УДК 517.925.5; 517.929; 517.929.21; 517.958: 531 – 133

# РІВНЯННЯ, МНОЖИНИ РОЗВ'ЯЗКІВ ЯКИХ ІНВАРІАНТНІ ВІДНОСНО ГРУПИ ВІДОБРАЖЕНЬ, ІЗОМОРФНОЇ ОДНОПАРАМЕТРИЧНІЙ ГРУПІ ПОВОРОТІВ

**В. Ю. Слюсарчук**

*Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування*
*вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, Україна*
*e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com*

We construct classes of systems of equations for which sets of their solutions are invariant under a group of mappings isomorphic to a one-parameter rotation group. It is shown that unbounded solutions of such systems are unstable. Applications of the obtained results to nonlinear mechanics are given.

Побудовано класи систем рівнянь, множини розв'язків яких інваріантні відносно групи відображень, ізоморфної однопараметричній групі поворотів. Показано, що необмежені розв'язки таких систем нестійкі. Наведено застосування отриманих результатів для нелінійної механіки.

**1. Позначення і досліджувані системи рівнянь.** Будемо використовувати множину $\mathbb{N}$ всіх натуральних чисел, множину $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел, множину $\mathbb{R}_+$ всіх невід'ємних чисел і простір $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, елементами якого є вектори $\vec{r} = (x, y)$ з координатами $x, y \in \mathbb{R}$ та з евклідовою нормою

$$|\vec{r}\,| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Позначимо через $G_1$ мультиплікативну групу всіх відображень $A_\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \varphi \in \mathbb{R}$, для кожного з яких

$$A_\varphi \vec{r} = A_\varphi(x, y) = (x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi). \tag{1}$$

Зазначимо, що $A_\varphi(x, y)$ — результат повороту точки (вектора) $(x, y)$ на кут $\varphi$ навколо центра обертання $(0, 0)$ [1] і відображення $A_\varphi$ визначається матрицею

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Зафіксуємо довільне число $m \in \mathbb{N}$ і розглянемо евклідовий простір $E^m = \underbrace{\mathbb{R}^2 \times \ldots \times \mathbb{R}^2}_{m \text{ разів}}$ елементів $\vec{R} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_m),\ \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_m \in \mathbb{R}^2$, з нормою

$$\|\vec{R}\|_{E^m} = \sqrt{|\vec{r}_1|^2 + \ldots + |\vec{r}_m|^2}.$$

Визначимо відображення $\mathcal{A}_{m,\varphi}\colon E^m \to E^m$ рівністю

$$\mathcal{A}_{m,\varphi}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_m) = (A_\varphi \vec{r}_1, \ldots, A_\varphi \vec{r}_m).$$

Очевидно, що відображення $\mathcal{A}_{m,\varphi}$ здійснює поворот вектора $(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_m)$ на кут $\varphi$ і множина $G_m = \{\mathcal{A}_{m,\varphi}\colon \varphi \in \mathbb{R}\}$ є мультиплікативною групою.

Зафіксуємо довільну непорожню множину $\Omega_m \subset E^m$, для якої

$$A_{m,\varphi}\Omega_m = \Omega_m \tag{2}$$

для всіх $\varphi \in \mathbb{R}$.

Позначимо через $\mathfrak{P}_{0,\Omega_m}$ і $\mathfrak{P}_{1,\Omega_m}$ множини неперервних відображень $P_0\colon \Omega_m \to \mathbb{R}_+$ і $P_1\colon \Omega_m \to \mathbb{R}^2$ відповідно, для яких

$$P_0(A\vec{r}_1, \ldots, A\vec{r}_m) = P_0(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_m)$$

і

$$P_1(A\vec{r}_1, \ldots, A\vec{r}_m) = AP_1(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_m)$$

для всіх $A \in G_1$ і $(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_m) \in \Omega_m$.

Аналогічно позначимо через $\mathfrak{F}_{0,k,\Omega_m}$ і $\mathfrak{F}_{1,k,\Omega_m}$, де $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, множини неперервних відображень $F_0\colon \Omega_m^k \to \mathbb{R}_+$ і $F_1\colon \Omega_m^k \to \mathbb{R}^2$ відповідно, де $\Omega_m^k = \underbrace{\Omega_m \times \ldots \times \Omega_m}_{k \text{ разів}}$, для яких

$$F_0\left(\mathcal{A}_{m,\varphi}\vec{R}_1, \ldots, \mathcal{A}_{m,\varphi}\vec{R}_k\right) = F_0\left(\vec{R}_1, \ldots, \vec{R}_k\right)$$

і

$$F_1\left(\mathcal{A}_{m,\varphi}\vec{R}_1, \ldots, \mathcal{A}_{m,\varphi}\vec{R}_k\right) = A_\varphi F_1\left(\vec{R}_1, \ldots, \vec{R}_k\right)$$

для всіх $\mathcal{A}_{m,\varphi} \in G_m$ і $\vec{R}_1, \ldots, \vec{R}_k \in \Omega_m$, де $\vec{R}_i = (\vec{r}_{i,1}, \ldots, \vec{r}_{i,m})$ і $\vec{r}_{i,1}, \ldots, \vec{r}_{i,m} \in \mathbb{R}^2$, $i = \overline{1,k}$.

Очевидно, що $\mathfrak{F}_{0,1,\Omega_m} = \mathfrak{P}_{0,\Omega_m}$ і $\mathfrak{F}_{1,1,\Omega_m} = \mathfrak{P}_{1,\Omega_m}$.

Крім елементів (векторів) просторів $E^m$ і $\mathbb{R}^2$ також будемо використовувати векторні функції $\vec{R}(t) = (\vec{r}_1(t), \ldots, \vec{r}_m(t))$ і $\vec{r}_1(t), \ldots, \vec{r}_m(t)$ зі значеннями в $E^m$ і $\mathbb{R}^2$ відповідно.

