

ЗБУДЖЕННЯ АВТОКОЛИВАНЬ ПОТОКОМ РІДИНИ В ЦИЛІНДРИЧНОМУ КАНАЛІ З ДВОМА ДІАФРАГМАМИ

І. В. Вовк

*Ін-т гідромеханіки НАН України
вул. Желябова, 8/4, Київ, 03057, Україна
e-mail: imvovk3940@gmail.com*

В. Т. Маципура, Я. П. Троценко

*Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
пр-т Акад. Глушкова, 4-е, Київ, 03680, Україна
e-mail: mnivtt@gmail.com
yaroslav.p.trotsenko@gmail.com*

We investigate the flow of a viscous incompressible fluid in a cylindrical duct with two serial diaphragms by using the numerical solution of nonstationary Navier–Stokes equations. It is established that in a certain range of Reynolds numbers the fluid flow in the region between the diaphragms is characterized by the presence of an unstable shear layer. A series of sequential vortices is formed in the shear layer that cause self-sustained oscillations of the velocity profile in the orifice of the second diaphragm. We show that the system has two stable modes of periodic oscillations with different frequencies. These oscillations may serve as an acoustic source in the duct.

Досліджено течію в'язкої нестисливої рідини в циліндричному каналі з двома послідовно розташованими діафрагмами на основі чисельного розв'язання нестационарних рівнянь Нав'є – Стокса. Встановлено, що в певному діапазоні чисел Рейнольдса течія рідини в області між діафрагмами характеризується наявністю нестійкого зсувного шару. У зсувному шарі утворюється послідовний ряд вихорів, що викликають автоколивання профілю швидкості в отворі другої діафрагми. Показано, що в даній системі є два стійкі режими періодичних коливань з різними частотами. Ці коливання можуть бути джерелом звуку в каналі.

1. Вступ. Течія рідини чи газу в нерегулярних каналах широко зустрічається як в природі, так і в технічних приладах: судини кровоносної системи людини, бронхіальні дерева, труби для транспортування технічних середовищ, вентиляційні системи, твердопаливні ракетні двигуни тощо. Водночас нерідко виникають випадки, коли потік, зустрічаючи на своєму шляху перешкоди, починає генерувати акустичні коливання [1].

Подібні явища вивчаються вже давно. Ще у 1854 р. Зондхаус спостерігав виникнення тонального звуку при натіканні струменя на круговий отвір в пластині (hole tone) [2]. Також Релей, покладаючись на свої спостереження, запропонував механізм зворотного зв'язку, згідно з яким струмінь не може вільно пройти крізь отвір, і внаслідок цього утворюються збурення, які далі передаються вгору за потоком і дають початок новим збуренням [3]. Пізніше, у другій половині ХХ ст., відновлюються експериментальні дослідження подібних систем, зокрема й потоків у каналах зі звуженнями або порожнинами (див., наприклад, [4 – 7]). У наш час даній проблемі також приділяється значна увага. Зокрема, сучасні методи експериментального дослідження дозволяють більш детально вивчити особливості таких потоків [8 – 11].

З розвитком комп'ютерної техніки наприкінці ХХ ст. набувають поширення чисельні моделювання подібних систем. Для цього переважно використовуються гібридні методи, згідно з якими розв'язання задачі проводиться в два етапи. На першому етапі обчислюється гідродинаміка течії у ближньому полі з метою визначення флуктуацій швидкості і тиску в потоці, що формують джерело акустичних коливань. Для цих розрахунків середовище можна вважати нестисливим. На другому етапі акустичні характеристики дальнього поля розраховуються окремо на основі отриманих з гідродинаміки даних про джерело звуку. Такий підхід застосовується у зв'язку з тим, що величини полів та масштаби довжин гідродинамічної та акустичної задач значно відрізняються [12]. Як наслідок, і відповідні методи відрізняються за точністю та вимогами до комп'ютерних ресурсів.

Для розв'язання гідродинамічної задачі спочатку набувають поширення вихрові методи [13–16]. Сьогодні активно застосовується техніка прямого чисельного моделювання (DNS). Зокрема, для розв'язання нестационарних рівнянь руху використовується метод скінченних об'ємів [17–19]. Також завдяки стрімкому розвитку комп'ютерної техніки можливо розв'язувати повну гідроакустичну задачу за допомогою прямого чисельного моделювання. Наприклад, у роботах [20, 21] розв'язуються нестационарні рівняння Нав'є–Стокса для тривимірної моделі в'язкої стислої рідини. Проте такі обчислення вимагають значних комп'ютерних ресурсів, тому на даний момент при дослідженні подібних задач більш популярними є гібридні методи.

Метою даної роботи є дослідження особливостей потоку рідини в циліндричному каналі з двома послідовно розташованими діафрагмами або різкими звуженнями поперечного перетину, а саме: моделювання даного процесу та чисельний розрахунок; дослідження розвинення потоку в часі; аналіз структури потоку в області між діафрагмами в залежності від швидкості течії; визначення характеристик автоколивальних рухів середовища, що можуть призводити до появи тональних звуків. Розв'язання задачі базується на основних положеннях, викладених у роботі [22]. Запропонована методика була застосована до розв'язання різних задач гідродинамічної акустики і показала хорошу збіжність із експериментальними даними та чисельними результатами інших авторів [23–27].

2. Постановка задачі. Розглядається течія рідини у напівнескінченному циліндричному каналі з двома послідовно розташованими діафрагмами. В поздовжньому перетині каналу, зображеному на рис. 1, контури діафрагм в околі отворів мають форму півкола. Вважається, що поверхні каналу та діафрагм нерухомі й абсолютно жорсткі. Потік рідини з густиною ρ потрапляє в розрахункову область з рівномірною швидкістю V_1 через ліву межу $x = 0$, $0 \leq R < D_1/2$ та покидає її через праву $x = L$, $0 \leq R < D_1/2$. Течія розглядається при швидкостях значно менших за швидкість звуку в середовищі. Також припускається, що рух рідини в порожнині між звуженнями є близьким до осесиметричного, на що вказують експериментальні дослідження.

