УДК 517.9

МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ЛОТКИ – ВОЛЬТЕРРА З ДИФУЗІЄЮ ТА НЕФІКСОВАНИМИ МОМЕНТАМИ ІМПУЛЬСНОЇ ДІЇ

А. В. Дворник, В. І. Ткаченко

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна
e-mail: a.dvornyk@gmail.com
vitk@imath.kiev.ua

We study the existence and asymptotic stability of strongly positive piecewise continuous almost periodic solutions for Lotka – Volterra systems of differential equations with diffusion and non-fixed moments of impulsive action.

Встановлено умови існування та асимптотичної стійкості строго додатних кусково-неперервних майже періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь Лотки – Вольтерра з дифузією та нефіксованими моментами імпульсної дії.

1. Вступ. Розглянемо систему диференціальних рівнянь Лотки – Вольтерра з дифузією

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mu_1 \Delta u(t,x) + u(t,x)\left(a_1(t,x) - b_1(t,x)u(t,x) - c_1(t,x)v(t,x)\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \mu_2 \Delta v(t,x) + v(t,x)\left(a_2(t,x) - b_2(t,x)u(t,x) - c_2(t,x)v(t,x)\right), \tag{2}$$

$x \in \Omega,\ t \neq \tau_k\big(u(t,.), v(t,.)\big)$, з крайовими умовами Неймана

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \left.\frac{\partial v(t,x)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3}$$

та імпульсною дією у нефіксовані моменти часу

$$u(t+0,x) - u(t,x) = d_{1k}u(t,x) + q_{1k}, \tag{4}$$

$$v(t+0,x) - v(t,x) = d_{2k}v(t,x) + q_{2k}, \qquad t = \tau_k\big(u(t,.), v(t,.)\big), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з гладкою границею $\partial\Omega$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\partial/\partial n$ — похідна вздовж зовнішньої нормалі, $\Delta u = \partial^2 u/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2 u/\partial x_n^2$. Імпульсна дія відбувається в моменти часу $t = \tau_k\big(u(t,.), v(t,.)\big)$, які залежать від розв'язків. Ці моменти рівномірно відділені один від іншого.

Система (1) – (5) описує взаємодію двох біологічних видів, які нерівномірно розподілені у просторі і зазнають короткочасного зовнішнього впливу в моменти часу τ_k. Функції $u(t,x)$ і $v(t,x)$ визначають щільність двох біологічних видів у момент часу t і просторовій точці x. Виходячи з біологічної інтерпретації, ці функції невід'ємні. Додатні сталі μ_1 і μ_2 є коефіцієнтами дифузії відповідно першого і другого виду. Логістичні вирази $u(a_1 - b_1 u)$ і $v(a_2 - c_2 v)$ характеризують відтворення першого та другого видів. Члени $c_1 v$ і $b_2 u$ показують гальмівний вплив другого виду на перший та першого виду на другий відповідно. Зазначимо роботи [1 – 5], присвячені дослідженню систем з імпульсами та дифузією, які описують еволюцію біологічних видів.

У системи рівнянь з нефіксованими моментами імпульсної дії розв'язки, які мають різні початкові значення, мають і різні точки розривів. Також у таких системах може з'являтися так званий феномен биття: розв'язок може перетинати поверхню $t = \tau_k(u, v)$ кілька разів чи навіть нескінченну кількість разів [6, 7].

Останнім часом активно вивчаються майже періодичні розв'язки різних класів систем із імпульсною дією (див., наприклад, [8 – 16]).

Метою даної роботи є знаходження умов існування та стійкості строго додатного кусково-неперервного майже періодичного розв'язку системи рівнянь (1) – (5). Ми використовуємо концепцію кусково-неперервних майже періодичних функцій у сенсі робіт [6, 17]. Слідуючи ідеям робіт [10, 18], поряд із системою з нефіксованими моментами імпульсної дії (1) – (5) ми розглянемо множину систем із імпульсною дією у фіксовані моменти часу. Для кожної з таких систем у [19] побудовано строго додатнозначні кусково-неперервні майже періодичні розв'язки. Далі, використовуючи ці майже періодичні розв'язки, буде побудовано деяке відображення у просторі майже періодичних послідовностей зі значеннями у просторі функцій, означених на Ω. Нерухома точка цього відображення відповідає майже періодичному розв'язку системи (1) – (5). Також ми дослідимо стійкість отриманого майже періодичного розв'язку. З робіт [9, 20] будемо використовувати означення стійкості для розв'язків системи з нефіксованими моментами імпульсної дії, де враховано відмінність точок розриву різних розв'язків системи рівнянь.

2. Основні означення та попередні результати. Нехай $\mathbb{R}$ та $\mathbb{Z}$ — множини дійсних і цілих чисел відповідно. Позначимо через $\|.\|$ норму в $\mathbb{R}^n$ чи відповідну норму в просторі матриць, а через $\|.\|_C$ — норму простору $C(\bar{\Omega})$ неперервних функцій на $\bar{\Omega}$. Для обмеженої функції $g(t, x)$ позначимо

$$g^L = \inf_{t,x} g(t, x), \qquad g^M = \sup_{t,x} g(t, x).$$

Нехай X — банахів простір з нормою $\|.\|_X$. Будемо розглядати простір $\mathcal{PC}(J, X)$, $J \subset \mathbb{R}$, усіх обмежених кусково-неперервних функцій $z\colon J \to X$ таких, що:

а) множина $\{\tau_j \in J\colon \tau_{j+1} > \tau_j, j \in \mathbb{Z}\}$ моментів розривів функції z не має скінченних граничних точок;

б) функція $z(t)$ є неперервною зліва: $z(\tau_j - 0) = z(\tau_j)$, та існує $\lim_{t\to\tau_j+0} z(t) = z(\tau_j + 0)$.

Будемо використовувати норму $\|z\|_{PC} = \sup_{t\in J} \|z(t)\|_X$ у просторі $\mathcal{PC}(J, X)$.

Означення 1. *Ціле число p називається ε-майже періодом послідовності $\{x_k\}$, $x_k \in X$, якщо*

$$\|x_{k+p} - x_k\|_X < \varepsilon \tag{6}$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Послідовність $\{x_k\}$ називається майже періодичною, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина її ε-майже періодів, тобто для кожного $\varepsilon > 0$ існує $l > 0$ таке, що на кожному інтервалі дійсної осі довжини l існує ціле число p, яке задовольняє (6) для всіх $k \in \mathbb{Z}$.

Означення 2. *Строго зростаюча послідовність $\{\tau_k\}$ дійсних чисел має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, якщо для довільного додатного ε існує відносно щільна множина ε-майже періодів, спільних для всіх послідовностей $\{\tau_k^j\}$, де $\tau_k^j = \tau_{k+j} - \tau_k$, $j \in \mathbb{Z}$.*

Як показано в [21], послідовність $\{\tau_k\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць тоді і тільки тоді, коли $\tau_k = ak + c_k$, де $\{c_k\}$ — майже періодична послідовність, a — додатне число.

За лемою 22 з роботи [6, с. 192], для послідовності $\{\tau_j\}$ з рівномірно майже періодичними послідовностями різниць існує границя

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\mathrm{i}(t,t+T)}{T}=q$$

рівномірно відносно $t\in\mathbb{R}$, де $\mathrm{i}(s,t)$ — число точок τ_k з інтервалу (s,t).

Означення 3. *Неперервна функція $\psi\colon\mathbb{R}\to X$ майже періодична за Бором, якщо для довільного $\varepsilon>0$ існує відносно щільна множина Γ ε-майже періодів таких, що коли $\tau\in\Gamma$, тоді $\|\psi(t+\tau)-\psi(t)\|_X<\varepsilon$ для всіх $t\in\mathbb{R}$.*

Означення 4 [6]. *Функція $\varphi\in\mathcal{PC}(\mathbb{R},X)$ називається w-майже періодичною, якщо:*

а) строго зростаюча послідовність $\{\tau_k\}$ моментів розриву функції $\varphi(t)$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць;

б) для довільного $\varepsilon>0$ існує додатне число $\delta=\delta(\varepsilon)$ таке, що коли точки t' і t'' належать одному інтервалу неперервності та $|t'-t''|<\delta$, тоді $\|\varphi(t')-\varphi(t'')\|_X<\varepsilon$;

в) для довільного $\varepsilon>0$ існує відносно щільна множина Γ ε-майже періодів таких, що коли $\tau\in\Gamma$, тоді $\|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)\|_X<\varepsilon$ для всіх $t\in\mathbb{R}$, які задовольняють умову $|t-\tau_k|\geq\varepsilon$, $k\in\mathbb{Z}$.

Будемо розглядати систему (1)–(5) з такими умовами:

H$_1$) Додатнозначні обмежені функції $a_i(t,x)$, $b_i(t,x)$ і $c_i(t,x)$, $i=1,2$, неперервно диференційовні по $t\in\mathbb{R}$ і $x\in\Omega$ та майже періодичні за Бором по t рівномірно по $x\in\Omega$.

H$_2$) Позначимо $U_\rho=\{u\in C(\bar\Omega)\colon \|u\|_C\leq\rho,\ u(x)\geq 0, x\in\bar\Omega\}$, де ρ — деяке додатне число. Припустимо, що поверхні імпульсів мають вигляд

$$\tau_j(u,v)=\theta_j+r_j\int\limits_\Omega\left(u^2(\xi)+v^2(\xi)\right)d\xi,$$

де строго зростаюча послідовність дійсних чисел $\{\theta_j\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, а послідовність $\{r_j\}$ майже періодична. Крім того, існують сталі $\tilde\Theta>\tilde\theta>0$ і $\Theta>\theta>0$ такі, що виконуються нерівності $\tilde\Theta\geq\theta_j-\theta_{j-1}\geq\tilde\theta$, $j\in\mathbb{Z}$, і

$$\Theta=\tilde\Theta+2r\rho^2|\Omega|\geq\tau_j(u,v)-\tau_{j-1}(u,v)\geq\theta=\tilde\theta-2r\rho^2|\Omega|>0 \tag{7}$$

для всіх $u,v\in U_\rho$, $j\in\mathbb{Z}$. Тут $r=\sup_j|r_j|$, $|\Omega|$ — міра множини Ω.

