (3.3)$$

то $p_k^\infty = r_k^\infty = 0$.

Доведення. З (2.2) випливає

$$\sigma_k^{t+1} = \frac{1}{z^t} (\sigma_k^t + 2\rho_k^t), \quad z^t = 1 + (\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t), \quad (3.4)$$

та

$$\rho_k^{t+1} = \frac{1}{(z^t)^2} (\rho_k^t + (\rho_k^t)^2 + \rho_k^t \sigma_k^t), \quad t = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Використовуючи формули (3.4), (3.5), з (3.2) отримуємо

$$\sigma_i^1 > \sigma_k^1, \quad \rho_i^1 > \rho_k^1.$$

За індукцією, аналогічні нерівності справджуються для всіх $t \geq 1$:

$$\sigma_i^t > \sigma_k^t, \quad \rho_i^t > \rho_k^t.$$

Тому відношення $\frac{\rho_k^t}{\rho_i^t}, \frac{\sigma_k^t}{\sigma_i^t}$ монотонно прямують до нуля при $t \rightarrow \infty$. Це означає, що обидві граничні координати p_k^∞ та r_k^∞ дорівнюють нулю.

Згідно з останнім твердженням, якщо умови

$$\sigma_{\max} = \sigma_i = p_i + r_i, \quad \rho_{\max} = \rho_i = p_i r_i$$

виконуються для єдиного i , то $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$ і, отже, всі $p_k^\infty = r_k^\infty = 0$, $k \neq i$. Тобто, ці умови є достатніми для виникнення достовірної граничної події в позиції ω_i . Природно було б очікувати, що ці умови є й необхідними для $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$. Незважаючи на те, що таке припущення підтверджують численні комп'ютерні приклади, насправді виявляється, що це не так. Достовірна гранична подія в позиції ω_i може відбутися навіть тоді, коли в (3.3) умови з сумами замінити на протилежні. Таку ситуацію ілюструють приклади на рис. 1. У цій ситуації можна знайти іншу достатню умову (див. далі твердження 3.3 та теорему 4.1). Зокрема, рис. 1 а ілюструє ситуацію, коли достовірна подія, $p_2^\infty = r_2^\infty = 1$, виникає в позиції ω_2 , в якій дві величини ρ_2 та $\kappa_2 = \sigma_2 + 2\rho_2$ максимальні.

Твердження 3.3. Нехай для пари $i, k \in \overline{1, n}$ замість умов (3.3) виконуються такі нерівності:

$$\rho_i > \rho_k, \quad \sigma_i < \sigma_k, \quad (3.6)$$

та

$$\kappa_i = \sigma_i + 2\rho_i \geq \sigma_k + 2\rho_k = \kappa_k. \quad (3.7)$$

Тоді $p_k^\infty = r_k^\infty = 0$.

Доведення. Якщо ми покажемо, що

$$\sigma_k^1 \leq \sigma_i^1, \quad \rho_k^1 < \rho_i^1, \quad (3.8)$$

то $p_k^\infty = r_k^\infty = 0$ буде випливати з твердження 3.2. Переконаємося в справедливості (3.8). Дійсно, перша нерівність з (3.8) випливає прямо з (3.7) та (3.4). Тому потрібно довести лише нерівність $\rho_k^1 < \rho_i^1$. За допомогою простих маніпуляцій отримуємо

$$\rho_k^1 = \frac{1}{4z^2} (2z\sigma_k^1 + z^2\sigma_k^1\sigma_k^1 - \sigma_k\sigma_k - 2\sigma_k),$$