Значення геометричних параметрів діафрагм та порожнини між ними для проведення обчислень обираються такими, як в експериментальній роботі [5]: $D_2 = 6,35$ мм, $D_1/D_2 = D_3/D_2 = 8,16$, $L_2/D_2 = 1$, $L_3/D_2 = 6$. Розмір області вгору за потоком від першої діафрагми $L_1/D_2 = 12$, загальна довжина розрахункової області $L/D_2 = 92$. Кінематична в'язкість середовища $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5}$ м²/с відповідає в'язкості повітря при температурі 20°С.

Відомо, що розміри джерел звуку, що породжується потоком, тобто розміри діафрагм та порожнини між ними, малі в порівнянні з довжиною звукової хвилі [5]. Тому приймаються такі гіпотези: потужність збуджених потоком акустичних коливань є значно меншою за

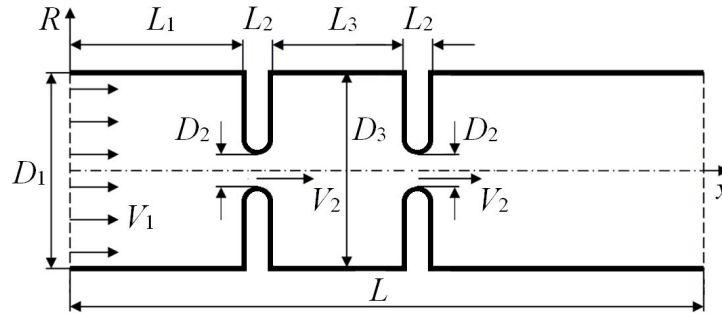


Рис. 1. Геометрія задачі.

потужність самого потоку, і породжений звук не впливає на його характер. У зв'язку з цим задача розв'язується в межах моделі в'язкої нестисливої рідини.

Основним параметром задачі є число Рейнольдса, яке можна визначити як

$$\text{Re} = \frac{V_2 D_2}{\nu},$$

де V_2 — швидкість потоку в отворах діафрагм, усереднена за поперечним перетином. Тоді масштабом довжини є діаметр отвору діафрагми D_2 , швидкості — швидкість V_2 , часу — величина D_2/V_2 , а масштабом тиску — подвоєний швидкісний напір ρV_2^2 .

У межах прийнятої моделі процес описується системою нестационарних рівнянь Нав'є – Стокса, що в безрозмірних величинах у тензорній формі мають вигляд

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U}\mathbf{U} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot \nabla \mathbf{U} - \nabla p, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

де p — скалярне поле тиску, $\mathbf{U}$ — векторне поле швидкості, а $\mathbf{U}\mathbf{U}$ — тензор другого рангу, визначений як зовнішній добуток векторів.

Крайові умови для швидкості: рівномірний потік на вході в розрахункову область, умова прилипання на твердих поверхнях та рівність нулю нормального градієнта на виході з розрахункової області:

$$\mathbf{U}|_{x=0} = (V_1, 0, 0), \quad \mathbf{U}|_{\Sigma} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}|_{x=L} = \mathbf{0}.$$

Дослідження проводилися в діапазоні швидкостей $V_1 \in [0,09; 0,155]$ м/с з кроком $5 \cdot 10^{-3}$ м/с, що відповідає числам Рейнольдса $\text{Re} \in [2537; 4369]$.

Для тиску задається рівність нулю нормального градієнта на всій межі області окрім виходу з неї, де обирається постійний тиск, рівний нулю:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Sigma} = 0, \quad p|_{x=L} = 0.$$

У початковий момент при першому обчисленні середовище знаходиться у стані спокою:

$$\mathbf{U}(t=0) = \mathbf{0}, \quad p(t=0) = 0.$$

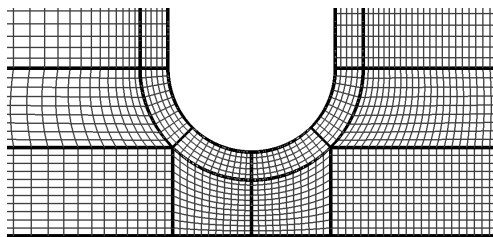


Рис. 2. Схема дискретизації розрахункової області в околі отвору першої діафрагми.

При наступних обчисленнях за початкові умови обираються поля тиску та швидкостей, отримані при попередньому обчисленні, що відповідають сформованому руху після закінчення перехідних процесів:

$$\mathbf{U}(t = 0) = \mathbf{U}_{pre}, \quad p(t = 0) = p_{pre}.$$

3. Розв'язання задачі. Розв'язання поставленої задачі проводиться чисельно за методом скінченних об'ємів. Чисельна схема будується для загального випадку тривимірної течії, тому внаслідок припущення щодо осової симетрії потоку за розрахункову область приймається циліндричний сектор (клин) з кутом розкриття 4° та одним елементом в азимутальному напрямку. При цьому кутова компонента швидкості $U_\phi = 0$. Для дискретизації області використовується неортогональна блочно-структурована сітка зі згущенням вузлів в отворах діафрагм та при наближенні до їх поверхонь. На рис. 2 схематично зображено її частину в околі першого звуження. Кількість контрольних об'ємів вздовж поперечного перетину отвору діафрагми — 69 з найменшим кроком біля поверхні $4 \cdot 10^{-5}$ м, загальна кількість об'ємів — 170546.