H$_3$) Виконуються нерівності $d_{ik}>-1$, $q_{ik}\geq 0$, $i=1,2$, $k\in\mathbb{Z}$, і послідовності дійсних чисел $\{d_{1k}\},\{d_{2k}\},\{q_{1k}\},\{q_{2k}\}$ майже періодичні. Позначимо $d=\sup_{ik}|d_{ik}|$, $q=\sup_{ik}q_{ik}$.

Вектор-функція $(u(t,x),v(t,x))$ є класичним розв'язком системи без імпульсів (1)–(3), якщо вона двічі неперервно диференційовна по $x\in\Omega$, неперервно диференційовна по $x\in\bar\Omega$, неперервно диференційовна по $t>0$ і задовольняє систему (1), (2) та крайові умови (3).

Означення 5. *Вектор-функція $(u,v)\colon\Omega\times[t_0,t_0+\alpha]\to\mathbb{R}^2$, де $\alpha>0$, є розв'язком імпульсної системи (1)–(5), якщо виконуються такі умови:*

а) множина $T=\{t\in[t_0,t_0+\alpha],\ t=\tau_k(u(t,.),v(t,.))$ для деякого $k\}$ точок імпульсної дії скінченна (можливо, порожня);

б) при $t\notin T$ функція (u,v) є класичним розв'язком системи без імпульсів (1)–(3);

в) для $t\in T$ функція (u,v) задовольняє умови (4), (5).

Якщо додатково функція (u,v) задовольняє умову

$$u(t_0,x)=u_0(x),\qquad v(t_0,x)=v_0(x), \tag{8}$$

то вона є розв'язком початкової задачі (1)–(5), (8).

Перепишемо систему (1) – (5) у абстрактній формі. Позначимо $w = (u, v) \in L^p(\Omega) \times \times L^p(\Omega) = X$, де $p > n$ — натуральне число. Норму в просторі $X = L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$ будемо позначати $\|.\|_0$.

Запишемо систему (1) – (5), (8) у вигляді

$$\frac{dw}{dt} + A_1 w = F(t, w), \quad t \neq \tau_j(w(t)), \tag{9}$$

$$w(t+0) = w(t) + G_j(w(t)), \qquad t = \tau_j(w(t)), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{10}$$

$$w(0) = w_0, \tag{11}$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\mu_1 \Delta + \beta & 0 \\ 0 & -\mu_2 \Delta + \beta \end{pmatrix}$$

$$F(t, w) = \begin{pmatrix} u(a_1(t,.) + \beta - b_1(t,.)u - c_1(t,.)v) \\ v(a_2(t,.) + \beta - b_2(t,.)u - c_2(t,.)v) \end{pmatrix}$$

$$G_j(w(\tau)) = \begin{pmatrix} d_{1j} u(\tau,.) + q_{1j} \\ d_{2j} v(\tau,.) + q_{2j} \end{pmatrix} = D_j w(\tau) + Q_j,$$

β — деяке додатне число. Легко бачити, що $d = \sup_j \|D_j\|,\ q = \sup_j \|Q_j\|$.

Оператор A_1 має область означення

$$D(A_1) = \left\{ \xi = (\xi_1, \xi_2) \colon \xi_i \in W^{2,p}(\Omega),\ \frac{\partial \xi_i}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = 0,\ i = 1, 2 \right\},$$

де $W^{2,p}(\Omega)$ — простір Соболєва функцій з $L^p(\Omega)$, які мають дві узагальнені похідні. Оператор A_1 секторіальний з $\operatorname{Re}\xi \geq \beta$ для $\xi \in \sigma(A_1)$, де $\sigma(A_1)$ — спектр оператора A_1.

Для оператора A_1 означаються степені $A_1^\alpha,\ \alpha \geq 0$, та відповідні їм області означення $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$ з нормою $\|z\|_\alpha = \|A_1^\alpha z\|_0$ [22]. Оператор $(-A_1)$ є генератором аналітичної напівгрупи $e^{-A_1 t}$, для якої виконуються рівність $e^{-A_1 t} A_1^\alpha z = A_1^\alpha e^{-A_1 t} z$, де $z \in X^\alpha,\ t > 0$ і нерівності [22]

$$\left\| A_1^\alpha e^{-A_1 t} \right\|_0 \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\beta t}, \qquad t > 0, \quad \alpha > 0, \tag{12}$$

$$\left\| \left(e^{-A_1 t} - I\right) z \right\|_0 \leq \frac{1}{\alpha} C_{1-\alpha} t^\alpha \left\| A_1^\alpha z \right\|_0, \qquad t > 0, \quad \alpha \in (0, 1], \quad z \in X^\alpha,$$

де $C_\alpha > 0$ обмежена при $\alpha \to 0+$. Також виконується нерівність $\|z\|_0 \leq L_0 \|z\|_\alpha$ з деякою сталою $L_0 > 0$ для $z \in X^\alpha$.

Під нерівністю $w_0 \geq 0$ для $w_0 = (u_0, v_0) \in X$ розуміємо $u_0(x) \geq 0,\ v_0(x) \geq 0$ для майже всіх $x \in \Omega$.

Виберемо α таким, що

$$2\alpha - \frac{n}{p} \geq \nu > 0, \quad \alpha < 1. \tag{13}$$

Аналогічно до [23] показуємо, що коли початкова функція задовольняє умову $w_0 \in X^\alpha$, $w_0 \geq 0$, тоді задача без імпульсів (1) – (3), (8) має єдиний класичний розв'язок $(u(t, x), v(t, x))$, який існує для всіх $t > 0$. При виконанні нерівностей (13) простір X^α неперервно вкладений у C^ν. Тому якщо $w \in X^\alpha$, $\|w\|_\alpha \le \rho_1$ для деякого $\rho_1 > 0$, то $w = (u,v) \in C^\nu$ і $\|w\|_C = \max\{\|u\|_C, \|v\|_C\} \le \rho$.

Розв'язок початкової задачі (11) рівняння (9), (10) задовольняє інтегральне рівняння

$$w(t,w_0) = e^{-A_1 t} w_0 + \int\limits_0^t e^{-A_1(t-s)} F(s,w(s))ds + \sum_{0<\tau_j<t} e^{-A_1(t-\tau_j)} G_j(w(\tau_j)). \tag{14}$$

Означення 6. *Розв'язок $w_0(t)$ рівняння (9), (10), означений для всіх $t \ge t_0$, $\tau_j(w_0(t_0)) \ne t_0$, $j \in \mathbb{Z}$, називається стійким за Ляпуновим у просторі X^α, якщо для довільних $\varepsilon > 0$ і $\eta > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon,\eta)$ таке, що інший довільний розв'язок $w(t)$ з початковою умовою $\|w_0(t_0) - w(t_0)\|_\alpha < \delta$ задовольняє нерівність $\left\|w_0(t) - w(t)\right\|_\alpha < \varepsilon$ для всіх $t \ge t_0$ таких, що $\left|t - \tau_j^0\right| > \eta$, де τ_j^0 — точки, в яких розв'язок $w_0(t)$ перетинає поверхні $t = \tau_j(w)$, $j \in \mathbb{Z}$.*

Розв'язок $w_0(t)$ називається асимптотично стійким, якщо він стійкий і існує $\delta_0 > 0$ таке, що для кожних $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, існує $T = T(\varepsilon,\eta) > 0$ таке, що для будь-якого іншого розв'язку $w(t)$ системи з початковими значеннями $\|w_0(t_0) - w(t_0)\|_\alpha < \delta_0$ виконується нерівність $\|w_0(t) - w(t)\| < \varepsilon$ для $t \ge t_0 + T$ і $\left|t - \tau_j^0\right| > \eta$.

При дослідженні стійкості розв'язків імпульсних еволюційних рівнянь будемо використовувати таку версію узагальненої нерівності Гронуолла [20, 22].

Лема 1. *Нехай $a_1 \ge 0$, $a_2 \ge 0$, $b > 0$, α, $\beta \in [0,1)$, $Q \in (0,\infty)$ і локально інтегровна на $0 \le t \le Q$ невід'ємна функція $y(t)$ задовольняє на цьому інтервалі нерівність*

$$y(t) \le a_1 + a_2 t^{-\alpha} + b \int\limits_0^t (t-s)^{-\beta} y(s)\, ds.$$

Тоді існує додатна стала $\tilde{C} = \tilde{C}(\beta,b,Q) < \infty$ така, що

$$y(t) \le \left(a_1 + \frac{a_2}{(1-\alpha)t^\alpha}\right) \tilde{C}(\beta,b,Q) \le \left(a_1 + \frac{a_2}{t^\alpha}\right) \tilde{C}_1,$$

де $\tilde{C}_1 = \tilde{C}(\beta,b,Q)/(1-\alpha)$.