Зафіксуємо довільне число $t_0 \in \mathbb{R}$.

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} = P_i\left(\vec{r}_1(t), \ldots, \vec{r}_m(t)\right), \quad t \geq t_0, \\ i = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{3}$$

систему звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} = P_i\left(\vec{r}_1(t), \ldots, \vec{r}_m(t)\right), \quad t \in [t_0, +\infty) \setminus \{t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots\}, \\ \vec{r}_i(t_k+0) - \vec{r}_i(t_k-0) = I_{1,i,k}\left(\vec{R}(t_k-0), \left.\dfrac{d\vec{R}(t)}{dt}\right|_{t=t_k-0}\right), \\ \left.\dfrac{d\vec{r}_i(t)}{dt}\right|_{t=t_k+0} - \left.\dfrac{d\vec{r}_i(t)}{dt}\right|_{t=t_k-0} = I_{2,i,k}\left(\vec{R}(t_k-0), \left.\dfrac{d\vec{R}(t)}{dt}\right|_{t=t_k-0}\right), \\ i = \overline{1,m}, \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{4}$$

де $P_i \in \mathfrak{P}_{1,\Omega_m}$ для всіх $i = \overline{1,m},$ $(t_k)_{k\geq 1}$ — необмежена строго зростаюча послідовність дійсних чисел, для якої $t_1 > t_0$, і $I_{1,i,k}, I_{2,i,k} \in \mathfrak{F}_{1,2,\Omega_m}$ для всіх $i = \overline{1,m},$ $k \in \mathbb{N}$, і систему рівнянь із запізнювальним аргументом

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{r}_1(t)}{dt^2} = F_1\left(\vec{R}(t), \vec{R}(t-\tau_{21}(t)), \vec{R}(t-\tau_{31}(t)), \vec{R}(t-\tau_{41}(t)), \ldots, \vec{R}(t-\tau_{m1}(t))\right), \\ \dfrac{d^n\vec{r}_2(t)}{dt^n} = F_2\left(\vec{R}(t), \vec{R}(t-\tau_{12}(t)), \vec{R}(t-\tau_{32}(t)), \vec{R}(t-\tau_{42}(t)), \ldots, \vec{R}(t-\tau_{m2}(t))\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d^n\vec{r}_m(t)}{dt^n} = F_m\left(\vec{R}(t), \vec{R}(t-\tau_{1m}(t)), \vec{R}(t-\tau_{2m}(t)), \ldots, \vec{R}(t-\tau_{m-1\,m}(t))\right), \\ \tau_{ji}(t) = P_{ji}(\vec{r}_j(t-\tau_{ji}(t)), \vec{r}_i(t)), \quad i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,m}, \quad i \neq j, \end{cases} \tag{5}$$

де $F_i \in \mathfrak{F}_{1,m,\Omega_m}$ для всіх $i = \overline{1,m},$ $P_{ji} \in \mathfrak{F}_{0,2,\Omega_1}$ для всіх $i = \overline{1,m},$ $j = \overline{1,m},$ $i \neq j$, і $t \geq t_0$. Тут $\Omega_1 \neq \varnothing$, $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ і $A_\varphi\Omega_1 = \Omega_1$ для всіх $A_\varphi \in G_1$.

У третій із наведених систем невідомими є не лише векторні функції $\vec{r}_1(t), \ldots, \vec{r}_m(t)$, як і в перших двох системах, а й скалярні функції $\tau_{ji}(t)$, $i \neq j$, що ускладнює дослідження цієї системи. Однак завдяки вимогам до відображень $F_i$, $i = \overline{1,m}$, і $P_{ji}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m}$, $i \neq j$, можна знайти важливі властивості розв'язків цієї системи.

Метою даної статті є доведення нестійкості необмежених розв'язків систем (3) – (5).

**2. Інваріантність множин розв'язків систем (3) – (5) відносно групи $\tilde{G}_m$.** Нехай $C([t_0,+\infty),\mathbb{R}^2)$ і $C\big([t_0,+\infty),E^m\big)$ — множини неперервних на $[t_0,+\infty)$ функцій $\vec{x}(t)$ і $\vec{X}(t) = \big(\vec{x}_1(t),\ldots,\vec{x}_m(t)\big)$ зі значеннями в $\mathbb{R}^2$ і $E^m$ відповідно, де $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m \in C\big([t_0,+\infty),\mathbb{R}^2\big)$.

Позначимо через $\tilde{A}_\varphi$ і $\tilde{A}_{m,\varphi}$ відображення $\tilde{A}_\varphi\colon C\left([t_0,+\infty),\mathbb{R}^2\right) \to C\left([t_0,+\infty),\mathbb{R}^2\right)$ і $\tilde{A}_{m,\varphi}\colon C\big([t_0,+\infty),E^m\big) \to C\big([t_0,+\infty),E^m\big)$, що визначаються співвідношеннями

$$\big(\tilde{A}_\varphi\vec{x}\big)(t) = A_\varphi\vec{x}(t), \quad t \geq t_0,$$

і

$$\big(\tilde{A}_{m,\varphi}\vec{X}\big)(t) = \big(A_\varphi\vec{x}_1(t),\ldots,A_\varphi\vec{x}_m(t)\big), \quad t \geq t_0.$$

Множини таких відображень утворюють однопараметричні групи, які будемо позначати через $\tilde{G}_1$ і $\tilde{G}_m$ відповідно. Ці групи, очевидно, ізоморфні групам $G_1$ і $G_m$ відповідно [2].