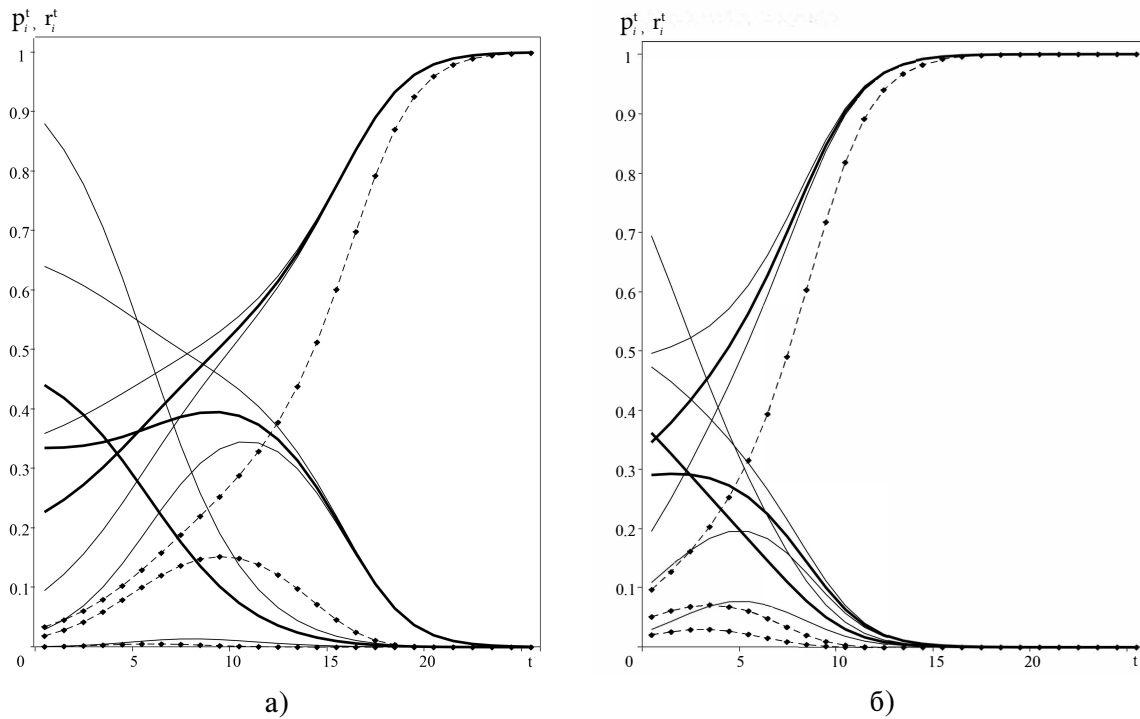


Рис. 1. Траєкторії окремих координат позначені тонкими лініями, напівжирні лінії відповідають нормованим сумам координат $\frac{1}{2} \sigma_i^t = \frac{1}{2} (p_i^t + r_i^t)$, лінії з точками — добуткам $\rho_i^t = p_i^t r_i^t$. Початкові розподіли задані векторами: а) $\mathbf{p} = (0,4737; 0,4964; 0,0299)$, $\mathbf{r} = (0,109; 0,1961; 0,6949)$; б) $\mathbf{p} = (0,095; 0,88; 0,025)$, $\mathbf{r} = (0,359; 0,001; 0,64)$. Обидва випадки демонструють ситуацію, коли максимальні значення ймовірності одночасного перебування гравців А, В у фіксованій позиції забезпечують граничну достовірну подію: а) $p_2^\infty = r_2^\infty = 1$ завдяки $\rho_2 = \rho_{\max}$, $\kappa_2 = \kappa_{\max}$; б) $p_1^\infty = r_1^\infty = 1$ тільки завдяки $\rho_1 = \rho_{\max}$. В обох випадках значення сум координат не є визначальним фактором, оскільки $\sigma_3 = \sigma_{\max}$, але $\sigma_3^\infty = 0$ для а) та $\sigma_2 = \sigma_{\max}$, але $\sigma_2^\infty = 0$ для б).

де ми скористалися формулою

$$\rho_k = \frac{1}{2}(z\sigma_k^1 - \sigma_k).$$

Тепер, порівнюючи ρ_k^1 з ρ_i^1 і враховуючи, що $\sigma_k \leq \sigma_i$ та $\sigma_k^1 \leq \sigma_i^1$, ми отримуємо $\rho_k^1 < \rho_i^1$.

З наведених результатів можна було б очікувати, що умова максимальності для добутку $\rho_{\max} = \rho_i = p_i r_i$ в одній фіксованій позиції є необхідною для $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$. Це також підтверджують багато комп'ютерних прикладів. Але й таке припущення спростовується контрприкладом. Так, рис. 2 ілюструє дві різні ситуації, коли достовірне подія відбувається в позиції, де ρ та σ одночасно не є максимальними. Більш того, в ситуації рис. 2 а) навіть максимальність величини κ не є визначальною і, отже, умова максимальності κ у фіксованій позиції не є необхідною для достовірної події у цій позиції.

Неважко переконатися, що в загальному випадку, коли координати граничних векторів не нульові, тоді вони обов'язково однакові.

Твердження 3.4. Для кожної пари координат з індексами $i, k \in \overline{1, n}$ можливий один із двох випадків:

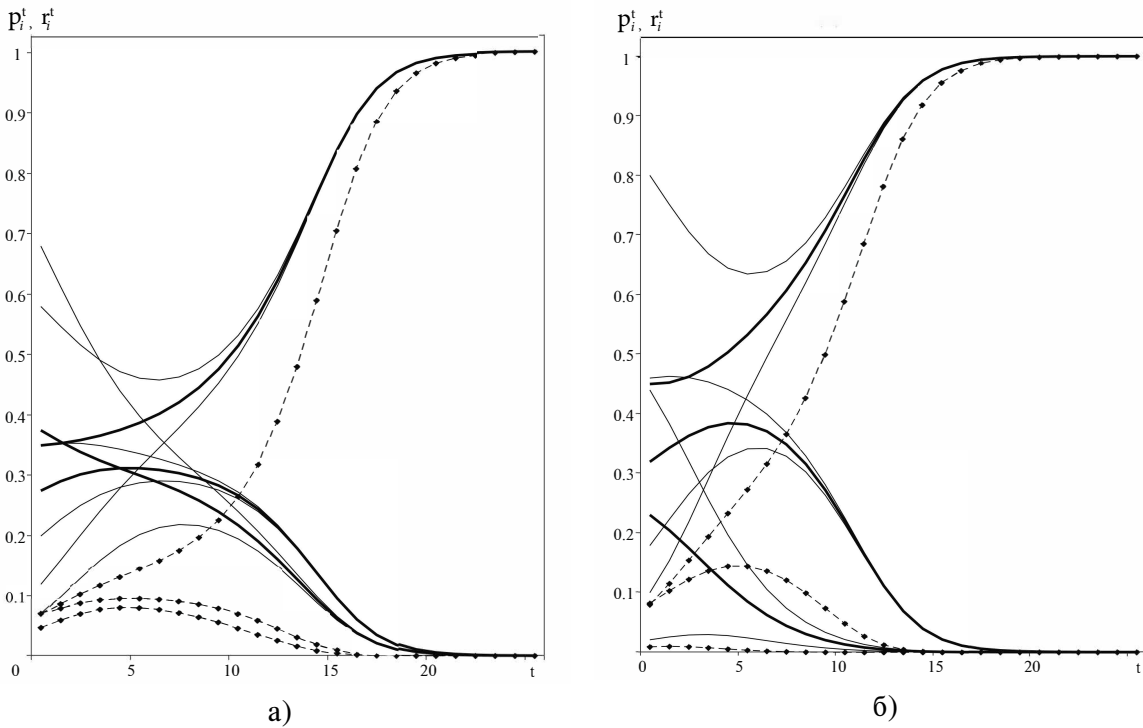


Рис. 2. а) $\mathbf{p} = (0,68; 0,2; 0,12)$, $\mathbf{r} = (0,07; 0,35; 0,58)$. Незважаючи на те, що жодне з максимальних значень $\rho_{\max} = \rho_2$, $\sigma_{\max} = \sigma_1$ і навіть $\kappa_{\max} = \kappa_1$ не належить позиції ω_3 , достовірне подія, $p_3^\infty = r_3^\infty = 1$, відбувається саме в позиції ω_3 ; б) $\mathbf{p} = (0,021; 0,179; 0,8)$, $\mathbf{r} = (0,44; 0,46; 0,1)$. Достовірну подію, $p_3^\infty = r_3^\infty = 1$, у позиції ω_3 забезпечує наявність двох максимальних значень, $\sigma_3 = \sigma_{\max}$, $\kappa_3 = \kappa_{\max}$, хоча добуток координат для цієї позиції не є максимальним, $\rho_{\max} = \rho_2$.