3. Система з фіксованими моментами імпульсів. Розглянемо систему Лотки – Вольтерра (1) – (3) з імпульсною дією у фіксовані моменти імпульсної дії θ_k, $k \in \mathbb{Z}$:

$$u(\theta_k + 0, x) - u(\theta_k, x) = d_{1k} u(\theta_k, x) + q_{1k}, \tag{15}$$

$$v(\theta_k + 0, x) - v(\theta_k, x) = d_{2k} v(\theta_k, x) + q_{2k}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

Означення 7. *Система називається перманентною, якщо існують додатні сталі m_0 і M_0 такі, що для кожного розв'язку системи з невід'ємними початковими функціями $u_0(x) \not\equiv 0$, $v_0(x) \not\equiv 0$ існує $\bar{t} = \bar{t}(u_0,v_0)$ таке, що*

$$m_0 \le u(t,x) \le M_0, \qquad m_0 \le v(t,x) \le M_0$$

для $x \in \bar{\Omega}$, $t \ge \bar{t}$.

У роботі [19] доведено такі умови перманентності.

Лема 2. *Для кожного розв'язку системи (1)–(3), (15)–(16) з невід'ємними початковими функціями* $(u_0(x), v_0(x))$ *існує* $\bar{t} = \bar{t}(u_0, v_0)$ *таке, що*

$$u(t,x) \le M_0, \quad v(t,x) \le M_0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t \ge \bar{t},$$

де

$$M_0 = \max\{A, A(1+d)+q\}, \qquad A = \frac{a^M}{b^L\left(1 - e^{-a^M\theta}\right)},$$
$$a^M = \max\left(a_1^M, a_2^M\right), \qquad b^L = \min\left(b_1^L, c_2^L\right).$$

Лема 3. *Нехай виконується одна з умов:*

(a_1) виконуються нерівності

$$a_1^L - c_1^M M_0 + \sigma_1 > 0, \qquad a_2^L - b_2^M M_0 + \sigma_2 > 0,$$

де

$$\sigma_i = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{s \le \theta_j < s+T} \ln(1+d_{ij}) = \lim_{T\to\infty} \sum_{s\le\theta_j<s+T} \frac{\ln(1+d_{ij})}{\mathfrak{i}(s,s+T)} \lim_{T\to\infty} \frac{\mathfrak{i}(s,s+T)}{T},$$

$\mathfrak{i}(t,t+T)$ — *число точок* θ_k *з інтервалу* $(t,t+T)$;

(a_2) виконується нерівність $q_0 = \inf_{ij} q_{ij} > 0$.

Тоді існує $m_0 > 0$ *таке, що для кожного розв'язку системи (1)–(3), (15)–(16) з невід'ємними початковими функціями* $(u_0(x), v_0(x)), u_0(x) \not\equiv 0, v_0(x) \not\equiv 0$, *існує* $\bar{t} = \bar{t}(u_0, v_0)$ *таке, що*

$$u(t,x) \ge m_0, \quad v(t,x) \ge m_0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t \ge \bar{t}.$$

Для системи з фіксованими моментами імпульсної дії $t = \theta_k,\ k \in \mathbb{Z}$, у роботі [19] доведено таку теорему.

Теорема 1. *Нехай для системи (1)–(3), (15)–(16) виконуються умови* H_1–H_3 *(при* $r_j \equiv 0,\ j \in \mathbb{Z}$*) і:*

1) система перманентна: існують додатні сталі m_0 *і* M_0 *такі, що кожний розв'язок з невід'ємними не рівними тотожно нулю початковими функціями* $(u_0(x), v_0(x))$, *починаючи з деякого моменту часу* $\bar{t} = \bar{t}(u_0, v_0)$, *залишається в множині*

$$E_0 = \{(u,v)\colon m_0 \le u \le M_0,\ m_0 \le v \le M_0\},$$

2) має місце нерівність

$$a^M - \left(2b^L + c^L\right) m_0 + c^M M_0 + \sigma < 0, \qquad \sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}, \tag{17}$$

де

$$a^M = \max\left(a_1^M, a_2^M\right), \quad b^L = \min\left(b_1^L, c_2^L\right), \quad c^L = \min\left(c_1^L, b_2^L\right), \quad c^M = \max\left(c_1^M, b_2^M\right),$$
$$\sigma_i = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{0<\theta_j<T} \ln(1+d_{ij}), \quad i = 1,2.$$

Тоді розв'язки системи з початковими функціями зі значеннями у множині E_0 рівномірно асимптотично стійкі. Для двох розв'язків $(u_1(t,x), v_1(t,x))$ і $(u_2(t,x), v_2(t,x))$, які мають значення в множині E_0, виконується нерівність

$$\sup_x \big(|u_1(t,x) - u_2(t,x)| + |v_1(t,x) - v_2(t,x)|\big) \leq$$
$$\leq M_1 e^{-\beta_1(t-t_0)} \sup_x \big(|u_1(t_0,x) - u_2(t_0,x)| + |v_1(t_0,x) - v_2(t_0,x)|\big) \tag{18}$$

з деякими додатними сталими M_1 і β_1.

Система має єдиний асимптотично стійкий кусково-неперервний w-майже періодичний розв'язок зі значеннями у множині E_0.

За означенням норми в просторі X^α з формули (14) отримуємо

$$\|w(t,w_0)\|_\alpha \leq \left\|e^{-A_1(t-t_0)}\right\|_0 \|w_0\|_\alpha + \int\limits_{t_0}^{t} \left\|A_1^\alpha e^{-A_1(t-s)} F(s, w(s))\right\|_0 ds +$$
$$+ \sum_{t_0<\theta_j<t} \left\|A_1^\alpha e^{-A_1(t-\theta_j)} (D_j w(\theta_j) + Q_j)\right\|_0.$$

Розв'язок $w(t,w_0)$ з $w_0 = (u_0, v_0) \in X^\alpha$, $\|w_0\|_C = \max\{\|u_0\|_C, \|v_0\|_C\} \leq M_0$ за лемою 2 обмежений у рівномірній нормі $\|w(t,w_0)\|_C \leq M_0$, $t \geq t_0$. Покажемо, що він обмежений і в X^α-нормі. Для $t \in [\theta_k - \theta/2, \theta_k]$ виконується $(t-\theta_j)^{-1} \leq 2/\theta$, $j < k$. З останньої нерівності і (12) отримуємо оцінку для $t \in [\theta_k - \theta/2, \theta_k]$:

$$\|w(t,w_0)\|_\alpha \leq C_0 e^{-\beta(t-t_0)} \|w_0\|_\alpha + C_\alpha F_0 \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-s)} (t-s)^{-\alpha} ds +$$
$$+ C_\alpha (dM_0 + q)(2/\theta)^\alpha \sum_{t_0<\theta_j<t} e^{-\beta(t-\theta_j)} \leq \tilde{N}_0,$$

де $F_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}, \|w\|_C \leq \rho} \|F(s,w)\|_0$.

Отже, $\|w(\theta_j, w_0)\|_\alpha \leq \tilde{N}_0$ для всіх натуральних j. З (10) отримуємо $\|w(\theta_j + 0, w_0)\|_\alpha \leq$ $\leq d\tilde{N}_0 + q$. Звідси випливає $\|w(t,w_0)\|_\alpha \leq \tilde{N}_1$, $t \geq t_0$, з деякою додатною сталою $\tilde{N}_1$. З обмеженості множини у просторі X^β випливає її компактність у просторі X^α, $\alpha < \beta$. Тому траєкторії $w(t)$ передкомпактні в X^α, $\alpha > 0$.

Отже, існує таке $\rho_1 > 0$, що $\|w\|_\alpha \leq \rho_1$ для всіх $w \in C(\Omega) \cap X^\alpha$ з $\|w\|_C \leq \rho$.

Тепер оцінимо розв'язок у нормі $\|.\|_1$. Скористаємося такими оцінками. З [22] (Theorem 3.5.2) випливає, що для кожного $\mu \in [0,1)$ існує додатна стала $\tilde{K}_2$, яка не залежить від $w_0 = w(\theta_j + 0)$, $\|w_0\|_\alpha \leq \rho_1$, така, що

$$\left\|\frac{d}{ds} w(s, w_0)\right\|_\mu \leq \tilde{K}_2 (s-\theta_j)^{\alpha-\mu-1}, \qquad s \in (\theta_j, \theta_{j+1}], \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Відповідно для $s \in [\theta_j + \theta/2, \theta_{j+1}]$ виконується нерівність

$$\left\|\frac{dw(s,w_0)}{ds}\right\|_\alpha \leq \frac{2\tilde{K}_2}{\theta}. \tag{19}$$

З (9) отримуємо

$$\|w(\theta_j,w_0)\|_1 = \|A_1 w(\theta_j,w_0)\|_0 \le$$
$$\le \left\|\frac{dw(\theta_j,w_0)}{dt}\right\|_0 + \sup_{t\in\mathbb{R},\|w\|_C\le\rho}\|F(t,w)\| \le \frac{2\tilde{K}_2}{\theta} + F_0 = \tilde{N}_2. \qquad (20)$$

4. Майже періодичні розв'язки системи з нефіксованими імпульсами.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови $H_1 - H_3$, а також:*

– система з фіксованими моментами імпульсної дії (1) – (5) при $r_j \equiv 0,\ j\in\mathbb{Z}$, задовольняє умови леми 3 і теореми 1 та виконується нерівність $\rho \ge M_0$;

– для кожного $k\in\mathbb{Z}$ виконується одна з умов

$$r_k \le 0,\quad d_{jk}\ge 0,\quad q_{jk}\ge 0,\quad j=1,2, \qquad (21)$$
$$r_k \ge 0,\quad d_{jk}\le 0,\quad q_{jk}= 0,\quad j=1,2. \qquad (22)$$

Тоді при достатньо малому $r=\sup_j|r_j|$ система рівнянь з нефіксованими моментами імпульсної дії (1) – (5) має в області $U_\rho\times U_\rho$ єдиний додатнозначний кусково-неперервний w-майже періодичний розв'язок $w^*(t)$.