Позначимо через $\mathcal{E}$ множину всіх розв'язків $\vec{X}(t) = (\vec{x}_1(t),\ldots,\vec{x}_m(t))$ довільної із систем (3) – (5). Будемо називати цю множину інваріантною відносно відображення $\tilde{A}_{m,\varphi}$, якщо розв'язками відповідної системи також будуть функції $\tilde{\vec{X}}(t) = \big(\tilde{A}_{m,\varphi}\vec{X}\big)(t)$ і множина таких функцій буде збігатися з $\mathcal{E}$. Якщо ця властивість виконується для кожного $\varphi \in \mathbb{R}$, то множину $\mathcal{E}$ будемо називати інваріантною відносно групи $\tilde{G}_m$.

Покажемо інваріантність $\mathcal{E}$ відносно групи $\tilde{G}_m$.

Спочатку розглянемо систему (3).

Завдяки вимогам до відображень $P_i$, $i = \overline{1,m}$, та теоремі Пеано про існування розв'язку задачі Коші [3] система (3) має нескінченну множину розв'язків.

Позначимо через

$$\begin{cases} \vec{a}_i = \vec{a}_i(t), \\ i = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{6}$$

довільний розв'язок цієї системи. Тоді

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{a}_i(t)}{dt^2} \equiv P_i\left(\vec{a}_1(t), \ldots, \vec{a}_m(t)\right), \\ i = \overline{1,m}, \end{cases}$$

і, отже,

$$\begin{cases} A_\varphi \, \dfrac{d^2\vec{a}_i(t)}{dt^2} \equiv A_\varphi P_i(\vec{a}_1(t), \ldots, \vec{a}_m(t)), \\ i = \overline{1,m}, \end{cases}$$

для кожного відображення $A_\varphi \in G_1$. Оскільки також для кожного $i = \overline{1,m}$

$$A_\varphi \, \frac{d^2\vec{a}_i(t)}{dt^2} \equiv \frac{d^2 A_\varphi \vec{a}_i(t)}{dt^2} \tag{7}$$

і завдяки включенню $P_i \in \mathfrak{P}_{1,\Omega_m}$

$$A_\varphi P_i(\vec{a}_1(t), \ldots, \vec{a}_m(t)) \equiv P_i(A_\varphi \vec{a}_1(t), \ldots, A_\varphi \vec{a}_m(t)), \tag{8}$$

то справедлива система тотожностей

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 A_\varphi \vec{a}_i(t)}{dt^2} \equiv P_i\left(A_\varphi \vec{a}_1(t), \ldots, A_\varphi \vec{a}_m(t)\right), \\ i = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Таким чином, векторні функції

$$\begin{cases} \vec{b}_i = A_\varphi \vec{a}_i(t), \\ i = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{9}$$

є розв'язком системи (3).

Отже, якщо (6) є розв'язком системи (3), то (9) також є розв'язком цієї системи.

Звідси та з довільності вибору розв'язку (6) системи (3) і відображення $A_\varphi \in G_1$ випливає, що справджується таке твердження.

**Теорема 1.** *Якщо $P_i \in \mathfrak{P}_{1,\Omega_m}$ для всіх $i = \overline{1,m}$, то множина розв'язків системи рівнянь (3) інваріантна відносно групи $\tilde{G}_m$.*

Далі розглянемо систему (4).

Завдяки вимогам до відображень $P_i,\ I_{1,i,k}$ і $I_{2,i,k},\ i = \overline{1,m},\ k \in \mathbb{N}$, теоремі Пеано про існування розв'язку задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь [3] та методам знаходження розв'язків диференціальних рівнянь із імпульсною дією, що викладені в [4], система (4) має нескінченну множину розв'язків.

Позначимо через

$$\begin{cases} \vec{\tilde{a}}_i = \vec{\tilde{a}}_i(t), \\ i = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{10}$$

довільний розв'язок цієї системи. Тоді

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{\hat{a}}_i(t)}{dt^2} = P_i\left(\vec{\hat{a}}_1(t),\ldots,\vec{\hat{a}}_m(t)\right), \quad t\in[t_0,+\infty)\setminus\{t_1,t_2,\ldots,t_k,\ldots\}, \\ \vec{\hat{a}}_i(t_k+0)-\vec{\hat{a}}_i(t_k-0) = I_{1,i,k}\left(\vec{\hat{A}}(t_k-0),\, \dfrac{d\vec{\hat{A}}(t)}{dt}\bigg|_{t=t_k-0}\right), \\ \dfrac{d\vec{\hat{a}}_i(t)}{dt}\bigg|_{t=t_k+0} - \dfrac{d\vec{\hat{a}}_i(t)}{dt}\bigg|_{t=t_k-0} = I_{2,i,k}\left(\vec{\hat{A}}(t_k-0),\, \dfrac{d\vec{\hat{A}}(t)}{dt}\bigg|_{t=t_k-0}\right), \\ i=\overline{1,m}, \quad k\in\mathbb{N}, \end{cases}$$

де $\vec{\hat{A}}(t) = (\vec{\hat{a}}_1(t),\ldots,\vec{\hat{a}}_m(t))$, і, отже,

$$\begin{cases} A_\varphi\dfrac{d^2\vec{\hat{a}}_i(t)}{dt^2} = A_\varphi P_i\left(\vec{\hat{a}}_1(t),\ldots,\vec{\hat{a}}_m(t)\right), \quad t\in[t_0,+\infty)\setminus\{t_1,t_2,\ldots,t_k,\ldots\}, \\ A_\varphi\vec{\hat{a}}_i(t_k+0)-A_\varphi\vec{\hat{a}}_i(t_k-0) = A_\varphi I_{1,i,k}\left(\vec{\hat{A}}(t_k-0),\, \dfrac{d\vec{\hat{A}}(t)}{dt}\bigg|_{t=t_k-0}\right), \\ A_\varphi\dfrac{d\vec{\hat{a}}_i(t)}{dt}\bigg|_{t=t_k+0} - A_\varphi\dfrac{d\vec{\hat{a}}_i(t)}{dt}\bigg|_{t=t_k-0} = A_\varphi I_{2,i,k}\left(\vec{\hat{A}}(t_k-0),\, \dfrac{d\vec{\hat{A}}(t)}{dt}\bigg|_{t=t_k-0}\right), \\ i=\overline{1,m}, \quad k\in\mathbb{N}, \end{cases}$$

для кожного відображення $A_\varphi \in G_1$.