Будується скінченно-об'ємна схема другого порядку, яка базується на обчисленні потоку середовища крізь грані скінченного об'єму. Нехай m і n — два типові сусідні контрольні об'єми зі спільною гранню f , точки M і N — центроїди цих об'ємів з координатами $\mathbf{r}_M$ та $\mathbf{r}_N$ відповідно, тобто

$$\int_{V_m} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_M) dV = \int_{V_n} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_N) dV = 0. \quad (3)$$

Основна ідея методу полягає в тому, що рівняння руху та нерозривності (1), (2) інтегруються по контрольному об'єму m :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_m} \mathbf{U} dV + \int_{V_m} \nabla \cdot \mathbf{U} \mathbf{U} dV &= \frac{1}{\text{Re}} \int_{V_m} \nabla \cdot \nabla \mathbf{U} dV - \int_{V_m} \nabla p dV, \\ \int_{V_m} \nabla \cdot \mathbf{U} dV &= 0, \end{aligned}$$

а для обчислення одержаних інтегралів використовується узагальнена форма теореми Гауса – Остроградського:

$$\int_{V_m} \nabla \cdot \mathbf{U} dV = \oint_{S_m} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
\int_{V_m} \nabla \cdot \mathbf{U} \mathbf{U} dV &= \oint_{S_m} \mathbf{U} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S}, \\
\int_{V_m} \nabla \cdot \nabla \mathbf{U} dV &= \oint_{S_m} \nabla \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S}, \\
\int_{V_m} \nabla p dV &= \oint_{S_m} p d\mathbf{S},
\end{aligned} \tag{5}$$

де S_m — поверхня контрольного об'єму m .

Дискретизація рівнянь (1), (2) базується на дискретному аналогу другого порядку теореми Гауса – Остроградського. Для того щоб чисельна схема мала другий порядок точності, невідома функція повинна мати лінійну варіацію в контрольному об'ємі:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_M + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_M) \cdot (\nabla \mathbf{U})_M. \tag{6}$$

Тут і далі індекс M позначає значення відповідної функції в точці M , тобто $\mathbf{U}_M = \mathbf{U}(\mathbf{r}_M)$. Тоді згідно з (3) маємо

$$\int_{V_m} \mathbf{U} dV = \mathbf{U}_M V_m.$$

Обчислюючи інтеграл по контрольному об'єму від дивергенції швидкості (4) та враховуючи (6), отримуємо дискретну форму другого порядку теореми Гауса – Остроградського

$$(\nabla \cdot \mathbf{U})_M V_m = \sum_f \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{U}_f, \tag{7}$$

де $\mathbf{S}_f$ — вектор зовнішньої нормалі до грані f , модуль якого рівний площі грані S_f . Підсумовування в правій частині проводиться по всіх гранях контрольного об'єму m . Значення швидкості на грані контрольного об'єму $\mathbf{U}_f$ в правій частині (7) визначається зі значень швидкості в центроїдах сусідніх комірок $\mathbf{U}_M$ та $\mathbf{U}_N$ за центрально-різницевою схемою другого порядку:

$$\mathbf{U}_f = C \mathbf{U}_M + (1 - C) \mathbf{U}_N, \tag{8}$$

де сталий коефіцієнт визначений як відношення відстаней $C = |fN|/|MN|$.

Обчислюючи інтеграл по контрольному об'єму від градієнту тиску (5), маємо дискретне співвідношення другого порядку

$$(\nabla p)_M V_m = \sum_f \mathbf{S}_f p_f.$$

Значення тиску на грані контрольного об'єму p_f також визначається за центрально-різницевою схемою.

Дискретизація конвективних членів приводить до співвідношень

$$(\nabla \cdot \mathbf{U} \mathbf{U})_M V_M = \sum_f \mathbf{S}_f \mathbf{U}_f \mathbf{U}_f = \sum_f F \mathbf{U}_f, \tag{9}$$

де $F = \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{U}_f$ — потік середовища крізь грань f . Тут значення швидкості на грані контрольного об'єму $\mathbf{U}_f$ визначається шляхом конвективних різницевоїх схем. У даній роботі використовується схема класу TVD (Total Variation Diminishing) з обмежувачем потоку [28]. Основна ідея полягає в тому, що схема дискретизації залежить від локальної форми розв'язку. Вона надає достатню точність (більше ніж першого порядку) і в той же час гарантує обмеженість розв'язку, пригнічуючи нефізичні осциляції, які генерують класичні схеми другого порядку, такі як центрально-різницева схема. TVD схема може бути подання у вигляді суми

$$\mathbf{U}_f = (\mathbf{U}_f)_{UD} + \Psi[(\mathbf{U}_f)_{CD} - (\mathbf{U}_f)_{UD}],$$

де $(\mathbf{U}_f)_{UD}$ — значення швидкості на грані контрольного об'єму, розраховане за протипоточною схемою першого порядку

$$\mathbf{U}_f = \begin{cases} \mathbf{U}_M, & F > 0, \\ \mathbf{U}_N, & F \leq 0, \end{cases}$$

яка є безумовно стійкою та гарантує обмеженість розв'язку [29]; $(\mathbf{U}_f)_{CD}$ — значення швидкості на грані контрольного об'єму, розраховане за центрально-різницевою схемою другого порядку (8); Ψ — нелінійний обмежувач потоку, який є функцією відношення градієнтів швидкості на межах між даною коміркою та її сусідами вгору і вниз за потоком:

$$\Psi(q) = \max \left(\min \left(\frac{2}{k} q, 1 \right), 0 \right), \quad q = 2 \frac{(\mathbf{U}_M - \mathbf{U}_K)(\mathbf{U}_N - \mathbf{U}_M)}{(\mathbf{U}_N - \mathbf{U}_M)^2} - 1,$$

де K, M, N — три центроїди, послідовно розташовані в напрямку потоку. Такий обмежувач відповідає узагальненій кусково-лінійній схемі Chakravarthy – Osher для векторного поля [30]. Коефіцієнт k задається в діапазоні $0 < k \leq 1$, де значення $k \rightarrow 0$ відповідає більш високій точності, а $k = 1$ — більш високій стійкості розрахунку. В даній роботі приймається значення $k = 1$.

Дифузійний член дискретизується аналогічним чином:

$$(\nabla \cdot \nabla \mathbf{U})_M V_M = \sum_f \mathbf{S}_f (\nabla \mathbf{U})_f. \quad (10)$$

З урахуванням лінійної варіації $\mathbf{U}$ праву частину (10) на ортогональних ділянках сітки можна зобразити таким чином:

$$\mathbf{S}_f (\nabla \mathbf{U})_f = S_f \frac{\mathbf{U}_N - \mathbf{U}_M}{|MN|}.$$

На неортогональних ділянках сітки використовується ітераційна процедура корекції похибки, викликані неортогональністю [31].