Для кожного $t_0\in\cup_{j\in\mathbb{Z}}(\theta_j,\theta_j+\theta/2]$ як початкової точки w-майже періодичний розв'язок $w^*(t)$ асимптотично стійкий.

Доведення. 1. Розглянемо майже періодичну послідовність $y_k(x)=(u_k(x),v_k(x))$ функцій $\|u_k(x)\|_C\le\rho,\ \|v_k(x)\|_C\le\rho,\ k\in\mathbb{Z}$. Тоді числова послідовність $\{\tau_k(y_k)\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць і задовольняє умову розділеності (7), а система (1) – (3) з імпульсною дією

$$u(\tau_k(y_k)+0,x) - u(\tau_k(y_k),x) = d_{1k}u(\tau_k(y_k),x) + q_{1k},$$
$$v(\tau_k(y_k)+0,x) - v(\tau_k(y_k),x) = d_{2k}v(\tau_k(y_k),x) + q_{2k}, \quad k\in\mathbb{Z},$$

у фіксовані моменти часу $t=\tau_k(y_k)$ задовольняє умови лем 2 і 3. Тому система перманентна з деякими додатними сталими m_0 і M_0. З доведень лем 2 і 3 випливає, що сталі m_0 і M_0 можна вибрати однаковими для всіх послідовностей $\{y_k\}$ зі значеннями в $U_\rho\times U_\rho$.

При досить малому $r=\sup_k|r_k|$ для всіх таких $y=\{y_k\}$ виконується також і нерівність (17). Тому за теоремою 1 для кожного такого $y=\{y_k\}$ система має єдиний додатнозначний кусково-неперервний w-майже періодичний розв'язок $(u^*(t,x,y),v^*(t,x,y))$ такий, що $u^*(t,x,y)\in E_0,\ v^*(t,x,y)\in E_0$ для всіх $t\in\mathbb{R},\ x\in\Omega$.

Позначимо через $\mathfrak{M}$ множину майже періодичних послідовностей $\{w_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, де $w_k = (u_k,v_k),\ w_k\in D(A_1),\ u_k,v_k\in E_0$. Будемо позначати норму $\|w\|_{\mathfrak{M}}=\sup_k\|w_k\|_\alpha$ елемента $w\in\mathfrak{M}$.

Для $y=\{y_j\}\in\mathfrak{M}$ розглянемо рівняння з фіксованими моментами імпульсної дії

$$\frac{dw}{dt}+A_1w=F(t,w), \qquad w(\tau_k^1+0)=(I+D_k)w(\tau_k^1)+Q_k, \qquad (23)$$

де послідовність $\tau_k^1=\tau_k(y_k),\ k\in\mathbb{Z}$, має рівномірно майже періодичні послідовності різниць. За теоремою 1 рівняння (23) має рівномірно асимптотично стійкий w-майже періодичний розв'язок $w^*(t,y)$. Крім того, $w^*(t,y)(x)=(u^*(t,x,y),v^*(t,x,y))\in E_0\times E_0$. Послідовність $S(y)=\{w^*(\tau_j(y_j),y)\}$, $j\in\mathbb{Z}$, майже періодична і, за побудовою, $S(y)\in\mathfrak{M}$.

Легко бачити, що $w^*(.,y^*)\colon \mathbb{R}\to X^\alpha$ є шуканим w-майже періодичним розв'язком рівняння (9)–(10) тоді і тільки тоді, коли відсутні биття (кожну поверхню імпульсів розв'язок перетинає не більше одного разу) і

$$w^*\left(\tau_j(y_j^*),y^*\right)=y_j^*,\quad j\in\mathbb{Z},$$

тобто $S(y^*)=y^*$. Покажемо, що при досить малому $r=\sup_j|r_j|$ відображення $S\colon\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}$ є відображенням стиску.

Виберемо дві послідовності $y=\{y_k\}$, $y_k=(y_{k1},y_{k2})$ і $z=\{z_k\}$, $z_k=(z_{k1},z_{k2})$, з множини $\mathfrak{M}$ і побудуємо зростаючі послідовності дійсних чисел $\tau_k^1=\tau_k(y_k)$ і $\tau_k^2=\tau_k(z_k)$, $k\in\mathbb{Z}$. Послідовності $\left\{\tau_k^1\right\}$ і $\left\{\tau_k^2\right\}$ мають рівномірно майже періодичні послідовності різниць. Будемо позначати $\tau_k'=\min\left\{\tau_k^1,\tau_k^2\right\}$, $\tau_k''=\max\left\{\tau_k^1,\tau_k^2\right\}$.

Оцінимо $\left|\tau_k^2-\tau_k^1\right|$. З умови H_2 випливає

$$\begin{aligned}\left|\tau_k^2-\tau_k^1\right|=|\tau_k(z_k)-\tau_k(y_k)|\le|r_k|&\left|\int\limits_\Omega\left(y_{k1}^2(x)+y_{k2}^2(x)\right)dx-\int\limits_\Omega\left(z_{k1}^2(x)+z_{k2}^2(x)\right)dx\right|\le\\ &\le|r_k|\int\limits_\Omega|(y_{k1}(x)-z_{k1}(x))(y_{k1}(x)+z_{k1}(x))|\,dx+\\ &\quad+|r_k|\int\limits_\Omega|(y_{k2}(x)-z_{k2}(x))(y_{k2}(x)+z_{k2}(x))|\,dx\le\\ &\le|r_k|\left(\|y_{k1}-z_{k1}\|_0\|y_{k1}+z_{k1}\|_{L^q}+\|y_{k2}-z_{k2}\|_0\|y_{k2}+z_{k2}\|_{L^q}\right)\le\\ &\le4|r_k|\rho|\Omega|^{1/q}\|y_k-z_k\|_0\le4|r_k|\rho L_0|\Omega|^{1/q}\|y_k-z_k\|_\alpha=rN_1\|y-z\|_{\mathfrak{M}}\end{aligned}\tag{24}$$

з деякою сталою N_1, яка не залежить від k і y, z. Через $|\Omega|$ позначено міру множини Ω, $1/p+1/q=1$.

Поряд із (23) розглянемо рівняння

$$\frac{dw}{dt}+A_1w=F(t,w),\quad w(\tau_k^2+0)=(I+D_k)w\left(\tau_k^2\right)+Q_k.\tag{25}$$

Рівняння з фіксованими моментами імпульсної дії (23) і (25) мають рівномірно асимптотично стійкі w-майже періодичні розв'язки $w^*(t,y)=(u_1^*,v_1^*)$ і $w^*(t,z)=(u_2^*,v_2^*)$ відповідно. Оцінимо

$$\|S(y)-S(z)\|_{\mathfrak{M}}=\sup_j\|w^*(\tau_j(y_j),y)-w^*(\tau_j(z_j),z)\|_\alpha.$$

Різниця $w^*(t,y)-w^*(t,z)$ задовольняє рівняння

$$\frac{dw}{dt}+(A_1+\tilde A(t))w=0,\tag{26}$$

$$\begin{gathered}w(\tau_k^1+0)=(I+D_k)w(\tau_k^1)+D_kw^*(\tau_k^1,z)+Q_k,\\ w(\tau_k^2+0)=w\left(\tau_k^2\right)-D_kw^*(\tau_k^2,z)-Q_k,\end{gathered}\tag{27}$$

де

$$\tilde A(t)=\begin{pmatrix}a_1+\beta-b_1\left(u_1^*+u_2^*\right)-c_1v_1^* & -c_1u_2^*\\ -b_2v_2^* & a_2+\beta-c_2\left(v_1^*+v_2^*\right)-b_2u_1^*\end{pmatrix}.$$

Позначимо через $V(t,s),\ t\geq s$, еволюційний оператор лінійного однорідного рівняння без імпульсів (26). За теоремою 7.1.3 з [22] еволюційний оператор $V(t,s)$ на інтервалі $[t_0,t_1]$ задовольняє оцінки

$$\|V(t,\tau)x\|_\gamma\leq\frac{\tilde{K}_1}{1-\gamma}\,(t-\tau)^{(\gamma_1-\gamma)_-}\|x\|_{\gamma_1},\qquad\gamma<1,\quad(\gamma_1-\gamma)_-=\min\{\gamma_1-\gamma,0\},\tag{28}$$

$$\|V(t,\tau)x-x\|_\gamma\leq\frac{\tilde{K}_1}{(1-\gamma)\gamma_1}(t-\tau)^{\gamma_1}\|x\|_{\gamma+\gamma_1},\qquad\gamma_1>0,\quad\gamma+\gamma_1\leq1,\tag{29}$$

де стала $\tilde{K}_1$ залежить тільки від $A_1,\ \alpha,\ Q\geq t_1-t_0$ і $\sup\tilde{A}(t)$. Рівняння з імпульсною дією

$$\frac{dw}{dt}+\Big(A_1+\tilde{A}(t)\Big)\,w=0,\qquad w(\tau_k^1+0)=(I+D_k)w(\tau_k^1),\quad k\in\mathbb{Z},\tag{30}$$

має еволюційний оператор

$$U(t,s)=V\left(t,\tau_k^1\right)(I+D_k)V\left(\tau_k^1,\tau_{k-1}^1\right)\ldots(I+D_m)V\left(\tau_m^1,s\right)$$

для $\tau_{m-1}^1<s\leq\tau_m^1<\ldots<\tau_k^1<t\leq\tau_{k+1}^1$.