На підставі тотожностей (7) і (8) та рівності

$$A_\varphi I_{j,i,k}\left(\vec{\hat{A}}(t_k-0),\, \dfrac{d\vec{\hat{A}}(t)}{dt}\bigg|_{t=t_k-0}\right) = I_{j,i,k}\left(A_{m,\varphi}\vec{\hat{A}}(t_k-0),\, \dfrac{dA_{m,\varphi}\vec{\hat{A}}(t)}{dt}\bigg|_{t=t_k-0}\right),$$

де $j=\overline{1,2}$, $i=\overline{1,m}$, $k\in\mathbb{N}$ і $\varphi\in\mathbb{R}$, що випливає із включень $I_{1,i,k}, I_{2,i,k} \in \mathfrak{F}_{1,2,\Omega_m}$, $i=\overline{1,m}$, $k\in\mathbb{N}$, отримуємо

$$\begin{cases} \dfrac{d^2A_\varphi\vec{\hat{a}}_i(t)}{dt^2} = P_i\left(A_\varphi\vec{\hat{a}}_1(t),\ldots,A_\varphi\vec{\hat{a}}_m(t)\right), \quad t\in[t_0,+\infty)\setminus\{t_1,t_2,\ldots,t_k,\ldots\}, \\ A_\varphi\vec{\hat{a}}_i(t_k+0)-A_\varphi\vec{\hat{a}}_i(t_k-0) = I_{1,i,k}\left(A_{m,\varphi}\vec{\hat{A}}(t_k-0),\, \dfrac{dA_{m,\varphi}\vec{\hat{A}}(t)}{dt}\bigg|_{t=t_k-0}\right), \\ \dfrac{dA_\varphi\vec{\hat{a}}_i(t)}{dt}\bigg|_{t=t_k+0} - \dfrac{dA_\varphi\vec{\hat{a}}_i(t)}{dt}\bigg|_{t=t_k-0} = I_{2,i,k}\left(A_{m,\varphi}\vec{\hat{A}}(t_k-0),\, \dfrac{dA_{m,\varphi}\vec{\hat{A}}(t)}{dt}\bigg|_{t=t_k-0}\right), \\ i=\overline{1,m}, \quad k\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Таким чином, система векторних функцій

$$\begin{cases} \vec{\hat{b}}_i = A_\varphi\vec{\hat{a}}_i(t), \\ i=\overline{1,m}, \end{cases} \tag{11}$$

є розв'язком системи (4).

Отже, якщо (10) є розв'язком системи (4), то (11) також є розв'язком системи (4).

Звідси та з довільності вибору розв'язку (10) системи (4) і відображення $A_\varphi \in G_1$ випливає, що справджується таке твердження.

**Теорема 2.** *Якщо* $P_i \in \mathfrak{P}_{1,\Omega_m}$ *і* $I_{1,i,k}, I_{2,i,k} \in \mathfrak{F}_{1,2,\Omega_m}$ *для всіх* $i = \overline{1,m}$ *і* $k \in \mathbb{N}$, *то множина розв'язків системи рівнянь (4) інваріантна відносно групи* $\tilde{G}_m$.

Аналогічну властивість мають розв'язки системи (5). Розглянемо цю систему.

Будемо вважати, що множина $\mathcal{E}$ розв'язків системи (5) не є порожньою. При виконанні додаткових умов щодо гладкості відображень $F_i \in \mathfrak{F}_{1,m,\Omega_m}$, $i = \overline{1,m}$, і $P_{ji} \in \mathfrak{F}_{0,2,\Omega_1}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m}$, $i \neq j$, за допомогою модернізації методів, що використовуються у теорії диференціально-функціональних рівнянь [5–9], можна показати, що $\mathcal{E} \neq \varnothing$.

Розглянемо довільний розв'язок системи (5):

$$\begin{cases} \vec{c}_i = \vec{c}_i(t), \\ i = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{12}$$

Тоді

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{c}_1(t)}{dt^2} \equiv F_1\left(\vec{C}(t), \vec{C}(t-\tau_{21}(t)), \vec{C}(t-\tau_{31}(t)), \vec{C}(t-\tau_{41}(t)), \ldots, \vec{C}(t-\tau_{m1}(t))\right), \\ \dfrac{d^2\vec{c}_2(t)}{dt^2} \equiv F_2\left(\vec{C}(t), \vec{C}(t-\tau_{12}(t)), \vec{C}(t-\tau_{32}(t)), \vec{C}(t-\tau_{42}(t)), \ldots, \vec{C}(t-\tau_{m2}(t))\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d^2\vec{c}_m(t)}{dt^2} \equiv F_m\left(\vec{C}(t), \vec{C}(t-\tau_{1m}(t)), \vec{C}(t-\tau_{2m}(t)), \ldots, \vec{C}(t-\tau_{m-1\,m}(t))\right), \\ \tau_{ji}(t) \equiv P_{ji}(\vec{c}_j(t-\tau_{ji}(t)), \vec{c}_i(t)), \\ i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,m}, \quad i \neq j, \end{cases} \tag{13}$$