Для дискретизації похідної за часом використовується неявна триточкова несиметрична схема з різницями назад, яка має другий порядок точності:

$$\int_{V_m} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} dV = \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)_M V_m = \frac{\frac{3}{2} \mathbf{U}_M^k - 2 \mathbf{U}_M^{k-1} + \frac{1}{2} \mathbf{U}_M^{k-2}}{\Delta t} V_m,$$

де $U_M^k = U_M(k\Delta t)$ — невідоме значення швидкості на k -му часовому шарі, а значення на попередніх часових шарах U_M^{k-1} та U_M^{k-2} відомі.

Отже, рівняння (1), (2) в дискретній формі можна записати таким чином:

$$\frac{\frac{3}{2}U_M^k - 2U_M^{k-1} + \frac{1}{2}U_M^{k-2}}{\Delta t} V_m + \sum_f F U_f^k - \frac{1}{\text{Re}} \sum_f \mathbf{S}_f \cdot (\nabla U^k)_f = - \sum_f \mathbf{S}_f p_f^k, \quad (11)$$

$$\sum_f \mathbf{S}_f \cdot U_f^k = 0. \quad (12)$$

Розглянемо дискретизацію крайових умов. У випадку умови Діріхле конвективний член також задається формулою (9). Значення швидкості U_f і потоку F на грані f , що лежить на межі області, задані. Дифузійний член дискретизується за формулою (10), а значення нормального градієнта швидкості на межі обчислюється з відомих значень швидкості в центроїді комірки і на грані, що лежить на межі області:

$$\mathbf{S}_f \cdot (\nabla U)_f = S_f \frac{U_f - U_M}{|Mf|}.$$

У випадку умови Неймана значення швидкості на межі U_f , необхідне для обчислення правої частини (9), знаходиться зі значень швидкості в центроїді контрольного об'єму і заданого значення нормального градієнта на грані:

$$U_f = U_M + \frac{|Mf|}{S_f} \mathbf{S}_f \cdot (\nabla U)_f.$$

Для обчислення дифузійного члена нормальний градієнт швидкості на межі області $(\nabla U)_f$ у правій частині (10) задається безпосередньо крайовою умовою.

Інтерполюючи в (11), (12) значення шуканих полів на гранях комірок через їх значення в центроїдах сусідніх комірок, отримуємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь, яка і має бути розв'язана чисельно. Оскільки нелінійні розв'язники потребують величезних комп'ютерних ресурсів, у даній роботі проводиться лінеаризація конвективного члена. Процедура лінеаризації полягає в тому, що для розрахунку потоку F використовуються відомі значення швидкості на попередньому часовому шарі, а потім отримані значення уточнюються шляхом ітерацій.

Окремо варто приділити увагу проблемі узгодження полів швидкостей і тиску. Ця проблема впливає з необхідності використовувати в практичних задачах ітераційні, а не прямі методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Тоді як дискретне рівняння збереження імпульсу (11) використовується для знаходження компонентів швидкості, рівняння для знаходження тиску відсутнє, оскільки в межах моделі нестисливої рідини тиск не входить у рівняння нерозривності (12). Як наслідок при використанні ітераційних розв'язників СЛАР необхідно штучно ввести тиск у рівняння нерозривності. В даній роботі використовується процедура PISO, яка є процедурою типу предиктор – коректор з двома коректорами [32].

Рівняння для тиску виводиться таким чином. Повністю дискретний аналог рівняння руху (11) можна розв'язати відносно U_M^k :

$$U_M^k = \mathbf{H}^o + \mathbf{H}^k - A(\nabla p^k)_M.$$

Тут член $\mathbf{H}^k$ містить швидкості в центроїдах сусідніх комірок $\mathbf{U}_N^k$, $\mathbf{H}^o$ містить відомі значення поля швидкості на попередніх часових шарах $\mathbf{U}_M^{k-1}$ та $\mathbf{U}_M^{k-2}$, A — відома скалярна величина.

Швидкості на гранях комірки отримуються шляхом інтерполяції на грань:

$$\mathbf{U}_f^k = \mathbf{H}_f^o + \mathbf{H}_f^k - A_f(\nabla p^k)_f.$$

Помноживши скалярно на вектор нормалі $\mathbf{S}_f$, одержуємо вираз для потоку через грань f :

$$F = \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{U}_f^k = \mathbf{S}_f \left[\mathbf{H}_f^o + \mathbf{H}_f^k - A_f(\nabla p^k)_f \right]. \quad (13)$$

Остаточно дискретний аналог системи нестисливих рівнянь Нав'є–Стокса (11), (12) має вигляд

$$\mathbf{U}_M^k = \mathbf{H}^o + \mathbf{H}^k - \frac{A}{V_m} \sum_f \mathbf{S}_f p_f^k, \quad (14)$$

$$\sum_f A_f \mathbf{S}_f (\nabla p^k)_f = \sum_f \mathbf{S}_f \left[\mathbf{H}_f^o + \mathbf{H}_f^k \right]. \quad (15)$$

Алгоритм PISO для нестационарних течій складається з наступних кроків:

1. **Предиктор.** Для отримання першого наближення поля швидкості $\mathbf{U}^k$ розв'язується дискретне рівняння збереження імпульсу (14). Поле тиску p^k на даному етапі невідоме, тому використовуються відомі значення на попередньому часовому шарі p^{k-1} . Також вираз $\mathbf{H}^k$ лінеаризується. Для цього замість F підставляються його відомі значення на попередньому часовому шарі. Отже, рівняння набирає вигляду

$$\mathbf{U}_M^* = \mathbf{H}^o + \mathbf{H}^* - \frac{A}{V_m} \sum_f \mathbf{S}_f p_f^{k-1}, \quad (16)$$

де верхній індекс $*$ позначає перше наближення.