Оператор $U(t,s)$ задовольняє оцінку

$$\|U(t,s)w\|_0\leq M_1e^{-\beta_1(t-s)}\|w\|_0,\quad t\geq s.\tag{31}$$

Для доведення розглянемо ненульовий розв'язок $w(t)=U(t,t_0)w_0$ рівняння (30). Аналогічно [9] показуємо, що функція $\mathcal{A}_p(t)=\|w(t)\|^p_{L_p(\Omega)}$ задовольняє оцінки

$$\mathcal{A}_p(t)\leq\mathcal{A}_p(\tau_{j-1}^1+0)\exp\left\{p\left(a^M-(2b^L+c^L)m_0+c^MM_0\right)(t-\tau_{j-1}^1)\right\},\quad t\in(\tau_{j-1}^1,\tau_j^1],$$
$$\mathcal{A}_p(\tau_j^1+0)\leq\max\{(1+d_{1j})^p,(1+d_{2j})^p\}\mathcal{A}_p(\tau_j^1)=K_j^p\mathcal{A}_p(\tau_j^1).$$

Як наслідок отримуємо

$$\mathcal{A}_p(t)\leq\prod_{t_0\leq\tau_j^1<t}K_j^pe^{p\left(a^M-(2b^L+c^L)m_0+c^MM_0\right)(t-t_0)}\mathcal{A}_p(\tau_0).$$

При виконанні нерівності (17) випливає експоненціальна оцінка з показником

$$\beta_1<-(a^M-(2b^L+c^L)m_0+c^MM_0+\sigma)$$

у всіх просторах $L^p(\Omega)$ з $p>1$ і як наслідок оцінка в $\sup$-нормі. Додатну сталу β в означенні оператора A_1 вибираємо з умови $\beta<\beta_1$.

З нерівностей (28) і (31) отримуємо оцінку для $t\in(\tau_m^1,\tau_{m+1}^1]$ у нормах інтерполяційних просторів X^γ :

$$\|U(t,t_0)w_0\|_\gamma\leq M_2(t-\tau_m)^{(\gamma_1-\gamma)_-}e^{-\beta_1(t-t_0)}\|w_0\|_{\gamma_1},\tag{32}$$

де $\gamma<1,\ (\gamma_1-\gamma)_-=\min\{\gamma_1-\gamma,0\},\ M_2$ — додатна стала.

Тому рівняння (26) – (27) має єдиний обмежений на осі розв'язок, який співпадає з $w^*(t,y)-w^*(t,z)$ і задовольняє рівність

$$w^*(t,y)-w^*(t,z)=\sum_{\tau_j^1<t}U(t,\tau_j^1+0)\big(D_jw^*\left(\tau_j^1,z\right)+Q_j\big)-$$

$$-\sum_{\tau_j^2<t} U(t,\tau_j^2+0)\big(D_j w^*\left(\tau_j^2,z\right)+Q_j\big)\,. \tag{33}$$

Нехай $t\in\left(\tau_m'',\tau_{m+1}'\right]$ для деякого $m\in\mathbb{Z}$. Розглянемо різницю

$$J_j(t)=U\left(t,\tau_j^1+0\right)\left(D_j w^*(\tau_j^1,z)+Q_j\right)-U\left(t,\tau_j^2+0\right)\left(D_j w^*(\tau_j^2,z)+Q_j\right)$$

для $j\le m$. Якщо $\tau_j^1<\tau_j^2$, то

$$\begin{aligned}J_j(t)&=U\left(t,\tau_j^2\right)\left(V\left(\tau_j^2,\tau_j^1+0\right)\left(D_j w^*(\tau_j^1,z)+Q_j\right)-D_j w^*(\tau_j^2,z)-Q_j\right)=\\&=U\left(t,\tau_j^2\right)\left(V\left(\tau_j^2,\tau_j^1+0\right)D_j\left(w^*(\tau_j^1,z)-w^*(\tau_j^2,z)\right)+\right.\\&\quad\left.+\left(V\left(\tau_j^2,\tau_j^1+0\right)-I\right)\left(D_j w^*(\tau_j^2,z)+Q_j\right)\right).\end{aligned}$$

З (19) і (24) випливає оцінка

$$\begin{aligned}\left\|w^*(\tau_j^1,z)-w^*(\tau_j^2,z)\right\|_\alpha&=\left\|\int\limits_{\tau_j^1}^{\tau_j^2}\frac{d}{ds}\,w^*(s,z)ds\right\|_\alpha\le\\&\le\frac{2\tilde K_2}{\theta}\,\left|\tau_j^1-\tau_j^2\right|\le\frac{2rN_1\tilde K_2}{\theta}\,\|y-z\|_{\mathfrak{M}}.\end{aligned} \tag{34}$$

Тому

$$\|J_j(\tau_{m+1}')\|_\alpha\le\frac{rN_1M_2\tilde K_1}{\theta}\,e^{-\beta_1(\tau_{m+1}'-\tau_j^2)}\left(\frac{2d\tilde K_2}{\theta}+d\tilde N_2+\beta q\right)\|y-z\|_{\mathfrak{M}}. \tag{35}$$

Якщо $\tau_j^1>\tau_j^2$, то

$$\begin{aligned}J_j(t)&=U\left(t,\tau_j^1+0\right)\left(D_j w^*(\tau_j^1,z)+Q_j-(I+D_j)V(\tau_j^1,\tau_j^2)\left(D_j w^*(\tau_j^2,z)+Q_j\right)\right)=\\&=U(t,\tau_j^1+0)\Big(D_j w^*(\tau_j^1,z)-D_j w^*(\tau_j^2+0,z)+\\&\quad+(I+D_j)(I-V(\tau_j^1,\tau_j^2))(D_j w^*(\tau_j^2,z)+Q_j)\Big).\end{aligned}$$

Отримуємо

$$\|J_j(\tau_{m+1}')\|_\alpha\le\frac{rN_1M_2}{\theta}e^{-\beta_1(\tau_{m+1}'-\tau_j^1)}\left(\frac{2d\tilde K_2}{\theta}+(1+d)\tilde K_1(d\tilde N_2+\beta q)\right)\|y-z\|_{\mathfrak{M}}. \tag{36}$$

З (33), (35) і (36) отримуємо

$$\left\|w^*(\tau_m',z)-w^*(\tau_m',y)\right\|_\alpha\le\frac{r\tilde K_4}{1-e^{-\beta_1\theta}}\|y-z\|_{\mathfrak{M}}$$

і, враховуючи (34),

$$\left\|w^*(\tau_m^2,z)-w^*(\tau_m^1,y)\right\|_\alpha\le r\|y-z\|_{\mathfrak{M}}\left(\frac{\tilde K_4}{1-e^{-\beta_1\theta}}+\frac{2\tilde K_2N_1}{\theta}\right)=r\tilde K_5\|y-z\|_{\mathfrak{M}}$$

з деякими додатними сталими $\tilde{K}_4$ і $\tilde{K}_5$, які не залежать від y і z. При $r\tilde{K}_5 < 1$ відображення $S(z)$ є відображенням стиску. Воно має нерухому точку w^*.

2. Перевіримо, що у множині $U_\rho \times U_\rho$ розв'язки $w(t)$ з початковими значеннями (t_0, w_0), які належать множині

$$W_{j-1}^{+} = \{(t,w)\colon w \in U_\rho \times U_\rho, t \in (\tau_{j-1}(w), \tau_{j-1}(w) + \theta/2]\},$$

не мають биття з поверхнею $t = \tau_j(u,v),\ j \in \mathbb{Z}$.

Припустимо від супротивного, що розв'язок $w(t)$ перетинає поверхню $t = \tau_j(u,v)$ у двох точках t_j^1 і $t_j^2,\ t_j^1 < t_j^2$. Позначимо $w(t_j^1) = w_1,\ w(t_j^2) = w_2$. Тоді $w(t_j^1 + 0) = w_1 + G_j = w_1 + D_j w_1 + Q_j,\ \tau_j(w_1) = t_j^1,\ \tau_j(w_2) = t_j^2$, і

$$w_2 = e^{-A_1(t_j^2 - t_j^1)}(w_1 + G_j) + \int\limits_{t_j^1}^{t_j^2} e^{-A_1(t_j^2 - s)} F(s, w(s))\, ds.$$

Останню рівність розглядаємо при $p = 2$, тобто у просторі $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Множачи рівняння (1) на $u(t,x)$ та інтегруючи, отримуємо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^2 dx\right) = \mu_1 \int\limits_\Omega u \Delta u dx + \int\limits_\Omega u^2 \left(a_1 - b_1 u - c_1 v\right) dx.$$

Тому для невід'ємних розв'язків виконується нерівність

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^2 dx\right) \le a^M \int\limits_\Omega u^2 dx.$$

Як наслідок отримуємо

$$\|w(t)\|_{L_2(\Omega)} \le e^{\tilde{a}(t-t_0)} \|w_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad t \ge 0,$$

де $\tilde{a} = \sqrt{2a^M},\ a^M = \max\left\{a_1^M, a_2^M\right\}$. Відповідно $\|w_2\|_{L^2(\Omega)} \le e^{\tilde{a}(t_j^2 - t_j^1)}(\|w_1\|_{L^2(\Omega)} + \|G_j\|_{L^2(\Omega)})$.

Різниця $t_j^2 - t_j^1$ задовольняє рівність

$$\begin{aligned} t_j^2 - t_j^1 = \tau_j(w_2) - \tau_j(w_1) = \tau_j(w_2) - \tau_j\left(e^{-A_1(t_j^2 - t_j^1)}(w_1 + D_j w_1 + Q_j)\right) + \\ + \tau_j\left(e^{-A_1(t_j^2 - t_j^1)}(w_1 + D_j w_1 + Q_j)\right) - \tau_j\left(e^{-A_1(t_j^2 - t_j^1)}(w_1 + D_j w_1)\right) + \\ + \tau_j\left(e^{-A_1(t_j^2 - t_j^1)}(w_1 + D_j w_1)\right) - \tau_j(w_1 + D_j w_1) + \tau_j(w_j + D_j w_1) - \tau_j(w_1). \end{aligned} \tag{37}$$

Позначимо $\tilde{w} = e^{-A_1(t_j^2 - t_j^1)}(w_1 + G_j)$.