де

$$\vec{C}(t) = (\vec{c}_1(t), \ldots, \vec{c}_m(t)).$$

Оскільки для відображень $A_\varphi \in G_1$ і $A_{m,\varphi} \in G_m$

$$A_{m,\varphi}\vec{C}(t) = (A_\varphi\vec{c}_1(t), \ldots, A_\varphi\vec{c}_m(t)),$$

$$A_\varphi \frac{d^2\vec{c}_i(t)}{dt^2} \equiv \frac{d^2 A_\varphi\vec{c}_i(t)}{dt^2}, \quad i = \overline{1,m},$$

$$A_\varphi F_1\left(\vec{C}(t), \vec{C}(t-\tau_{21}(t)), \vec{C}(t-\tau_{31}(t)), \vec{C}(t-\tau_{41}(t)), \ldots, \vec{C}(t-\tau_{m1}(t))\right) \equiv$$

$$\equiv F_1\left(A_{m,\varphi}\vec{C}(t), A_{m,\varphi}\vec{C}(t-\tau_{21}(t)), A_{m,\varphi}\vec{C}(t-\tau_{31}(t)), \ldots, A_{m,\varphi}\vec{C}(t-\tau_{m1}(t))\right),$$

$$A_\varphi F_2\left(\vec{C}(t), \vec{C}(t-\tau_{12}(t)), \vec{C}(t-\tau_{32}(t)), \vec{C}(t-\tau_{42}(t)), \ldots, \vec{C}(t-\tau_{m2}(t))\right) \equiv$$

$$\equiv F_2\left(A_{m,\varphi}\vec{C}(t), A_{m,\varphi}\vec{C}(t-\tau_{12}(t)), A_{m,\varphi}\vec{C}(t-\tau_{32}(t)), \ldots, A_{m,\varphi}\vec{C}(t-\tau_{m2}(t))\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_\varphi F_m\left(\vec{C}(t),\vec{C}(t-\tau_{1m}(t)),\vec{C}(t-\tau_{2m}(t)),\ldots,\vec{C}(t-\tau_{m-1\,m}(t))\right)\equiv$$

$$\equiv F_m\left(A_{m,\varphi}\vec{C}(t),A_{m,\varphi}\vec{C}(t-\tau_{1m}(t)),A_{m,\varphi}\vec{C}(t-\tau_{2m}(t)),\ldots,A_{m,\varphi}\vec{C}(t-\tau_{m-1\,m}(t))\right)$$

і

$$\tau_{ji}(t)\equiv P_{ji}\left(\vec{c}_j(t-\tau_{ji}(t)),\vec{c}_i(t)\right)\equiv P_{ji}\left(A_\varphi\vec{c}_j(t-\tau_{ji}(t)),A_\varphi\vec{c}_i(t)\right),\quad i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,m},\ \ i\neq j,$$

то завдяки (13) множина функцій

$$\begin{cases}\vec{d}_i=A_\varphi\vec{c}_i(t),\\ i=\overline{1,m},\end{cases}\tag{14}$$

також є розв'язком системи (5).

Отже, якщо (12) є розв'язком системи (5), то (14) також є розв'язком цієї системи.

Звідси та з довільності вибору розв'язку (12) системи (5) та відображень $A_\varphi\in G_1$ і $A_{m,\varphi}\in G_m$, випливає, що справджується таке твердження, аналогічне теоремам 1 і 2.

**Теорема 3.** *Якщо $F_i\in\mathfrak{F}_{1,m,\Omega_m}$ для всіх $i=\overline{1,m}$ і $P_{ji}\in\mathfrak{F}_{0,2,\Omega_1}$ для всіх $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,m}$, $i\neq j$, то множина розв'язків системи (5) інваріантна відносно групи $\tilde{G}_m$.*

**3. Умови нестійкості розв'язків систем (3) – (5).** Встановлена властивість інваріантності множин розв'язків систем (3) – (5) відносно групи поворотів $\tilde{G}_m$ дає змогу отримати умови нестійкості деяких розв'язків цих систем.

Справджуються такі твердження.

**Теорема 4.** *Нехай виконуються умови теореми 1. Якщо розв'язок (6) системи (3) необмежений і*

$$\sup_{t\geq t_0,\,i=\overline{1,m}}\left|\frac{d\vec{a}_i(t)}{dt}\right|<+\infty,\tag{15}$$

*то цей розв'язок нестійкий.*

**Теорема 5.** *Нехай виконуються умови теореми 2. Якщо розв'язок (10) системи (4) необмежений і*

$$\sup_{t\in[t_0,+\infty)\setminus\{t_1,t_2,\ldots,t_k,\ldots\},\,i=\overline{1,m}}\left|\frac{d\vec{\tilde{a}}_i(t)}{dt}\right|<+\infty,\tag{16}$$

*то цей розв'язок нестійкий.*

**Теорема 6.** *Нехай виконуються умови теореми 3. Якщо розв'язок (12) системи (5) необмежений і*

$$\sup_{t\geq t_0,\,i=\overline{1,m}}\left|\frac{d\vec{c}_i(t)}{dt}\right|<+\infty,\tag{17}$$

*то цей розв'язок нестійкий.*

Оскільки теорема 4 випливає з теореми 5 при $I_{1,i,k}=I_{2,i,k}=\vec{0},\ i=\overline{1,m},\ k\in\mathbb{N}$, то обмежимося доведенням лише теорем 5 і 6. Твердження цих теорем обґрунтовуються з використанням такої леми.

**Лема.** *Для кожних* $\vec{R} \in E^m$ *та* $\varphi \in \mathbb{R}$ *виконується співвідношення*

$$\left\|A_{m,\varphi}\vec{R} - \vec{R}\right\|_{E^m} = 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| \left\|\vec{R}\right\|_{E^m} \leq |\varphi|\left\|\vec{R}\right\|_{E^m}. \tag{18}$$

***Доведення.*** Зафіксуємо довільні $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ та $\varphi \in \mathbb{R}$. Правильним є співвідношення

$$|A_\varphi\vec{r} - \vec{r}\,| = 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| |\vec{r}\,| \leq |\varphi||\vec{r}\,|. \tag{19}$$