(а) одна з пар координат p_i^t, r_i^t або p_k^t, r_k^t прямує до нуля:

$$p_i^\infty = r_i^\infty = 0, \quad \text{або} \quad p_k^\infty = r_k^\infty = 0; \tag{3.9}$$

(б) усі координати p_i^t, r_i^t та p_k^t, r_k^t збігаються до однакової границі (нульової або додатної):

$$p_i^\infty = r_i^\infty = p_k^\infty = r_k^\infty \geq 0. \tag{3.10}$$

Доведення. Оскільки відомо, що завжди різниці d_i^t, d_k^t прямують до нуля (див. (2.3)), то можливі лише два випадки. Існує таке T , що (3.2) виконується для всіх $t > T$. Тоді з твердження 3.1 отримуємо (3.9). В іншому випадку перетин $d_i^t \cap d_k^t$ завжди є непорожньою множиною. Звідси очевидно випливає, що виконується умова (3.10).

Таким чином, для кожної пари векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \Delta^{n-1}$, $(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \neq 0$, існує розклад множини Ω на дві підмножини

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_+,$$

де

$$\Omega_0 := \{\omega_k: p_k^\infty = r_k^\infty = 0\}, \quad \Omega_+ := \{\omega_i: p_i^\infty = r_i^\infty > 0\}. \tag{3.11}$$

Тепер з твердження 3.4 отримуємо наслідок, який формулюємо у вигляді такої теореми.

Теорема 3.1. Для довільної пари початкових не ортогональних стохастичних векторів \mathbf{p} , \mathbf{r} граничний стан динамічної системи (3.1) у термінах координат $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$ має такий опис:

$$p_k^\infty = r_k^\infty = 0, \quad \omega_k \in \Omega_0, \quad p_i^\infty = r_i^\infty = \frac{1}{|\Omega_+|} > 0, \quad \omega_i \in \Omega_+, \quad (3.12)$$

де $|\Omega_+|$ — потужність множини Ω_+ .

Сформулюємо основний результат цього пункту.

Теорема 3.2. Кожна траєкторія динамічної системи (3.1) збігається до нерухомої точки $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$:

$$\mathbf{p}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}^t, \quad \mathbf{r}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{r}^t, \quad \mathbf{p}^\infty * \mathbf{r}^\infty = \mathbf{p}^\infty, \quad \mathbf{r}^\infty * \mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty.$$

При цьому для довільної пари початкових стохастичних векторів $\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0 \in \Delta^{n-1}$, $\mathbf{p}^0 \neq \mathbf{r}^0$, граничні вектори є однаковими, $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty$. Відповідна ω -гранична множина динамічної системи (3.1) (позначимо її Γ_n) складається з $2^n - 1$ точок:

$$\Gamma_n = \bigcup_{m=1}^n \Gamma_{\binom{n}{m}}, \quad (3.13)$$

де $\{\mathbf{p}, \mathbf{r}\} \in \Gamma_{\binom{n}{m}}$, якщо виконується умова

$$\|\mathbf{p}\|^2 = \frac{1}{m}, \quad p_i = \left\{0, \frac{1}{m}\right\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad 1 \leq m \leq n, \quad (3.14)$$

де $\|\cdot\|$ позначає норму в \mathbb{R}^n , ω -гранична множина Γ_n не містить періодичних орбіт. Підмножину $\Gamma_{\binom{n}{m=1}}$ утворюють стійкі нерухомі точки. Всі підмножини $\Gamma_{\binom{n}{m}}$, $2 \leq m \leq n$, складаються лише з нестійких нерухомих точок.

Доведення. Існування граничних нерухомих станів вигляду $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$ впливає прямо з (2.2) завдяки (2.3) (докладніше див. [1]). Зокрема, умова (3.14) еквівалентна інваріантності граничних координат відносно відображення, заданого формулами (2.2). Зокрема, для відмінних від нуля граничних координат виконується рівність

$$p_i^\infty = r_i^\infty = \theta^\infty = \|\mathbf{p}^\infty\|^2.$$

Асимптотична стійкість станів із множини $\Gamma_{\binom{n}{m=1}}$ впливає з твердження 3.1. Дійсно, зафіксуємо $k \in \overline{1, n}$ і розглянемо стан із цієї множини, утворений вектором $\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^n$ з координатами, заданими символом Кронекера, $e_{ki} = \delta_{ik}$, $i = \overline{1, n}$. Тоді з твердження 3.1 випливає, що всі траєкторії (3.1), які стартують із станів $\{\mathbf{p}, \mathbf{r}\}$, координати векторів яких задовольняють нерівності $|p_i - \delta_{ik}| < \frac{1}{n}$, $|r_i - \delta_{ik}| < \frac{1}{n}$, з необхідністю збігаються до точки $\{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k\}$. Зрозуміло, що множина всіх таких початкових станів утворює деякий окіл точки $\{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k\}$ в просторі $\Delta^{n-1} \times \Delta^{n-1}$.

Легко зрозуміти, що в будь-якому околі граничної точки з підмножини $\Gamma_{\binom{n}{m>1}}$ існують стани, утворені векторами, деякі з координат яких задовольняють нерівності, протилежні до (3.2). Тоді траєкторії з такими початковими станами будуть збігатися до іншої граничної точки. Це доводить нестійкість нерухомих точок з $\Gamma_{\binom{n}{m>1}}$.