2. **Коректор 1.** Використовуючи одержані значення $\mathbf{U}^*$, обчислюємо $\mathbf{H}_f^*$ і розв'язуємо рівняння для тиску (15), яке тепер подається у вигляді

$$\sum_f A_f \mathbf{S}_f (\nabla p^*)_f = \sum_f \mathbf{S}_f \left[\mathbf{H}_f^o + \mathbf{H}_f^* \right]. \quad (17)$$

Таким чином отримуємо перше наближення поля тиску p^* , яке використовується для корекції поля швидкості. Варто відмітити, що кожного разу, коли нове наближення для тиску одержане, потрібно також перерахувати поле потоку F , який входить у коефіцієнти виразу $\mathbf{H}$. Для цього можна використовувати рівняння (13), де в праву частину замість $\mathbf{H}^k$, p^k підставлені їх останні отримані наближення. Корекція поля швидкості здійснюється за явною схемою

$$\mathbf{U}_M^{**} = \mathbf{H}^o + \mathbf{H}^* - \frac{A}{V_m} \sum_f \mathbf{S}_f p_f^*,$$

3. **Коректор 2.** Використання явної процедури корекції передбачає, що поле швидкості корегується за рахунок урахування нових значень F і p . Але при цьому значення швидкості

U_N^* в центроїдах сусідніх комірок, які входять у H^* , беруться в першому наближенні. Тому потрібно повернутися до кроку 2 і повторити петлю PISO, тобто провести обчислення виразу H , розв'язати рівняння для тиску, обчислити потік F і провести явну корекцію поля швидкості. У такий спосіб одержимо значення полів U^{**} та p^{**} після другого коректора. Петлю PISO можна повторювати допоки точність не досягне заданого значення.

Розглянемо тепер розв'язання отриманих СЛАР (16), (17). Така система може бути записана у вигляді

$$A_M x_M^k + \sum_N A_N x_N^k = b_M, \quad (18)$$

де x_M^k — невідомі, а підсумовування проводиться по всіх контрольних об'ємах n сусідніх з m . Тут варто окремо обговорити внесок конвективного члена. Відомо, що діагональне домінування в матриці забезпечує тільки зустрічно-потоківу схему. Будь-які інші схеми створюють від'ємні коефіцієнти, що може негативно позначатися на збіжності ітераційного методу. Для того щоб покращити якість матриці для різницевої схеми другого порядку, в даній роботі використовується метод відкладеної корекції для конвективного члена [33]. Згідно з цим методом будь-яка різницева схема розглядається як модифікація зустрічно-потоківу схеми. Та частина конвективного члена, яка відповідає зустрічно-потоківій схемі, розглядається неявно, тобто вбудовується в матрицю, а інша частина переноситься в праву частину системи. Внаслідок цього забезпечується діагональне домінування в матриці системи.

Для розв'язання системи (18) використовується метод спряжених градієнтів. За цим методом система рівнянь розв'язується за скінченне число ітерацій, що не перевищує число невідомих. До значного скорочення числа ітерацій приводить хороше початкове наближення, а також передобумовлення. До симетричних матриць у даній роботі застосовується метод спряжених градієнтів з передобумовленням типу неповної факторизації Холецкого (ICCG), а до асиметричних матриць — стабілізований метод біспряжених градієнтів з передобумовленням типу неповної LU факторизації (BiCGSTAB) [34, 35].

Задача розв'язується за допомогою бібліотек тулбоксу з відкритим кодом OpenFOAM з використанням обчислювальних потужностей комплексу СКІТ Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України [36]. Для розпаралелювання обчислень використовується технологія MPI та метод декомпозиції області розв'язання [37].

З метою контролю точності обчислень поле швидкості чисельно інтегрується по поперечних перетинах отворів діафрагм $S_1(x = L_1 + L_2/2, 0 \leq R < D_2/2)$ та $S_2(x = L_1 + 3L_2/2 + L_3, 0 \leq R < D_2/2)$. Це дозволяє контролювати точність виконання умови нестисливості середовища, яку можна подати у вигляді

$$\left| \frac{4 \int_{S_i} U_x ds - \pi D_1^2 V_1}{\pi D_1^2 V_1} \right| < \delta, \quad i = 1, 2.$$

Для результатів, поданих у даній роботі, відносна похибка δ не перевищує $3,5 \cdot 10^{-3}$.

4. Аналіз отриманих результатів. Розглянемо процес формування потоку в області між діафрагмами на основі поля завихреності в поздовжньому перетині каналу. На рис. 3 зображено поле завихреності для чотирьох моментів розмірного часу t . У початковий момент середовище знаходиться в стані спокою, а потім на лівій межі задається рівномірний потік