Справді, згідно з (1) та нерівністю

$$|\sin\varphi| \leq |\varphi|$$

(див., наприклад, [1]) маємо

$$|A_\varphi\vec{r} - \vec{r}\,| = \sqrt{(x\cos\varphi - y\sin\varphi - x)^2 + (x\sin\varphi + y\cos\varphi - y)^2} =$$

$$= \sqrt{(x(\cos\varphi - 1) - y\sin\varphi)^2 + (x\sin\varphi + y(\cos\varphi - 1))^2} =$$

$$= \sqrt{(x^2 + y^2)\,(\cos\varphi - 1)^2 + (x^2 + y^2)\sin^2\varphi} = \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{2(1 - \cos\varphi)} =$$

$$= |\vec{r}\,|\sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} = |\vec{r}\,|\,2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| \leq |\varphi||\vec{r}\,|.$$

Покажемо правильність співвідношення (18). Ураховуючи співвідношення (19), а також те, що $\left\|\vec{R}\right\|_{E^m} = \sqrt{|\vec{r}_1|^2 + \ldots + |\vec{r}_m|^2}$ для вектора $\vec{R} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_m) \in E^m$, де $\vec{r}_i \in \mathbb{R}^2$, $i = \overline{1, m}$, і

$$A_{m,\varphi}\vec{R} - \vec{R} = (A_\varphi\vec{r}_1 - \vec{r}_1, \ldots, A_\varphi\vec{r}_m - \vec{r}_m)\,,$$

отримуємо

$$\left\|A_{m,\varphi}\vec{R} - \vec{R}\right\|_{E^m} = \sqrt{|A_\varphi\vec{r}_1 - \vec{r}_1|^2 + \ldots + |A_\varphi\vec{r}_m - \vec{r}_m|^2} =$$

$$= \sqrt{\left(2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| |\vec{r}_1|\right)^2 + \ldots + 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| |\vec{r}_m|} = 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| \sqrt{|\vec{r}_1|^2 + \ldots + |\vec{r}_m|^2} =$$

$$= 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| \left\|\vec{R}\right\|_{E^m} \leq \varphi\left\|\vec{R}\right\|_{E^m}.$$

Лему доведено.

***Доведення теореми 5.*** Оскільки розв'язок (10) системи (4) необмежений і виконується співвідношення (16), то для векторної функції $\vec{\hat{A}}(t) = (\vec{\hat{a}}_1(t), \ldots, \vec{\hat{a}}_m(t))$, що є розв'язком системи (4),

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \left\|\vec{\hat{A}}(t)\right\|_{E^m} = +\infty. \tag{20}$$

Зафіксуємо довільне як завгодно мале число $\varepsilon > 0$. Завдяки лемі існує число

$$\varphi_\varepsilon \in (0, 1), \tag{21}$$

для якого

$$\left\| A_{m,\varphi_\varepsilon} \vec{\hat{A}}(t_0) - \vec{\hat{A}}(t_0) \right\|_{E^m} + \left\| A_{m,\varphi_\varepsilon} \left. \frac{d\vec{\hat{A}}(t)}{dt} \right|_{t=t_0} - \left. \frac{d\vec{\hat{A}}(t)}{dt} \right|_{t=t_0} \right\|_{E^m} < \varepsilon. \tag{22}$$

Згідно з п. 2 векторна функція $\vec{\hat{B}}(t) = A_{m,\varphi_\varepsilon} \vec{\hat{A}}(t)$ також є розв'язком системи (4), а згідно з твердженням леми для всіх $t \geq t_0$

$$\left\| \vec{\hat{B}}(t) - \vec{\hat{A}}(t) \right\|_{E^m} = \left\| A_{m,\varphi_\varepsilon} \vec{\hat{A}}(t) - \vec{\hat{A}}(t) \right\|_{E^m} = 2 \left| \sin \frac{\varphi_\varepsilon}{2} \right| \left\| \vec{\hat{A}}(t) \right\|_{E^m}. \tag{23}$$

Оскільки завдяки (21) $\sin \dfrac{\varphi_\varepsilon}{2} > 0$, то на підставі (20) і (23)

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \left\| A_{m,\varphi_\varepsilon} \vec{\hat{A}}(t) - \vec{\hat{A}}(t) \right\|_{E^m} = +\infty. \tag{24}$$

Отже, співвідношення (24) виконується, яким би малим у нерівності (22) не було число $\varepsilon > 0$. Це означає нестійкість розв'язку (10) системи (4).

Теорему 5 доведено.

***Доведення теореми 6.*** Оскільки розв'язок (12) системи (5) необмежений і виконується співвідношення (17), то для векторної функції $\vec{C}(t) = (\vec{c}_1(t), \ldots, \vec{c}_m(t))$, що є розв'язком системи (5),

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \left\| \vec{C}(t) \right\|_{E^m} = +\infty. \tag{25}$$

Зафіксуємо довільне як завгодно мале число $\varepsilon > 0$.

При обґрунтуванні нестійкості розв'язку $\vec{C}(t)$ системи (5) із-за наявності в (5) відхилень $\tau_{ji}(t)$ аргументу потрібно враховувати значення $\vec{C}(t)$ на деякому початковому проміжку $[t_0 - \Delta, t_0]$, довжина якого залежить від співвідношень

$$\tau_{ji}(t) = P_{ji}(\vec{r}_j(t - \tau_{ji}(t)), \vec{r}_i(t)), \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,m}, \quad i \neq j,$$

що є складовими досліджуваної системи.