Відсутність періодичних орбіт в ω -граничній множині Γ_n є наслідком того, що Γ_n складається лише з одноточкових нерухомих станів.

Зауважимо, що безпосередньо з доведення теореми 3.2 випливає відсутність нейтрально стійких нерухомих точок. Відзначимо також, що множина $\Gamma_{(m=n)}^n$ містить лише одну нерухому точку, утворену з пари однакових векторів з координатами $p_i = r_i = \frac{1}{n}$ для всіх $i \in \overline{1, n}$. З твердження 3.1 випливає, що ця точка є нестійкою, з її довільного околу траєкторіями (3.1) можна наблизитися до будь-якої точки з множини Γ_n .

Підкреслимо також, що з доведених вище теорем випливає відсутність різних ненульових граничних координат у фіксованого граничного стану. Тому одне з важливих питань полягає в тому, як у термінах початкової пари векторів \mathbf{p} , \mathbf{r} здійснити розклад множини позицій Ω на підмножину Ω_0 , в якій усі граничні координати є нульовими, та Ω_+ , де усі граничні координати є строго додатними й однаковими? А основне питання зводиться до знаходження критерію виконання рівності $|\Omega_+| = 1$. Тобто, знаходження необхідних і достатніх умов для пари початкових векторів, коли на границі по часу виникає лише одна ненульова координата, $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$. Наведені вище результати є лише допоміжними для дослідження поставленої задачі. Опишемо найскладнішу ситуацію.

Нехай для деякої пари векторів \mathbf{p} , \mathbf{r} виконуються протилежні нерівності для сум та добутків: $\sigma_k > \sigma_i$, але $\rho_k < \rho_i$. Тоді з твердження 3.3 випливає, що $\omega_k \in \Omega_0$, якщо $\sigma_k + 2\rho_k = \kappa_k \leq \kappa_i = \sigma_i + 2\rho_i$ (див. нерівність (3.7)). Але ця нерівність є лише достатньою умовою для $\omega_k \in \Omega_0$. Тому, коли припустити, що $\kappa_k > \kappa_i$, тоді $\sigma_k^1 > \sigma_i^1$, оскільки з (3.4) випливає, що $\sigma_k^1 = \kappa_k$, $\sigma_i^1 = \kappa_i$. І якщо при цьому $\rho_k^1 < \rho_i^1$, то ми не можемо визначити, до яких із множин Ω_0 чи Ω_+ належать позиції ω_k, ω_i . Звичайно, якщо $\rho_k^1 \geq \rho_i^1$, то все зрозуміло. Але якщо зазначена вище невизначеність повторюється лише скінченну кількість разів і на якомусь кроці t_0 з'являються обидві нерівності $\sigma_k^{t_0} > \sigma_i^{t_0}$, $\rho_k^{t_0} > \rho_i^{t_0}$ (або протилежні до них), то можна зробити висновок, що $\omega_i \in \Omega_0$ (або $\omega_k \in \Omega_0$). Складність у тому, що в загальному випадку не зрозуміло, чи існує таке t_0 , а якщо існує, то за яких умов?

На завершення пункту наведемо таке твердження.

Твердження 3.5. *Якщо $\sigma_i^1 > \sigma_i$, то $\rho_i^1 > \rho_i$.*

Доведення. У випадку $p_i = r_i$ з $\sigma_i^1 > \sigma_i$, очевидно, випливає $p_i^1 = r_i^1 > p_i$, і тому $\rho_i^1 > \rho_i$. Розглянемо довільний випадок, у якому без втрати загальності будемо вважати, що $p_i > r_i$. При цьому можливі декілька варіантів.

Якщо $\sigma_i^1 > \sigma_i$, то обидві координати p_i^1 і r_i^1 зростають, тобто $p_i^1 > p_i$ і $r_i^1 > r_i$, тоді, очевидно, $\rho_i^1 > \rho_i$.

Підкреслимо, що з $p_i^1 > p_i$ обов'язково випливає $r_i^1 > r_i$, оскільки (див. (2.3)) $p_i^1 - r_i^1 = d_i^1 < p_i - r_i$. За умови $\sigma_i^1 > \sigma_i$ це означає, що r_i^1 зростає швидше, ніж p_i^1 .

Нарешті нехай $\sigma_i^1 > \sigma_i$ і відомо, що $r_i^1 > r_i$. Тоді можливо, якщо p_i^1 спадає, то $p_i^1 \leq p_i$. Маємо $r_i^1 = r_i + \Delta$, $p_i^1 = p_i - \Delta'$. Однак при цьому повинна виконуватися умова

$$\Delta > \Delta' \geq 0,$$

Знайдемо добуток

$$\rho_i^1 = (r_i + \Delta)(p_i - \Delta') = \rho_i + p_i\Delta - r_i\Delta' - \Delta\Delta'.$$

Стверджуємо, що $\rho_i^1 > \rho_i$, оскільки

$$p_i\Delta - r_i\Delta' - \Delta\Delta' > p_i\Delta - r_i\Delta - \Delta\Delta' = (p_i - r_i)\Delta - \Delta\Delta' = (d_i - \Delta')\Delta > 0,$$

де ми використали нерівність $\Delta' < d_i$. Вона справедлива, тому що протилежне суперечить нерівності $d_i^1 > 0$.

Таким чином, якщо для координат p_i, r_i їхня сума зростає на якомусь кроці, то добуток цих координат також зростає. Але внаслідок нелінійності формул (2.2) добуток координат може зростати і тоді, коли їхня сума спадає. Це ускладнює розв'язання поставленої задачі.

4. Часткові відповіді. У цьому пункті розглянуто ряд ситуацій, коли проблема достовірної події розв'язується в сторону достатності. Так, безпосередньо з тверджень 3.1 та 3.2 випливає справедливості такої теореми.