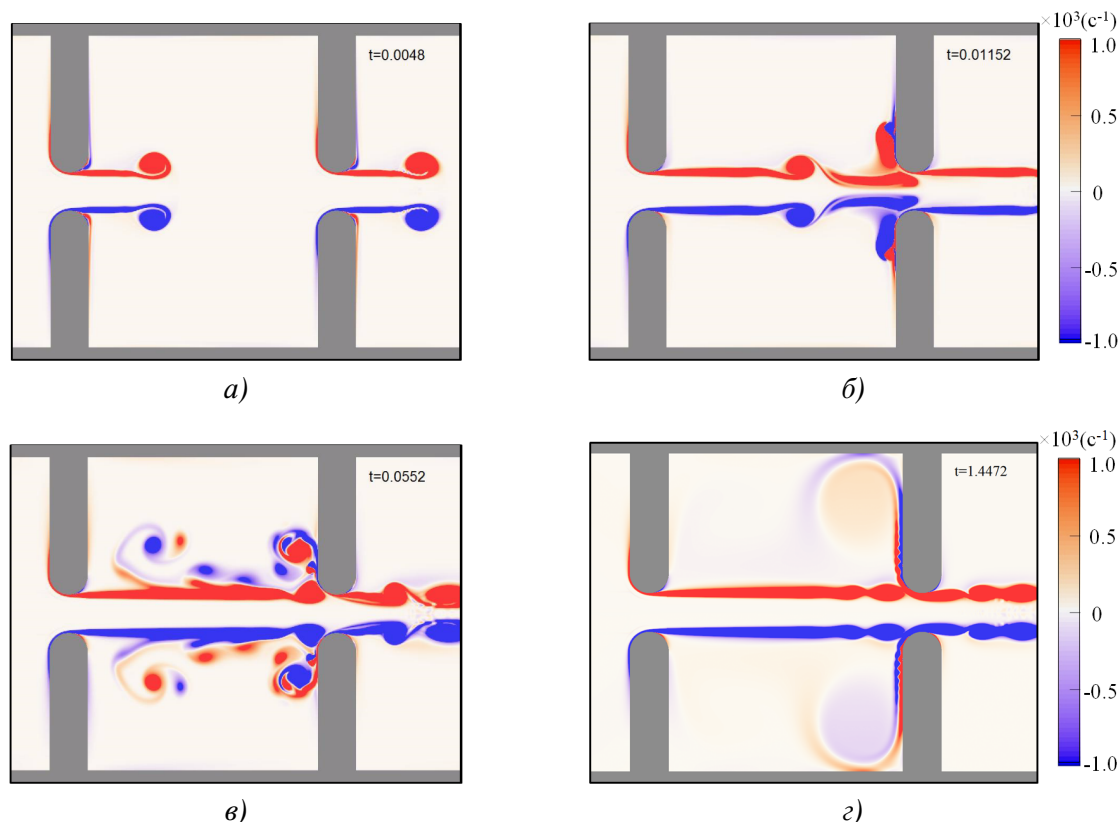


Рис. 3. Поле завихреності в області між діафрагмами протягом перехідного процесу при $Re = 3383$ у момент часу а) $t = 0,0048$ с; б) $t = 0,01152$ с; в) $t = 0,0552$ с; г) $t = 1,4472$ с.

з числом Рейнольдса $Re = 3383$ ($V_2 = 7,99$ м/с). Діапазон значень завихреності на всіх наступних рисунках обмежено проміжком $[-10^3, 10^3] \text{ c}^{-1}$ з метою більш чіткої передачі структури поля завихреності.

Після початку руху на поверхнях обох діафрагм формуються ламінарні примежові шари, які, відриваючись від поверхонь, утворюють кільцеві вихори (рис. 3 а). Перший вихор зноситься течією до другої діафрагми та розширюється, а за ним утворюються нові. Внаслідок розширення весь перший вихор набігає на поверхню діафрагми і утворює при взаємодії з її примежовим шаром циркуляційний рух. Другий вихор повністю проходить крізь перший та отвір діафрагми (рис. 3 б). Наступні вихори розрізаються діафрагмою на дві частини: одна проходить далі в отвір, а друга втягується в циркуляційний рух. У такий спосіб біля другого звуження починає формуватися великий кільцевий вихор. При взаємодії цього вихору з примежовим шаром утворюється ряд вихорів протилежної завихреності. Вони рухаються проти потоку вздовж кільцевого зсувного шару, що сформувався на межі струменя та порожнини між діафрагмами, та збуджують його. Так, біля першої діафрагми формується другий великий кільцевий вихор протилежної завихреності (рис. 3 в). Надалі продовжується остаточне формування структури потоку. Обидва великі кільцеві вихори розширюються та приймають стійке положення вглибині порожнини. Також припиняється утворення вихорів протилежної завихреності при взаємодії великого вихора з примежовим шаром другої діафрагми (рис. 3 г).

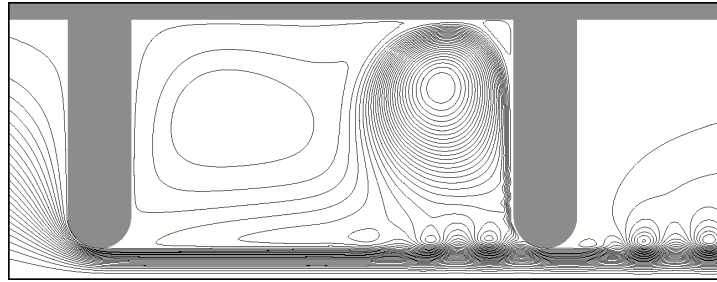


Рис. 4. Лінії течії в області між діафрагмами при $Re = 3383$.

Отже, в порожнині між діафрагмами утворюється циркуляційний рух середовища, який переносить частину кінетичної енергії струменя з області його входу в отвір другої діафрагми вгору за потоком. Цей процес добре видно на рис. 4, де зображено лінії течії в половині поздовжнього перетину каналу. Його можна інтерпретувати як гідродинамічний канал зворотного зв'язку, що створює умови для виникнення автоколивань у даній системі.

Дійсно, зсувний шар при наближенні до другої діафрагми набуває хвилястого характеру, і в ньому послідовно утворюються вихори, що зносяться потоком у отвір (рис. 3 г). Ці вихори спричиняють осесиметричні коливання полів тиску та швидкості в околі звуження. На рис. 5 зображено зміну величини тиску p протягом перехідного процесу на поверхні другої діафрагми в точці $M_s(x = L_1 + L_2 + L_3, R = D_2)$ та поздовжньої швидкості потоку U_x в отворі у точці M_o , що належить осі каналу ($x = L_1 + 3L_2/2 + L_3, R = 0$). Після початку руху в момент часу $t \approx 2 \cdot 10^{-3}$ с в околі звуження встановилася постійна швидкість, а при $t \approx 3 \cdot 10^{-3}$ с — тиск досягнув свого максимуму та повільно знижується. При зіткненні першого кільцевого вихора з діафрагмою при $t \approx 1.1 \cdot 10^{-2}$ с відбувається різке падіння тиску в області контакту. При проходженні другого вихора крізь отвір діафрагми при $t \approx 1.2 \cdot 10^{-2}$ с тиск у точці M_s і швидкість у точці M_o різко зростають. Другий пік швидкості при $t \approx 1.9 \cdot 10^{-2}$ с пов'язаний зі злиттям двох послідовних вихорів в околі звуження внаслідок взаємодії з вихором протилежної завихреності, який рухається проти потоку. Далі амплітуда коливань поступово зменшується і, як і період, стабілізується.