Вважаємо, що початковий проміжок $[t_0 - \Delta, t_0]$ нам відомий і функція $\vec{C}(t)$ є неперервно-диференційовною на $[t_0 - \Delta, t_0]$. Завдяки такому припущенню існує число

$$\varphi_\varepsilon \in (0, 1), \tag{26}$$

для якого

$$2\left(\sin \frac{\varphi_\varepsilon}{2}\right) \left( \max_{s \in [t_0 - \Delta, t_0]} \left\| \vec{C}(s) \right\|_{E^m} + \max_{s \in [t_0 - \Delta, t_0]} \left\| \frac{d\vec{C}(s)}{ds} \right\|_{E^m} \right) < \varepsilon.$$

Тому на підставі леми

$$\max_{s \in [t_0 - \Delta, t_0]} \left\| A_{m,\varphi_\varepsilon} \vec{C}(s) - \vec{C}(s) \right\|_{E^m} + \max_{s \in [t_0 - \Delta, t_0]} \left\| A_{m,\varphi_\varepsilon} \frac{d\vec{C}(s)}{ds} - \frac{d\vec{C}(s)}{ds} \right\|_{E^m} < \varepsilon. \tag{27}$$

Це означає, що векторні функції $\vec{C}(t)$ і $A_{m,\varphi_\varepsilon} \vec{C}(t)$ та їхні похідні на початковому проміжку відрізняються (за нормою) менше, ніж на $\varepsilon$.

Згідно з п. 2 векторна функція $\vec{D}(t) = A_{m,\varphi_\varepsilon}\vec{C}(t)$ також є розв'язком системи (5), а згідно з твердженням леми

$$\left\|\vec{D}(t) - \vec{C}(t)\right\|_{E^m} = \left\|A_{m,\varphi_\varepsilon}\vec{C}(t) - \vec{C}(t)\right\|_{E^m} = 2\left|\sin\frac{\varphi_\varepsilon}{2}\right|\left\|\vec{C}(t)\right\|_{E^m} \tag{28}$$

для всіх $t \geq t_0$. Оскільки на підставі (26) $\sin\dfrac{\varphi_\varepsilon}{2} > 0$, то завдяки (25) і (28)

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\left\|A_{m,\varphi_\varepsilon}\vec{C}(t) - \vec{C}(t)\right\|_{E^m} = +\infty. \tag{29}$$

Отже, співвідношення (29) виконується, яким би малим у нерівності (27) не було число $\varepsilon > 0$. Це означає нестійкість розв'язку (12) системи (5).

Теорему 6 доведено.

***Наслідок 1.*** *Нехай виконуються умови теореми 1 і для розв'язку (6) системи (3) виконується співвідношення (15). Якщо цей розв'язок стійкий, то він обмежений.*

***Наслідок 2.*** *Нехай виконуються умови теореми 2 і для розв'язку (10) системи (4) виконується співвідношення (16). Якщо цей розв'язок стійкий, то він обмежений.*

***Наслідок 3.*** *Нехай виконуються умови теореми 3 і для розв'язку (12) системи (5) виконується співвідношення (17). Якщо цей розв'язок стійкий, то він обмежений.*

**4. Приклади систем із інваріантними відносно групи поворотів $\tilde{G}_{n+1}$ множинами розв'язків.**

***Приклад 1.*** Розглянемо матеріальні точки $M_0, M_1, \ldots, M_n$ з масами $m_0, m_1, \ldots, m_n$ відповідно, що рухаються в одній площині. Для вивчення руху точок використаємо прямокутну систему координат $x,\ y$ з початком координат у точці $O$. Систему координат вважатимемо інерціальною. Положення точок $M_i,\ i = \overline{0,n}$, визначається їх радіусами-векторами $\vec{r}_i(t) = (x_i(t), y_i(t)),\ i = \overline{0,n}$, де $x_i(t)$ і $y_i(t)$ — координати точки $M_i$ в момент часу $t$.

У класичній механіці, в якій вважається, що швидкість гравітації є нескінченною, рівняння руху розглянутої системи точок визначаються за допомогою другого закону Ньютона та закону всесвітнього тяжіння і мають вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} = \displaystyle\sum_{j\in\{0,1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)|^3}\left(\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)\right), \\ i = \overline{0,n}, \end{cases} \tag{30}$$

де $G$ — гравітаційна стала [10].

Використаємо множину

$$\check{\Omega}_{n+1} = \left\{(\vec{r}_0, \ldots, \vec{r}_n) \in E^{n+1} \colon \vec{r}_i \neq \vec{r}_j, i = \overline{0,n}, j = \overline{0,n}, i \neq j\right\},$$

що, очевидно, задовольняє співвідношення (2) при $m = n+1$.

Розглянемо відображення $P_{1,i} \colon \check{\Omega}_{n+1} \to \mathbb{R}^2,\ i = \overline{0,n}$, що визначаються за допомогою правих частин системи (30):

$$P_{1,i}(\vec{r}_0, \ldots, \vec{r}_n) = \sum_{j\in\{0,1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}(\vec{r}_j - \vec{r}_i), \quad i = \overline{0,n}. \tag{31}$$

Ці відображення є елементами множини $\mathfrak{P}_{1,\check{\Omega}_{n+1}}$, оскільки

$$A_\varphi \sum_{j\in\{0,1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}_j-\vec{r}_i) = \sum_{j\in\{0,1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} \frac{Gm_j}{|A_\varphi\vec{r}_j-A_\varphi\vec{r}_i|^3}\left(A_\varphi\vec{r}_j-A_\varphi\vec{r}_i\right), \quad i=\overline{0,n},$$

для кожного відображення $A_\varphi \in G_1$ і суми

$$\sum_{j\in\{0,1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}_j-\vec{r}_i), \quad i=\overline{0,n},$$

очевидно, є неперервними на $\check{\Omega}_{n+1}$. Тому згідно з теоремою 1 множина розв'язків системи (30) інваріантна відносно групи $\tilde{G}_m$ при $m=n+1$.