Оцінимо першу різницю в (37). Аналогічно (24) отримуємо

$$\left|\tau_j(w_2) - \tau_j(\tilde{w})\right| \le |r_j| \int\limits_\Omega \left(\|w_2(x)\|^2 - \|\tilde{w}(x)\|^2\right) dx \le 4r\rho|\Omega|^{1/2}\|w_2 - \tilde{w}\|_{L^2(\Omega)} =$$

$$= 4r\rho|\Omega|^{1/2} \left\| \int\limits_{t_j^1}^{t_j^2} e^{-A_1(t_j^2-s)} F(s,w(s))ds \right\|_{L_2(\Omega)} \le$$
$$\le 4r\rho|\Omega|^{1/2} F_0 M_1 \left| t_j^2 - t_j^1 \right| = r\eta_1 \left| t_j^2 - t_j^1 \right|,$$

де $F_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}, w\in U_\rho\times U_\rho} \|F(t,w)\|_{C(\Omega)}$.

Якщо $w_1 \in D(A_1) \cap (U_\rho \times U_\rho)$, то

$$\left|\tau_j\big(e^{-A_1(t_j^2-t_j^1)}w_1\big) - \tau_j(w_1)\right| \le |r_j| \int\limits_\Omega \left(\left\| e^{-A_1(t_j^2-t_j^1)} w_1 \right\|^2 - \|w_1\|^2 \right) dx \le$$
$$\le 4r\rho|\Omega|^{1/2} \left\| e^{-A_1(t_j^2-t_j^1)} w_1 - w_1 \right\|_{L_2(\Omega)} \le$$
$$\le 4r\rho|\Omega|^{1/2} C_0 \left| t_j^2 - t_j^1 \right| \|Aw_1\|_0 \le 4r\rho|\Omega|^{1/2} C_0 \tilde{N}_2 \left| t_j^2 - t_j^1 \right| = r\eta_2 \left| t_j^2 - t_j^1 \right|.$$

Позначимо через λ_n і ϕ_n, $n = 1, 2, \ldots$, власні значення і відповідні власні функції оператора A_1. Тоді $[e^{-A_1 t}u](x) = \sum_{k=1}^\infty e^{-\lambda_k t}(u,\phi_k)\phi_k(x)$ і $\|e^{-A_1 t}u\|_{L^2} \le e^{-\beta t}\|u\|_{L^2}$.

При умові (21) виконується

$$\tau_j \left(e^{-A_1(t_j^2-t_j^1)}(w_1 + D_j w_1 + Q_j) \right) - \tau_j \left(e^{-A_1(t_j^2-t_j^1)}(w_1 + D_j w_1) \right) \le 0,$$
$$\tau_j(w_1 + D_j w_1) - \tau_j(w_1) \le 0.$$

При досить малому $r = \sup_j |r_j|$ маємо $r(\eta_1 + \eta_2) < 1$, а тому

$$0 < \left(t_j^2 - t_j^1\right)(1 - r(\eta_1 + \eta_2)) \le \tau_j(w_j + D_j w_1) - \tau_j(w_1) +$$
$$+ \tau_j \left(e^{-A_1(t_j^2-t_j^1)}(w_1 + D_j w_1 + Q_j) \right) - \tau_j(e^{-A_1(t_j^2-t_j^1)}(w_1 + D_j w_1)) \le 0.$$

Отримуємо суперечність. При виконанні умов (22) отримуємо

$$\tau_j\Big(e^{-A_1(t_j^2-t_j^1)}(w_1 + D_j w_1)\Big) - \tau_j(w_1 + D_j w_1) =$$
$$= r_j \left(\left\| e^{-A_1(t_j^2-t_j^1)}(w_1 + D_j w_1) \right\|^2_{L^2(\Omega)} - \|w_1 + D_j w_1\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \le 0,$$

$$\tau_j(w_1 + D_j w_1) - \tau_j(w_1) \le 0,$$

тому $0 < (t_j^2 - t_j^1)(1 - r_j\eta_1) < 0$. Суперечність.

3. Тепер покажемо асимптотичну стійкість розв'язку $w^*(t)$ з початковою точкою t_0 з множини $\cup_{j\in\mathbb{Z}}(\tilde\tau_j^0, \tilde\tau_j^0 + \theta/2]$, де $\tilde\tau_j^0 = \tau_j(w^*(\tilde\tau_j^0))$ — моменти перетину розв'язку $w^*(t)$ з поверхнями $\tau_j(w)$. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $t_0 \in (\tilde\tau_0^0, \tilde\tau_0^0 + \theta/2]$. Розглянемо інший розв'язок рівняння $w(t)$ з початковим значенням w_0 з деякого околу точки $w^*(t_0)$ такий, що $w_0 \in W_0^+$. За п. 2 доведення розв'язок $w(t)$ не має биття з поверхнями імпульсів.

Виконаємо у рівнянні (9), (10) заміну змінних $w = w^* + z$. Тоді $z(t)$ задовольняє рівняння

$$\frac{dz}{dt} + (A_1 + \tilde{A}_1(t))z = \tilde{F}(t,z)$$

та різницеві співвідношення у точках перетину розв'язків $w^*(t)$ і $w(t) = w^*(t) + z(t)$ з поверхнями $\tau_j(w),\ j \in \mathbb{Z}:$

$$z\left(\tilde\tau_j^0+0\right) = (I+D_j)z(\tilde\tau_j^0) - D_j(z(\tilde\tau_j^0)+w^*(\tilde\tau_j^0)) - Q_j, \qquad (38)$$
$$z(\tilde\tau_j^1+0) = z(\tilde\tau_j^1) + D_j(z(\tilde\tau_j^1)+w^*(\tilde\tau_j^1)) + Q_j,$$

де $\tilde\tau_j^0 = \tau_j(w^*(\tilde\tau_j^0)),\ \tilde\tau_j^1 = \tau_j\left(w^*(\tilde\tau_j^1)+z(\tilde\tau_j^1)\right),$

$$\tilde A_1(t) = \begin{pmatrix} a_1+\beta-2b_1u^*-c_1v^* & -c_1u^* \\ -b_2v^* & a_2+\beta-2c_2v^*-b_2u^* \end{pmatrix}$$
$$\tilde F(t,z) = \begin{pmatrix} -u(b_1(t,.)u+c_1(t,.)v) \\ -v(b_2(t,.)u+c_2(t,.)v) \end{pmatrix}, \qquad w^* = \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що існує неспадна функція $K_\xi,\ 0 \le \xi \le \rho_1$, така, що $K_\xi \to 0$ при $\xi \to 0$ і рівномірно по $t \in \mathbb{R}$

$$\|\tilde F(t,z)\|_0 \le K_\xi \|z\|_\alpha, \quad \|z\|_\alpha \le \xi. \qquad (39)$$

Тому $\sup_{t\in\mathbb{R},\|z\|_\alpha\le\rho_1} \|\tilde F(t,z)\| \le K_{\rho_1}\rho_1 = \tilde F_0$.

Позначимо через $\tilde V(t,s)$ еволюційний оператор лінійного однорідного рівняння

$$\frac{dw}{dt} + (A_1 + \tilde A_1(t))w = 0, \qquad (40)$$

а через $\tilde U(t,s)$ — еволюційний оператор рівняння (40) з імпульсною дією (38) у точках $\tilde\tau_j^0$. Аналогічно до рівняння (30) показуємо експоненціальну стійкість рівняння (40) з імпульсною дією (38). Для спрощення запису вважаємо, що еволюційний оператор $\tilde U(t,s)$ задовольняє нерівність (31) з тими ж сталими M_1 та β_1. Так само вважаємо, що $\tilde V(t,s)$ задовольняє оцінки (28) і (29) з тією ж сталою $\tilde K_1$.

Розв'язок $z(t)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$z(t) = \tilde U(t,t_0)z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \tilde U(t,s)\tilde F(s,z(s))\,ds - \sum_{t_0<\tilde\tau_j^0<t} \tilde U\left(t,\tilde\tau_j^0\right)\left(D_j\left(z\left(\tilde\tau_j^0\right)+w^*(\tilde\tau_j^0)\right)+Q_j\right) +$$
$$+ \sum_{t_0<\tilde\tau_j^1<t} \tilde U\left(t,\tilde\tau_j^1\right)\left(D_j\left(z\left(\tilde\tau_j^1\right)+w^*\left(\tilde\tau_j^1\right)\right)+Q_j\right).$$

Позначимо

$$\mathcal{J} = \cup_j \mathcal{J}_j, \qquad \mathcal{J}_j = \left(\max\{\tilde\tau_{j-1}^0,\tilde\tau_{j-1}^1\}, \min\{\tilde\tau_j^0,\tilde\tau_j^1\}\right] = \left(\tilde\tau_{j-1}'',\tilde\tau_j'\right].$$

Для $t \in \left(\tilde\tau_i'',\tilde\tau_{i+1}'\right]$ маємо

$$\|z(t)\|_\alpha \le \|\tilde U(t,t_0)z_0\|_\alpha + \int\limits_{t_0}^{\tilde\tau_1'} \|\tilde U(t,s)\tilde F(s,z(s))\|_\alpha\,ds +$$

$$+\sum_{j=1}^{i-1}\int\limits_{\tilde\tau_j''}^{\tilde\tau_{j+1}'}\|\tilde U(t,s)\tilde F(s,z(s))\|_\alpha\,ds+\sum_{j=1}^{i}\int\limits_{\tilde\tau_j'}^{\tilde\tau_j''}\|\tilde U(t,s)\tilde F(s,z(s))\|_\alpha\,ds+$$
$$+\int\limits_{\tilde\tau_i''}^{t}\|\tilde U(t,s)\tilde F(s,z(s))\|_\alpha ds+\sum_{j=1}^{i}\|\tilde U(t,\tilde\tau_1^0)(D_j(z(\tilde\tau_1^0)+w^*(\tilde\tau_1^0))+Q_1)-$$
$$+\tilde U\left(t,\tilde\tau_j^1\right)\left(D_j\left(z\left(\tilde\tau_1^1\right)+w^*\left(\tilde\tau_1^1\right)\right)+Q_j\right)\|_\alpha.$$