Розглянемо особливості потоку в порожнині між діафрагмами після закінчення перехідних процесів для різних значень числа Рейнольдса. На рис. 6 а зображено поле завихреності в порожнині при $Re = 2537$. При такій швидкості у процесі формування структури потоку зсувний шар стабілізується, і течія стає стаціонарною. При наближенні до другої діафрагми зсувний шар дещо розширюється, завдяки чому він розщеплюється діафрагмою на дві частини. При цьому збурення в струмені не виникають і його швидкість не змінюється з часом. Отже, при відносно низьких числах Рейнольдса енергії в каналі зворотного зв'язку виявляється не достатньо для утворення автоколивань.

При поступовому збільшенні швидкості потоку зсувний шар стає нестационарним і починає коливатися при наближенні до другої діафрагми. На рис. 6 б видно, що при $Re = 2819$ біля її отвору вже утворюються кільцеві вихори. Ці вихори набігають на отвір діафрагми та спричиняють у ньому осесиметричні коливання поздовжньої швидкості потоку. Розкладемо цю швидкість на стаціонарну та осцилюючу частини:

$$U_x(R, t) = U_x^{(s)}(R) + U_x^{(o)}(R, t),$$

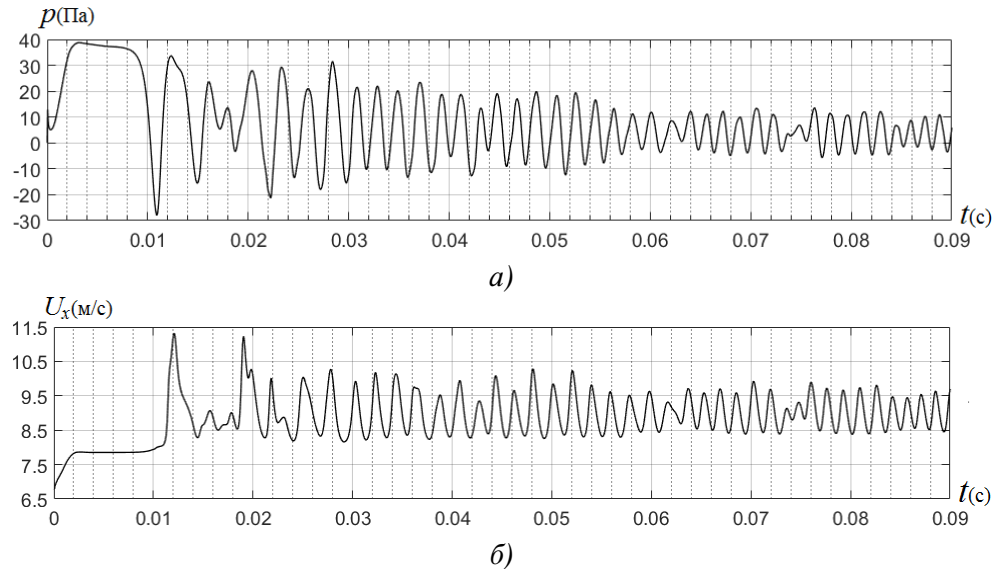


Рис. 5. а) тиск на поверхні другої діафрагми в точці M_s ; б) поздовжня швидкість в отворі діафрагми в точці M_o протягом перехідного процесу при $Re = 3383$ ($V_2 = 7.99$ м/с).

де стаціонарна частина визначається як нульовий член розкладу в ряд Фур'є за часом:

$$U_x^{(s)}(R) = \frac{1}{T} \int_0^T U_x(R, t) dt.$$

Розглянемо профіль осцилюючої частини поздовжньої швидкості $U_x^{(o)}$ в перетині отвору другої діафрагми S_2 ($Y \in [-D_2/2, D_2/2]$) при $Re = 2819$ ($V_2 = 6,66$ м/с). На рис. 7 а зображено його зміну протягом одного періоду коливальності $T \approx 1.83 \cdot 10^{-3}$ с з кроком $T/6$. Ці коливання мають яскраво виражений періодичний характер та можуть бути джерелом звуку в каналі. Варто також відмітити, що профіль швидкості в перетині отвору першої діафрагми S_1 (рис. 7 б) не змінюється з часом.

При збільшенні швидкості потоку структура поля завихреності змінюється. На рис. 8 а, що відповідає випадку $Re = 3664$, видно, що утворення вихорів у зсувному шарі відбувається вище за потоком і їх кількість збільшується. Великий кільцевий вихор стає менш регулярним і починає втрачати стійкість. Періодично з його поверхні зриваються об'єми рідини протилежної завихреності, що рухаються проти потоку та вливаються у другий кільцевий вихор біля першої діафрагми. Внаслідок збільшення швидкості струменя і кількості вихорів у зсувному шарі період автоколивань зменшується і в даному випадку рівний $T \approx 1,42 \cdot 10^{-3}$ с.

Водночас при числах Рейнольдса, близьких до $Re = 3312$, у системі виникає другий стійкий режим автоколивань із меншим періодом. На рис. 8 б зображено поле завихреності в області між діафрагмами при $Re = 3664$, що відповідає цьому режиму з періодом $T \approx 1,24 \cdot 10^{-3}$ с. У цьому випадку частота утворення кільцевих вихорів у зсувному шарі та їх швидкість знесення потоком до другої діафрагми є вищими, а амплітуда коливальності нижчою. У зв'язку з цим великий кільцевий вихор тут є більш стабільним, ніж у випадку першого режиму автоколивань (рис. 8 а).

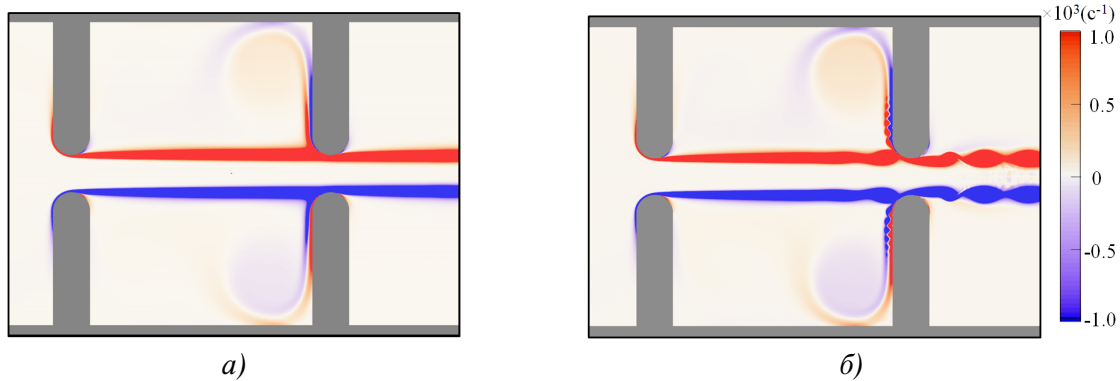


Рис. 6. Поле завихреності в області між діафрагмами після закінчення перехідних процесів при а) $Re = 2537$; б) $Re = 2819$.