Теорема 4.1. *Якщо в початковий момент часу в просторі Ω існує єдина позиція ω_{i_0} , для якої*

$$p_{i_0}^{t=0} \equiv p_{i_0} = p_{\max} = \max_{i=1}^n \{p_i\}, \quad r_{i_0}^{t=0} \equiv r_{i_0} = r_{\max} = \max_{i=1}^n \{r_i\},$$

або

$$\sigma_{i_0}^{t=0} \equiv \sigma_{i_0} = \sigma_{\max} = \max_{i=1}^n \{\sigma_i\}, \quad \rho_{i_0}^{t=0} \equiv \rho_{i_0} = \rho_{\max} = \max_{i=1}^n \{\rho_i\},$$

то саме в ω_{i_0} граничні координати $p_{i_0}^\infty = r_{i_0}^\infty = 1$, а всі інші дорівнюють нулю, $p_i^\infty = r_i^\infty = 0$, $i \neq i_0$.

Відзначимо, що твердження 3.3 не гарантує достовірної події в позиції ω_{i_0} , навіть якщо це єдина позиція, в якій

$$\kappa_{i_0} = \kappa_{\max} = \max_{i=1}^n \{\kappa_i\}, \quad \kappa_i := \sigma_i + 2\rho_i,$$

тому що при цьому координата p_{i_0} може бути досить малою і це приводить до $p_{i_0}^\infty = r_{i_0}^\infty = 0$. Таку ситуацію ілюструє рис. 2 а).

Розглянемо декілька випадків із умовами симетрії на початкові розподіли.

Нехай для деякого i_0

$$p_{i_0} = r_{i_0} = p, \quad \sigma_j = \sigma_k, \quad j, k \neq i_0. \quad (4.1)$$

Твердження 4.1. *Якщо виконується умова (4.1) і $p > \frac{1}{n}$, то $p_{i_0}^\infty = r_{i_0}^\infty = 1$.*

Доведення. Зараз усі $\sigma_k = \frac{2(1-p)}{n-1}$, $k \neq i_0$. Тому $\sigma_{i_0} > \frac{2}{n} > \sigma_k$. А також $\rho_{i_0} = \frac{1}{n^2} > \rho_k \forall k \neq i_0$. Тепер справедливості твердження випливає з теореми 4.1.

Розглянемо випадок із умовою (4.1) при $p < \frac{1}{n}$. Тепер $\sigma_{i_0} < \sigma_k \forall k \neq i_0$. Чи може при цьому виникнути достовірна подія в позиції ω_{i_0} , тобто $p_{i_0}^\infty = r_{i_0}^\infty = 1$? Виявляється, що так, але лише тоді, коли всі ρ_k є достатньо малими, щоб виконувалася умова (3.7) при $i = i_0$ з твердження 3.3. Звичайно, цю умову неможливо задовольнити при будь-якому $p < \frac{1}{n}$. Існує мінімальний поріг λ для p , який визначається рівнянням $\kappa_{i_0} = \sigma_k$.

Це рівняння, враховуючи, що $\sigma_k = 2 \frac{(1-p)}{(n-1)}$ і покладаючи $p_{i_0} = p = \lambda$, має вигляд

$$2\lambda + \lambda^2 = \frac{2(1-\lambda)}{n-1}. \quad \text{Отже, мінімальний поріг для } p_{i_0} = p, \text{ коли можна скористатися}$$

умовою (3.7), є $\lambda = \frac{(n^2 + 4n - 4)^{\frac{1}{2}} - n}{2(n-1)}$. Якщо $p < \lambda$, то при довільному $\rho_k > 0$ умова (3.7) не справджується. Отже, справедливе таке твердження.

Твердження 4.2. Нехай виконуються умови (4.1) і $\lambda < p < \frac{1}{n}$. Тоді існують достатньо малі ρ_k такі, що $\kappa_{i_0} \geq \kappa_k$ для всіх $k \neq i_0$ і, отже, $p_{i_0}^\infty = 1$.

З наведених тверджень випливає, що для розмірності $n = 3$, тобто для $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \Delta^2$, і при умовах (4.1), коли

$$p_1 = r_1 = p, \quad p_2 = r_3 = \frac{1-p}{2} + \varepsilon, \quad p_3 = r_2 = \frac{1-p}{2} - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon = \frac{1-p}{2}, \quad (4.2)$$

в позиції ω_1 відбувається достовірна подія, $p_1^\infty = r_1^\infty = 1$, у таких випадках:

- 1) $p \geq \frac{1}{3}$, $p_2 = r_3 \neq \frac{1}{3}$;
- 2) $p > 0$, $p_2 = r_3 = 0$;
- 3) $\lambda < p < \frac{1}{3}$, $\lambda = \frac{\sqrt{17}-3}{4}$, але $\kappa_1 > \kappa_2$.

5. Достатні умови. У цьому пункті наведено більш тонкі достатні умови достовірної події. Почнемо з розмірності $n = 3$, коли $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \Delta^2$.

Нехай $0 < p < \frac{1}{3}$ та $\sigma_2 = \sigma_3$. Тоді очевидно $\sigma_1 < \sigma_2$. З попередніх результатів відомо, що забезпечити на границі по часу рівність $p_1^\infty = r_1^\infty = 1$ можливо лише тоді, коли $\rho_2 = \rho_3$ є досить малим. Запишемо ρ_2 у вигляді

$$\begin{aligned} \rho_2 = \rho_3 &= p_2 r_2 = p_3 r_3 = \left(\frac{1-p}{2} + \varepsilon \right) \left(\frac{1-p}{2} - \varepsilon \right) = \\ &= \left(\frac{1-p}{2} \right)^2 - \varepsilon^2 = \frac{1}{4} (1 - 2p + p^2 - 4\varepsilon^2), \quad 0 \leq \varepsilon \leq \frac{1-p}{2}. \end{aligned}$$

Звичайно, якщо ε є максимально великим, $\varepsilon = \frac{1-p}{2}$, то $r_2 = p_3 = 0$, і для довільного початкового p одержуємо $p_2^t = r_3^t \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, а $p_1^\infty = 1$. Але це крайній випадок. Навпаки, для нульового або досить малого ε обидві координати p_2 , p_3 близькі до $\frac{1}{3}$. Тоді для $p < \frac{1}{3}$ добуток ρ_2 перевищує ρ_1 та за твердженням 3.2 $p_1^\infty = 0$, а $p_2^\infty = p_3^\infty = \frac{1}{2}$. Легко встановити, що це відбувається завжди, коли ε задовольняє умову (5.1) із такого твердження.