На інтервалі без імпульсів розв'язок $z(t)$ задовольняє нерівність

$$\|z(t)\|_\alpha\le\|\tilde U(t,t_1)z(t_1)\|_\alpha+\int\limits_{t_1}^{t}\|A^\alpha\tilde U(t,s)\tilde F(s,z(s))\|ds\le$$
$$\le M_1e^{-\beta_1(t-t_1)}\|z(t_1)\|_\alpha+\int\limits_{t_1}^{t}\frac{M_2K_{\rho_1}e^{-\beta_1(t-s)}}{(t-s)^\alpha}\|z(s)\|_\alpha\,ds.$$

Тоді за лемою 1 на інтервалі $[t_0,\tilde\tau_1']$ розв'язок $z(t)$ задовольняє оцінку

$$\|z(t)\|_\alpha\le M_1\tilde C_1e^{-\beta_1(t-t_0)}\|z_0\|_\alpha,\quad t\in\left[t_0,\tilde\tau_1'\right]. \tag{41}$$

Покажемо, що при достатньо малому $r=\inf_j|r_j|$ різниця $\left|\tilde\tau_j^1-\tilde\tau_j^0\right|$ оцінюється через $z(\tilde\tau_j')$ так:

$$\left|\tilde\tau_j^0-\tilde\tau_j^1\right|\le\frac{4r\rho|\Omega|^{1/q}L_0}{1-8r\rho|\Omega|^{1/q}L_0\tilde K_2\theta^{-1}}\left\|z(\tilde\tau_j')\right\|_\alpha=\tilde K_6r\left\|z(\tilde\tau_j')\right\|_\alpha. \tag{42}$$

Припустимо, що $\tilde\tau_j^0\ge\tilde\tau_j^1=\tilde\tau_j'$. Тоді, використовуючи (24) і (19), отримуємо

$$|\tilde\tau_j^1-\tilde\tau_j^0|\le|r_k|\left|\int\limits_\Omega\|w^*(\tilde\tau_j^1)(x)+z(\tilde\tau_j^1)(x)\|^2dx-\int\limits_\Omega\|w^*(\tilde\tau_j^0)(x)\|^2dx\right|\le$$
$$\le4r\rho|\Omega|^{1/q}L_0\|w^*(\tilde\tau_j^1)+z(\tilde\tau_j^1)-w^*(\tilde\tau_j^0)\|_\alpha\le$$
$$\le4r\rho|\Omega|^{1/q}L_0\left(\|z(\tilde\tau_j^1)\|_\alpha+\left\|\int\limits_{\tilde\tau_j^1}^{\tilde\tau_j^0}\frac{d}{d\xi}w^*(\xi)\,d\xi\right\|_\alpha\right)\le$$
$$\le4r\rho|\Omega|^{1/q}L_0\left(\|z(\tilde\tau_j^1)\|_\alpha+\frac{2\tilde K_2}{\theta}|\tilde\tau_j^0-\tilde\tau_j^1|\right).$$

Якщо $\tilde\tau_j^1\ge\tilde\tau_j^0=\tilde\tau_j'$, то

$$|\tilde\tau_j^1-\tilde\tau_j^0|\le|r_k|\left|\int\limits_\Omega\|w^*(\tilde\tau_j^1)+z(\tilde\tau_j^1)\|^2dx-\int\limits_\Omega\|w^*(\tilde\tau_j^0)\|^2dx\right|\le$$
$$\le4r\rho|\Omega|^{1/q}L_0\left\|w^*(\tilde\tau_j^1)+z(\tilde\tau_j^1)-w^*(\tilde\tau_j^0)-z(\tilde\tau_j^0)+z(\tilde\tau_j^0)\right\|_\alpha\le$$

$$\leq 4r\rho|\Omega|^{1/q}L_0\bigg(\|z(\tilde\tau_j^0)\|_\alpha + \frac{2\tilde K_2}{\theta}\left|\tilde\tau_j^0 - \tilde\tau_j^1\right|\bigg).$$

Для $t \in (\tilde\tau_1'', \tilde\tau_2']$ справедлива оцінка

$$\|z(t)\|_\alpha \leq \|\tilde U(t,t_0)z_0\|_\alpha + \|\tilde U(t,\tilde\tau_1'')\|_\alpha \int\limits_{t_0}^{\tilde\tau_1'} \left\|\tilde U(\tilde\tau_1'',s)\tilde F(s,z(s))\right\|_0 ds+$$

$$+\int\limits_{\tilde\tau_1''}^{t} \left\|\tilde U(t,s)\tilde F(s,z(s))\right\|_\alpha ds + \|\tilde U(t,\tilde\tau_1'')\|_\alpha \int\limits_{\tilde\tau_1'}^{\tilde\tau_1''} \left\|\tilde U(\tilde\tau_1'',s)\tilde F(s,z(s))\right\|_0 ds+$$

$$+\left\|\tilde U(t,\tilde\tau_1^0+0)(D_1(z(\tilde\tau_1^0)+w^*(\tilde\tau_1^0))+Q_1)-\tilde U(t,\tilde\tau_1^1)(D_1(z(\tilde\tau_1^1)+w^*(\tilde\tau_1^1))+Q_1)\right\|_\alpha =$$

$$= i_1 + i_2 + i_3 +_4 + i_5. \tag{43}$$

Спочатку оцінимо останній доданок. Якщо $\tilde\tau_1^0 < \tilde\tau_1^1$, то

$$i_5 = \left\|\tilde U(t,\tilde\tau_1^0+0)(D_1(z(\tilde\tau_1^0)+w^*(\tilde\tau_1^0))+Q_1)-\tilde U(t,\tilde\tau_1^1)(D_1(z(\tilde\tau_1^1)+w^*(\tilde\tau_1^1))+Q_1)\right\|_\alpha =$$

$$= \left\|\tilde U(t,\tilde\tau_1^1)\Big((D_1(z(\tilde\tau_1^1)+w^*(\tilde\tau_1^1))+Q_1-\tilde U(\tilde\tau_1^1,\tilde\tau_1^0+0)(D_1(z(\tilde\tau_1^0)+w^*(\tilde\tau_1^0))+Q_1)\Big)\right\|_\alpha =$$

$$= \Bigg\|\tilde U(t,\tilde\tau_1^1)\Bigg(D_1(U(\tilde\tau_1^1,\tilde\tau_1^0+0)-I)w(\tilde\tau_1^0)-(U(\tilde\tau_1^1,\tilde\tau_1^0+0)-I)D_1w(\tilde\tau_1^0)+$$

$$+\ (I-U(\tilde\tau_1^1,\tilde\tau_1^0+0))Q_1 + D_1\int\limits_{\tilde\tau_1^0}^{\tilde\tau_1^1}\tilde U(\tilde\tau_1^1,s)\tilde F(s,w(s))ds\Bigg)\Bigg\|_\alpha. \tag{44}$$

Якщо $\tilde\tau_1^0 > \tilde\tau_1^1$, то

$$i_5 = \left\|\tilde U(t,\tilde\tau_1^0+0)(D_1(z(\tilde\tau_1^0)+w^*(\tilde\tau_1^0))+Q_1)-\tilde U(t,\tilde\tau_1^1)(D_1(z(\tilde\tau_1^1)+w^*(\tilde\tau_1^1))+Q_1)\right\|_\alpha =$$

$$= \left\|\tilde U(t,\tilde\tau_1^0+0)\Big(D_1w(\tilde\tau_1^0)+Q_1-\tilde U(\tilde\tau_1^0+0,\tilde\tau_1^1)(D_1w(\tilde\tau_1^1)+Q_1)\Big)\right\|_\alpha =$$

$$= \Bigg\|\tilde U(t,\tilde\tau_1^0+0)\Bigg(D_1(U(\tilde\tau_1^0,\tilde\tau_1^1)-I)w(\tilde\tau_1^1)-(U(\tilde\tau_1^0,\tilde\tau_1^1)-I)D_1w(\tilde\tau_1^1)+$$

$$+(I-U(\tilde\tau_1^0+0,\tilde\tau_1^1))Q_1 + D_1\int\limits_{\tilde\tau_1^1}^{\tilde\tau_1^0}\tilde U(\tilde\tau_1^0,s)\tilde F(s,w(s))ds\Bigg)\Bigg\|_\alpha. \tag{45}$$

Застосовуючи нерівності (28), (29), (32) і (42), з (44) і (45) отримуємо оцінку

$$i_4 + i_5 \leq M_2 e^{-\beta_1(t-\tilde\tau_1'')}\frac{\tilde\tau_1''-\tilde\tau_1'}{(t-\tilde\tau_1'')^\alpha}\Big(2d\tilde K_1\tilde N_2 + \tilde K_1\beta q) + d\tilde F_0 M_2\Big) \leq$$

$$\leq rM_2\tilde K_6 e^{-\beta_1(t-\tilde\tau_1'')}\Big(2d\tilde K_1\tilde N_2 + \beta q\tilde K_1 + d\tilde F_0 M_2\Big)\frac{\|z(\tilde\tau_1')\|_\alpha}{(t-\tilde\tau_1'')^\alpha} =$$

$$= rP_1 e^{-\beta_1 \left(t-\tilde{\tau}_1''\right)} \frac{\|z\left(\tilde{\tau}_1'\right)\|_\alpha}{\left(t-\tilde{\tau}_1''\right)^\alpha}. \tag{46}$$