***Приклад 2.*** Розглянемо матеріальні точки $M_0, M_1, \ldots, M_n$ з масами $m_0, m_1, \ldots, m_n$, що, як і в прикладі 1, рухаються у площині. Для вивчення руху цих точок використаємо прямокутну систему координат $x,\ y$ з початком координат у точці $O$. Систему координат вважатимемо інерціальною. У статтях [11] і [12] показано, що у випадку, коли швидкість гравітації збігається зі швидкістю світла (це узгоджується з теорією відносності А. Ейнштейна та з дослідженнями С. М. Копейкіна й Е. Фомалонта про фундаментальну межу швидкості гравітації [13]), рух точок $M_0, M_1, \ldots, M_n$ описується системою рівнянь із відхилювальним аргументом

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} = \displaystyle\sum_{j\in\{0,1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_j(t-\tau_{ji}(t))-\vec{r}_i(t)|^3}\left(\vec{r}_j(t-\tau_{ji}(t))-\vec{r}_i(t)\right), \\ \tau_{ji}(t) = \dfrac{|\vec{r}_j(t-\tau_{ji}(t))-\vec{r}_i(t)|}{c}, \\ i=\overline{0,n}, \quad j=\overline{0,n}, \quad i\neq j, \end{cases} \tag{32}$$

де $c$ — швидкість гравітації.

У випадку $n=9$ систему рівнянь (30) можна використовувати для вивчення руху Сонця і планет, якщо не враховувати дію на них інших складових Сонячної системи (астероїдів, комет тощо) та Галактики [11].

Покажемо, що до системи (32) застосовні теореми 3 і 6.

Спочатку зазначимо, що правим частинам першого рівняння системи (32) відповідають ті ж самі відображення $P_{1,i}\colon \check{\Omega}_{n+1} \to \mathbb{R}^2$ (вони визначені рівностями (31)), що й у випадку системи (30). Ці відображення є елементами множини $\mathfrak{P}_{1,\check{\Omega}_{n+1}}$, що з'ясовано у прикладі 1.

Далі зауважимо, що відображення $P_{0,ji}\colon \check{\Omega}_2 \to \mathbb{R}_+,\ i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,n},\ i\neq j$, які відповідають правим частинам другого рівняння системи (32) і визначаються рівностями

$$P_{0,ji}(\vec{r}_j,\vec{r}_i) = \frac{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|}{c}, \quad i=\overline{0,n}, \quad j=\overline{0,n}, \quad i\neq j,$$

є елементами множини $\mathfrak{P}_{0,\check{\Omega}_2}$, оскільки ці відображення неперервні і

$$\frac{|A_\varphi\vec{r}_j-A_\varphi\vec{r}_i|}{c} = \frac{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|}{c}, \quad i=\overline{0,n}, \quad j=\overline{0,n}, \quad i\neq j.$$

Тоді за теоремою 3 множина розв'язків системи (32) інваріантна відносно групи $\tilde{G}_{n+1}$.

До системи (32) застосовна і теорема 6, якщо вимагати, щоб для цієї системи виконувалося співвідношення, аналогічне (17). У статті [12] показано, що у випадку двох тіл $(n = 1)$ система (32) може мати необмежені нестійкі розв'язки. Також необмежені розв'язки системи (32) при $n = 1$ є нестійкими і за теоремою 6.

Аналогічне твердження справджується для системи (32) і при довільному $n \in \mathbb{N}$ (за теоремою 6).

**Теорема 7.** *Якщо система рівнянь (32) має необмежений розв'язок, похідна якого обмежена на* $[t_0, +\infty)$, *то цей розв'язок нестійкий.*

**5. Зауваження та літературні вказівки.** Задача про інваріантність множин розв'язків систем рівнянь (3) – (5) відносно групи $\tilde{G}_m$ розглянута вперше. Така задача згідно з п. 4 потрібна як для класичної, так і для некласичної (зі скінченною швидкістю гравітації) небесної механіки і є корисною, наприклад, для теорії звичайних диференціальних рівнянь та теорії звичайних диференціальних рівнянь із імпульсною дією. Звідси, зокрема, випливає, що множини задач, до яких застосовні наведені в пп. 2 і 3 результати, не є порожніми.

Запропонований у п. 3 метод доведення нестійкості необмежених розв'язків систем із використанням інваріантності множин розв'язків цих систем відносно групи $\tilde{G}_m$ є новим.

Очевидно, що замість систем (3) – (5) можна розглядати складніші системи. Твердження пп. 2 і 3 та їхні обґрунтування зберігаються і для них.

Виконання співвідношень (15) і (17) в теоремах 4 – 6 є природним. Наприклад, у небесній механіці, що використовує як математичну модель руху $n$ тіл систему (32) (див. [11], [12]), швидкість руху тіл не може бути більшою швидкості руху світла $c$.

Теорема 7 узагальнює відповідний результат для двох тіл зі скінченною швидкістю гравітації (див. [12], п. 11).

### Література


1. А. Д. Мышкис, *Лекции по высшей математике*, Москва, Наука (1969).
2. Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, Гостехиздат, Москва (1954).
3. А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк, *Диференціальні рівняння*, Либідь, Київ (2003).
4. А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища шк., Киев (1987).
5. Р. Беллман, К. Л. Кук, *Дифференциально-разностные уравнения*, Мир, Москва (1967).
6. В. П. Рубаник, *Колебания квазилинейных систем с запаздыванием*, Наука, Москва (1971).
7. Л. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин, *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Наука, Москва (1971).
8. Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, Москва (1984).
9. В. Ю. Слюсарчук, *Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією*, Вид-во Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, Рівне (2003).
10. В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. Н. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, УРСС, Москва (2002).
11. В. Ю. Слюсарчук, *Математична модель Сонячної системи з урахуванням швидкості гравітації*, Нелін. коливання, **21**, № 2, 238 – 261 (2018).
12. В. Ю. Слюсарчук, *Некеплеровість та нестійкість руху двох тіл, спричинені скінченністю швидкості гравітації*, Нелін. коливання, **21**, № 3, 397 – 419 (2018).
13. С. М. Копейкин, Э. Фомалонт, *Фундаментальный предел скорости гравитации и его измерение*, Земля и Вселенная, **3** (2004); http://ziv.telescopes.ru/rubric/hypothesis/?pub=1


*Одержано 01.02.19*