Твердження 5.1. Нехай координати векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \Delta^2$ задовольняють умови (4.2). Припустимо

$$p < \frac{1}{3}, \quad 0 \leq \varepsilon^2 \leq f(p), \quad f(p) := \frac{1}{4} - p - \frac{3}{4} p^2. \quad (5.1)$$

Тоді $p_2^\infty = p_3^\infty = \frac{1}{2}$ і $p_1^\infty = r_1^\infty = 0$.

Доведення. З умов (5.1) легко одержуємо $\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$, $\rho_1 \leq \rho_2 = \rho_3$. Тепер користуємося твердженням 3.2 та теоремою 3.1.

Таким чином, для забезпечення достовірної події в ω_1 з початковою координатою $p_1 = p < \frac{1}{3}$ потрібно обмежити ε знизу.

Теорема 5.1. Нехай координати векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \Delta^2$ мають вигляд (4.2). Додатково припустимо, що $\lambda \leq p \leq \frac{1}{3}$, де $\lambda = \frac{\sqrt{17}-3}{4}$, а $\varepsilon \leq \frac{1-p}{2}$ задовольняє оцінку знизу

$$T(p) \leq \varepsilon^2, \quad T(p) = \frac{3}{4} - 2p - \frac{3}{4}p^2. \quad (5.2)$$

Тоді $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$.

Доведення. Покажемо, що вже на першому кроці $p_1^{t=1} = \frac{p(1+p)}{z} \geq \frac{1}{3}$. Дійсно, оскільки $z = 1 + p^2 + 2\rho_2$, остання нерівність має еквівалентний вигляд

$$3p(1+p) \geq 1 + p^2 + 2\rho_2,$$

де $\rho_2 = \rho_3 = p_2 p_3 = \left(\frac{1-p}{2}\right)^2 - \varepsilon^2$. Це означає, що нерівності $p_1^{t=1} \geq \frac{1}{3}$ та

$$\varepsilon^2 \geq \frac{1}{4} (3 - 8p - 3p^2) = T(p)$$

еквівалентні. Легко бачити, що функція $T(p)$ спадає на відрізьку $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ від $\frac{3}{4}$ до 0, причому

$T(p) > \frac{(1-p)^2}{4}$ на $[0, \lambda)$. Це означає, що умова (5.2) може виконуватися тільки тоді, коли $\lambda \leq p$. Тепер з $p_1^1 = r_1^1 \geq \frac{1}{3}$ випливає, що $\sigma_1^1 \geq \sigma_2^1$. Очевидно також, що $\rho_1^1 > \rho_2^1$, оскільки $\varepsilon^1 = \frac{1}{2} (p_2^1 - p_3^1) > 0$.

Отже, теорема 5.1 справедлива завдяки твердженню 3.2.

Твердження теореми 5.1 проілюстровано на рис. 3. Її результат легко узагальнити на вищу розмірність.

Нехай $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \Delta^{n-1}$, $n > 2$, ε непарним. Припустимо, для деякого i

$$p_i = r_i = p, \quad \sigma_l = \sigma_k, \quad \rho_l = \rho_k \quad \forall l, k \neq i.$$

Тоді $\sigma_i = 2p$, $\rho_i = p^2$, $\sigma_k = \frac{2(1-p)}{n-1}$. Позначимо $\varepsilon := \frac{|p_k - r_k|}{2}$. В такому випадку, окрім $p_i = r_i = p$, маємо $\frac{n-1}{2}$ рівних координат $p_k = r_l = \frac{1-p}{n-1} + \varepsilon$ та $\frac{n-1}{2}$ рівних координат $p_l = r_k = \frac{1-p}{n-1} - \varepsilon$. При цьому

$$\rho_k = \rho_l = \left(\frac{1-p}{n-1} + \varepsilon\right) \left(\frac{1-p}{n-1} - \varepsilon\right) = \left(\frac{1-p}{n-1}\right)^2 - \varepsilon^2.$$

Введемо позначення

$$f_n(p) := \frac{p(p-1)}{2} + \left(\frac{1-p}{n-1}\right)^2, \quad T_n(p) := \frac{1-np+p^2(1-n)}{2} + \left(\frac{1-p}{n-1}\right)^2.$$

Очевидно $f_n(p) < T_n(p)$ для $p < \frac{1}{n}$.

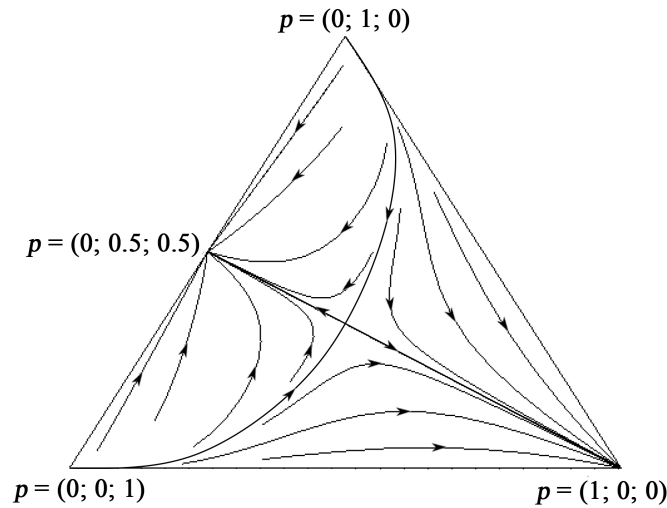


Рис. 3. Фазовий портрет траєкторій у симетричному випадку, $p_1 = r_1 = p$, $p_2 = r_3$, $p_3 = r_2$, тобто $\mathbf{p} = (p, a, b)$, $\mathbf{r} = (p, b, a)$. Симплекс Δ^2 поділяється на два басейни притягання до стійких точкових атракторів: $(1, 0, 0)$, $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Точка $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ є сідлом. Нерухомі точки $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ є реперелерами.