Припускаючи, що $\|z(t)\|_\alpha \le \xi$ при $t \in [t_0, \tilde{\tau}_1']$, і враховуючи (32), (39) і (46), переписуємо оцінку (43) у вигляді

$$\|z(t)\|_\alpha \le M_1 e^{-\beta_1(t-t_0)} \|z_0\|_\alpha \left(1 + \frac{\tilde{C}_1(M_2 K_\xi \tilde{Q} + rP_2)}{(t-\tilde{\tau}_1'')^\alpha}\right) +$$

$$+ \int\limits_{\tilde{\tau}_1''}^{t} \frac{M_2 K_{\rho_1} \|z(s)\|_\alpha e^{-\beta_1(t-s)}}{(t-s)^\alpha}\, ds,$$

де

$$P_2 = P_1 e^{\beta_1 \sup_j |\tilde{\tau}_j'' - \tilde{\tau}_j'|}, \qquad \tilde{Q} = \max_j \left\{1, (\tilde{\tau}_{j+1}' - \tilde{\tau}_j'')\right\}.$$

Позначимо також $\tilde{\theta} = \min_j \left\{1, (\tilde{\tau}_{j+1}' - \tilde{\tau}_j'')\right\}$. З урахуванням перманентності $\|z\|_\alpha \le \rho_1$, $t \ge t_0$. За лемою 1 отримуємо

$$\|z(t)\|_\alpha \le M_1 \tilde{C}_1 e^{-\beta_1(t-t_0)} \|z_0\|_\alpha \left(1 + \frac{\tilde{C}_1(M_2 K_\xi \tilde{Q} + rP_2)}{(t-\tilde{\tau}_1'')^\alpha}\right), \quad t \in \left(\tau_1'', \tau_2'\right]. \tag{47}$$

Припустимо, що при $t \in [t_0, \tilde{\tau}_i']$ розв'язок $w(t)$ задовольняє нерівність $\|w(t)\|_\alpha \le \rho_1$ так, що $\|z(t)\|_\alpha = \|w(t) - w_0(t)\|_\alpha \le \xi$ для $t \in \cup_{j=1}^{i} \mathcal{J}_j$ з деяким $\xi > 0$.

Аналогічно до [20] за методом математичної індукції доводимо, що для $t \in \left(\tilde{\tau}_i'', \tilde{\tau}_{i+1}'\right]$, $i = 1, 2, \ldots,$

$$\|z(t)\|_\alpha \le M_1 \tilde{C}_1 \|z_0\|_\alpha e^{-\beta_1(t-t_0)} \left(1 + \frac{\tilde{C}_1(M_2 K_\xi \tilde{Q} + rP_2)}{(t-\tilde{\tau}_i'')^\alpha}\right) \mathcal{A}_{\xi,r}^{i-1},$$

де

$$\mathcal{A}_{\xi,r} = \left(1 + \frac{\tilde{C}_1(M_2 K_\xi \tilde{Q} + rP_2)}{(1-\alpha)\tilde{\theta}^\alpha}\right).$$

За формулою (41) якщо $\|z_0\|_\alpha \le \delta = \varepsilon/(M_1 \tilde{C}_1)$, то $\|z(t)\|_\alpha \le \varepsilon$ при $t \in [t_0, \tilde{\tau}_1']$.

За формулою (47) розв'язок $z(t)$ задовольняє нерівність $\|z(t)\|_\alpha < \varepsilon$ на інтервалі $t \in [\tilde{\tau}_1'' + \eta, \tilde{\tau}_2']$, якщо

$$\|z_0\|_\alpha \le \frac{\varepsilon}{M_1 \tilde{C}_1} \left(1 + \frac{\tilde{C}_1(M_2 K_\varepsilon \tilde{Q} + rP_2)}{\eta^\alpha}\right)^{-1}. \tag{48}$$

Оскільки $K_\xi \to 0$ при $\xi \to 0$, то при досить малих $\xi > 0$ і $r > 0$ справедлива нерівність $\mathcal{A}_{\xi,r} e^{-\beta_1 \theta} < 1$ і

$$e^{-\beta_1\left(\tilde{\tau}_i' - t_0\right)} \mathcal{A}_{\xi,r}^{i-1} \to 0, \quad i \to \infty. \tag{49}$$

Отже, для довільних фіксованих $\varepsilon > 0$ і $\eta > 0$, якщо початкове значення задовольняє умову (48) і виконується нерівність $\mathcal{A}_{\varepsilon,r} e^{-\beta_1 \theta} < 1$, то $\|z(t)\|_\alpha < \varepsilon$ для всіх $t \in \left[\tilde{\tau}_i'' + \eta, \tilde{\tau}_{i+1}'\right]$, $i = 1, 2, \ldots$. Це й доводить стійкість.

Виберемо $\varepsilon_0 > 0$ і $r_0 > 0$ такими, що $A_{\varepsilon_0, r_0} e^{-\beta_1 \theta} < 1$. Тоді при $r \le r_0$, виходячи з (49), для кожних додатних $\varepsilon \le \varepsilon_0$ і η існує таке натуральне i_0, що при всіх $i \ge i_0$ і $t \in [\tilde{\tau}_i'' + \eta, \tilde{\tau}_{i+1}']$ виконується $\|z(t)\|_\alpha < \varepsilon$. Отже, w-майже періодичний розв'язок $w^*(t)$ асимптотично стійкий.

Теорему 2 доведено.

Література

1. *Akhmet M. U., Beklioglu M., Ergenc T., Tkachenko V. I.* An impulsive ratio-dependent predator-prey system with diffusion // Nonlinear Anal. Real World Appl. – 2006. – **7**, № 5. – P. 1255 – 1267.
2. *Dvirnyj A. I., Slyn'ko V. I.* Stability in terms of two measures for a class of semilinear impulsive parabolic equations // Sbornik: Mathematics. – 2013. – **204**, № 4. – P. 485 – 507.
3. *Li C., Guo X., He D.* An impulsive diffusion predator-prey system in three-species with Beddington – DeAngelis response // J. Appl. Math. Comput. – 2013. – **43**, № 1 – 2. – P. 235 – 248.
4. *Rogovchenko Y. V.* Nonlinear impulse evolution systems and applications to population models // J. Math. Anal. Appl. – 1997. – **207**, № 2. – P. 300 – 315.
5. *Струк О. О., Ткаченко В. І.* Про системи Лотки – Вольтерри з дифузією та імпульсною дією // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 4. – С. 514 – 526.
6. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища шк., 1987. – 288 с.
7. *Перестюк Н. А., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Обобщенные решения импульсных систем и явление биений // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 5. – С. 657 – 663.
8. *Akhmetov M. U., Perestyuk N. A.* Periodic and almost periodic solutions of strongly nonlinear impulse systems // J. Appl. Math. Mech. – 1992. – **56**, № 6. – P. 829 – 837.
9. *Дворник А. В., Ткаченко В. І.* Майже періодичні розв'язки систем із запізненням та нефіксованими моментами імпульсної дії // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 11. – С. 1450 – 1466.
10. *Hakl R., Pinto M., Tkachenko V., Trofimchuk S.* Almost periodic evolution systems with impulse action at state-dependent moments // J. Math. Anal. Appl. – 2017. – **46**, № 1. – P. 1030 – 1045.
11. *He M., Chen F., Li Z.* Almost periodic solution of an impulsive differential equation model of plankton allelopathy // Nonlinear Anal. Real World Appl. – 2010. – **11**, № 4. – P. 2296 – 2301.
12. *Henriquez H. R., De Andrade B., Rabelo M.* Existence of almost periodic solutions for a class of abstract impulsive differential equations // ISRN Math. Anal. – 2011. – Article ID 632687. – 21 p.
13. *Pinto M., Robledo G.* Existence and stability of almost periodic solutions in impulsive neural network models // Appl. Math. Comput. – 2010. – **217**, № 8. – P. 4167 – 4177.
14. *Samoilenko A. M., Trofimchuk S. I.* Almost periodic impulsive systems // Differ. Equ. – 1993. – **29**. – № 4. – P. 684 – 691.
15. *Stamov G. T.* Almost periodic solutions of impulsive differential equations // Lect. Notes Math. – 2012. – **2047**. – XX + 217 p.
16. *Tkachenko V.* Almost periodic solutions of parabolic type equations with impulsive action // Funct. Differ. Equ. – 2014. – **21**, № 3-4. – P. 155 – 169.
17. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 310 с.
18. *Tkachenko V.* Almost periodic solutions of evolution differential equations with impulsive action // Mathematical Modeling and Applications in Nonlinear Dynamics. – New York: Springer, 2016. – P. 161 – 205.
19. *Дворник А. В., Струк О. О., Ткаченко В. І.* Майже періодичні розв'язки систем Лотки – Вольтерра з дифузією та імпульсною дією // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 2. – С. 177 – 192.
20. *Dvornyk A. V., Tkachenko V. I.* On the stability of solutions of evolution equations with nonfixed moments of impulse action // J. Math. Sci. (N.Y.) – 2017. – **220**, № 4. – P. 425 – 439.
21. *Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Неограниченные функции с почти периодическими разностями // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1306 – 1309.
22. *Henry D.* Geometric theory of semilinear parabolic equations // Lect. Notes Math. – 1981. – **840**. – IV + 348 p.
23. *Alikakos N. D.* An application of the invariance principle to reaction-diffusion equations // J. Differential Equations. – 1979. – **33**, № 2. – P. 201 – 225.

Одержано 11.05.2018