Теорема 5.2. Нехай координати векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \Delta^{n-1}$ задовольняють умови такі: для фіксованого i

$$p_i = r_i = p, \quad \lambda_n \leq p \leq \frac{1}{n}, \quad \lambda_n = \frac{(n^2 + 4n - 4)^{1/2} - n}{2(n - 1)},$$

а для всіх $l, k \neq i$,

$$p_k = r_l = \frac{1 - p}{n - 1} + \varepsilon, \quad p_l = r_k = \frac{1 - p}{n - 1} - \varepsilon, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \frac{1 - p}{n - 1}.$$

Тоді:

- 1) якщо $\varepsilon^2 < f_n(p)$, то $p_i^\infty = r_i^\infty = 0$, а $p_l^\infty = r_l^\infty = p_k^\infty = r_k^\infty = \frac{1}{n - 1}$,
- 2) якщо

$$T_n(p) \leq \varepsilon^2, \tag{5.3}$$

то $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$.

Доведення. 1) Нехай $\varepsilon^2 < f_n(p)$. Отже,

$$p_i^1 - p_i = \frac{p(1 + p)}{z} - p = -\frac{2p}{z} \left(\frac{p(1 - p)}{2} + \left(\frac{1 - p}{n - 1} \right)^2 - \varepsilon^2 \right) = -\frac{2p}{z} (f_n(p) - \varepsilon^2) < 0,$$

тобто $p^1 < p$, причому, очевидно, значення функції $f_n(\cdot)$ зростає, $f_n(p^1) > f_n(p)$. З першої нерівності випливає, що всі p_k^1 , $k \neq i$, також зростають. Тому $(\varepsilon^1)^2 < \varepsilon^2$, де, нагадаємо, $\varepsilon^1 = \frac{|p_k^1 - r_k^1|}{2}$ не залежить від k . Тому на першому кроці нерівність $(\varepsilon^1)^2 < f_n(p^1)$ посилюється. По індукції маємо

$$(\varepsilon^t)^2 < \dots < \varepsilon^2 < f_n(p) < \dots < f_n(p^t), \quad t \geq 1.$$

Таким чином, для всіх $t \geq 0$ виконується нерівність

$$(\varepsilon^t)^2 < f_n(p^t).$$

Це означає, що послідовність $\{p^t\}_{t=0}^{\infty}$ монотонно спадає, і тому $p_i^{\infty} = r_i^{\infty} = 0$, а $p_i^{\infty} = r_i^{\infty} = p_k^{\infty} = r_k^{\infty} = \frac{1}{n-1}$.

2) Відзначимо, що аналогічно (5.2) нерівність (5.3) може виконуватися лише тоді, коли $\lambda_n \leq p \leq \frac{1}{n}$. Безпосередньо переконаємося, що ця нерівність рівносильна тому, що $p_i^1 = \frac{p(1+p)}{1+p^2+2\rho_k} \geq \frac{1}{n}$. Це означає, що $\rho_i^1 > \rho_k^1$ і $\sigma_i^1 > \sigma_k^1$ для всіх $k \neq i$. Тепер, використовуючи твердження (3.2), отримуємо $p_i^{\infty} = r_i^{\infty} = 1$.

6. Висновки. У даній роботі ми одержали ряд достатніх ознак існування достовірної події, або, іншими словами, встановлення консенсусу, при $t \rightarrow \infty$. Найпростіші з них зводяться до наявності в одній фіксованій позиції ω_i максимальних значень координат p_i, r_i , добутків цих координат $\rho_i = p_i r_i$, їхніх сум $\sigma_i = p_i + r_i$, або деяких комбінацій із $\kappa_i = \sigma_i + 2\rho_i$. Але чисельні комп'ютерні симуляції показують, що ці ознаки є далекими від необхідних. Зокрема, якщо згадані максимальні значення не зосереджені у фіксованій позиції, тобто досягаються для різних $i \neq k$, то достовірна подія може існувати, але її місце (позиція ω_{i_0} , де вона відбувається) передбачити досить складно. Питання про знаходження явного вигляду функціонала $F_i(\mathbf{p}, \mathbf{r})$, максимальне значення якого для єдиного фіксованого i_0 є критерієм виникнення достовірної події в ω_{i_0} , є відкритим не тільки у випадку довільних стохастичних векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$, а навіть при розмірності $n = 3$ з умовами симетрії типу (4.1).

Варто також підкреслити, що проблему достовірної події можна сформулювати і як динамічну задачу встановлення консенсусу між парою гравців **A** та **B** у прийнятті рішення щодо різних можливих варіантів поведінки відносно позицій $\omega_i, \overline{1, n}$. У початковий момент часу кожен гравець **A** (**B**) схильний до варіанту ω_i лише з деякою ймовірністю $\mathbf{P}^A(\omega_i) = p_i, \mathbf{P}^B(\omega_i) = r_i$, відповідно. З часом, $t = 1, 2, \dots$, погляди індивідів зближуються завдяки притягальній взаємодії за формулою (2.2). Треба знайти критерій консенсусу, $\lim_{t \rightarrow \infty} p_i^t = 1 = \lim_{t \rightarrow \infty} r_i^t$, щодо якогось фіксованого варіанту поведінки ω_i у термінах початкових значень $p_i = p_i^0, r_i = r_i^0, i = \overline{1, n}$. У різних постановках такого типу задача досліджувалася в багатьох роботах (див., наприклад, [2–8, 21, 22]), зокрема, її можна навіть інтерпретувати як ефект синхронізації в моделях фазових осциляторів [23–25]. Фактично у згаданих роботах також вивчається питання про існування консенсусу та опис достатніх умов його досягнення (басейнів притягання до відповідних нерухомих точок). Але в загальній постановці проблема консенсусу як достовірної події залишається нерозв'язаною.

Література

1. *Albeverio S., Bodnarchuk M. V., Koshmanenko V. D.* Dynamics of discrete conflict interactions between non-annihilating opponent // *Methods Funct. Anal. Topology.* – 2005. – **11**, № 4. – P. 309–319.
2. *Axelrod R.* The dissemination of culture: a model with local convergence and global polarization // *J. Conflict Resolut.* – 1997. – **41**(2). – P. 203–226. Doi: 10.1177/0022002797041002001
3. *Bellomo N., Brezzi F., Pulvirenti M.* Modeling behavioral social systems // *Math. Models Methods Appl. Sci.* – 2017. – **27**, № 1. – P. 1–11. Doi: 10.1142/S0218202517020018
4. *Flachea A., Mäs M., Feliciania T., Chattoe-Brown E., Deffuant G., Huetc S., Lorenzd J.* Models of social influence: towards the next frontiers // *J. Artif. Soc. Soc. Simul.* – 2017. – **20**, Issue 4. Doi: 10.18564/jasss.3521

5. *Pareschi L., Toscani G., Tosin A., Zanella M.* Hydrodynamic models of preference formation in multi-agent societies // arXiv.org. Physics. <https://arXiv:1901.00486v1> [physics.soc-ph]
6. *Jalili M.* Social power and opinion formation in complex networks // Phys. A. – 2013. – **392**. – P. 959–966.
7. *Kimura M., Saito K., Ohara K., Motoda H.* Opinion formation by voter model with temporal decay dynamics / Flach P. A., De Bie T., Cristianini N. (eds) Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases. ECML PKDD 2012 // Lect. Notes Comput. Sci. – 2012. – **7524**. – P. 565–580.
8. *Marvel S. A., Hong H., Papush A., Strogatz S. H.* Encouraging moderation: clues from a simple model of ideological conflict // Phys. Rev. Lett. – 2012. – **109**. – 118702.
9. *Koshmanenko V.* Theorem of conflicts for a pair of probability measures // Math. Methods Oper. Res. – 2004. – **59**, № 2. – P. 303–313.
10. *Кошманенко В. Д., Харченко Н. В.* Інваріантні точки динамічної системи конфлікту в просторі кусково рівномірно розподілених мір // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 7. – С. 927–938; **English translation:** Ukr. Math. J. – 2004. – **56**, № 7. – P. 1102–1116.
11. *Боднарчук М. В., Кошманенко В. Д., Харченко Н. В.* Властивості граничних станів динамічної системи конфлікту // Нелін. коливання. – 2004. – **7**, № 4. – С. 446–461; **English translation:** Nonlinear Oscil. – 2004. – **7**, № 4. – P. 432–447.
12. *Albeverio S., Koshmanenko V., Samoilenko I.* The conflict interaction between two complex systems: Cyclic migration // J. Interdiscip. Math. – 2008. – **11**, № 2. – P. 163–185.
13. *Кошманенко В. Д., Самойленко І. В.* Модель динамічної системи конфліктної тріади // Нелін. коливання. – 2011. – **14**, № 1. – С. 55–75; **English translation:** Nonlinear Oscil. – 2011. – **14**, № 1. – P. 56–76.
14. *Koshmanenko V. D.* Existence theorems of the ω -limit states for conflict dynamical systems // Methods Funct. Anal. Topology. – 2014 – **20**, № 4. – P. 379–390.
15. *Koshmanenko V., Karataieva T., Kharchenko N., Verygina I.* Models of the conflict redistribution of vital resources // Social Simulation Conference 2016, 19–23 September 2016 (Rome, Italy). – 2016. – 4 p.
16. *Koshmanenko V. D., Karataieva T. V.* On personal strategies in conflict socium // Econophysics Colloq. (Warsaw, 5–7 July 2017). – 2017. – 32 p.
17. *Кошманенко В. Д.* Спектральна теорія динамічних систем конфлікту. – Київ: Наук. думка, 2016. – 288 с.
18. *Karataieva T., Koshmanenko V., Krawczyk M., Kulakowski K.* Mean field model of a game for power // Phys. A. – 2019. – **525**. – P. 535–547.
19. *Каратаєва Т. В., Кошманенко В. Д.* Соціум, математична модель динамічної системи конфлікту // Нелін. коливання. – 2019. – **22**, № 1. – С. 66–85.
20. *Sharkovsky A. N., Maistrenko Y. L., Romanenko E. Y.* Difference equations and their applications. – Springer Science+Business Media, 2012.
21. *Epstein J. M.* Nonlinear dynamics, mathematical biology, and social science // Santa Fe Inst. Ser. – Addison-Wisley Publ. Com., 1997.
22. *Epstein J. M.* Why Model? // J. Artif. Soc. Soc. Simul. – 2008. – **11**, № 4. – 4 p.
23. *Burylko O., Kazanovich Y., Borisyuk R.* Bifurcation study of phase oscillator systems with attractive and repulsive interaction // Phys. Rev. E. – 2014. – **90**, № 2. – 022911 p.
24. *Burylko O., Kazanovich Y., Borisyuk R.* Winner-take-all in a phase oscillator system with adaptation // Sci. Rep. – 2018. – **8**, № 1. – 416 p.
25. *Ashwin P., Bick C., Burylko O.* Identical phase oscillator networks: bifurcations, symmetry and reversibility for generalized coupling // Frontiers Appl. Math. Stat. – 2016. – **2**, № 7. – 30 p.

Одержано 05.03.2019,
після доопрацювання — 09.04.2019