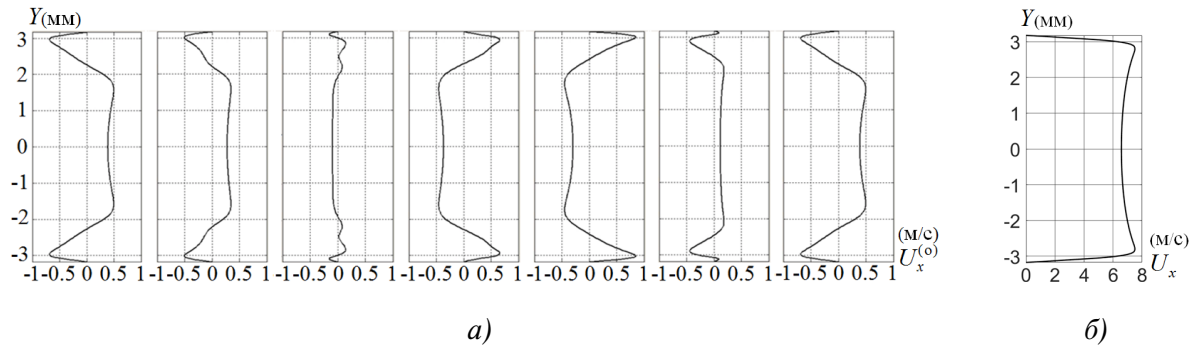


Рис. 7. а) зміна профілю осцилюючої частини поздовжньої швидкості $U_x^{(o)}$ в перетині S_2 протягом одного періоду коливань T з кроком $T/6$; б) повний профіль поздовжньої швидкості в перетині S_1 при $Re = 2819$ ($V_2 = 6,66$ м/с).

При подальшому збільшенні швидкості великий кільцевий вихор втрачає стійкість. На рис. 9 а – в зображено поле завихреності при $Re = 4087$ для трьох моментів часу $\tilde{t}$ (за початок відліку обрано момент часу, при якому вихор є сформованим). Після формування вихора (рис. 9 а) в околі отвору другої діафрагми починають накопичуватися збурення. Як наслідок, потік енергії в циркуляційному русі стає нерегулярним. Через деякий час ці збурення стають достатньо великими, щоб зруйнувати кільцевий вихор (рис. 9 б). Після цього процес формування потоку починається заново і біля другої діафрагми формується новий вихор (рис. 9 в). Завдяки цьому в даному випадку можлива почергова зміна режиму автоколивань із першого на другий і навпаки.

При більших числах Рейнольдса потік у порожнині між діафрагмами турбулізується, і при $Re = 4228$ перший режим автоколивань вже не спостерігається. Як видно з рис. 9 г, при $Re = 4369$ великий кільцевий вихор біля другої діафрагми не формується. Натомість тут утворюються невеликі вихори як додатної, так і від'ємної завихреності, які просуваються вглиб порожнини. У цьому випадку також відбувається утворення вихорів у зсувному шарі, проте цей процес вже не є періодичним. Частота утворення вихорів та швидкість їх переміщення змінюється внаслідок взаємодії з циркуляційним рухом біля другої діафрагми. Також вони можуть зливатися один з одним або повністю проходити крізь отвір.

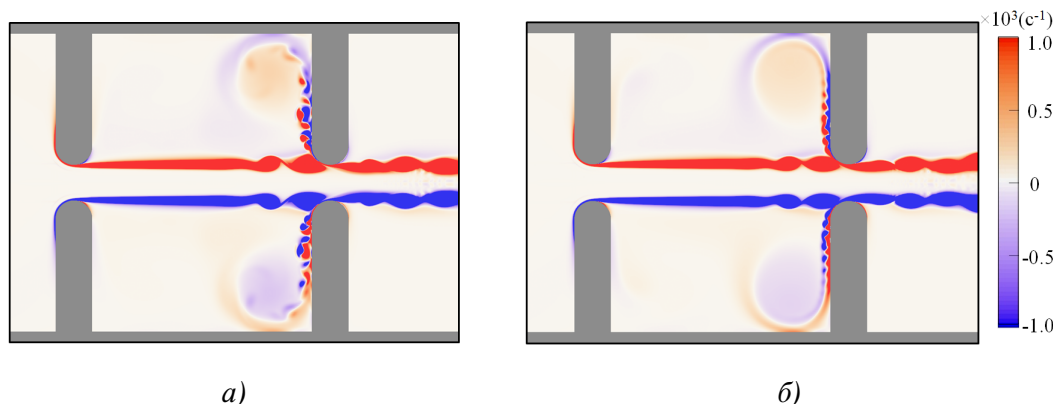


Рис. 8. Поле завихреності в області між діафрагмами після закінчення перехідних процесів при $Re = 3664$ з періодом автоколивань: а) $T \approx 1,42 \cdot 10^{-3}$ с; б) $T \approx 1,24 \cdot 10^{-3}$ с.

На рис. 10 зображено амплітудно-частотні спектри коливань поздовжньої швидкості потоку U_x в точці M_o перетину отвору другої діафрагми S_2 (частоти коливань усіх точок перетину є однаковими). З рис. 10 а видно, що при $Re = 2819$ в каналі дійсно встановилися періодичні коливання з яскраво вираженою основною частотою $f_1 = 547,7$ Гц, амплітуда якої значно переважає амплітуди інших гармонік. Другою за амплітудою є друга гармоніка з удвічі більшою частотою, що також справедливо для всього інтервалу чисел Рейнольдса, на якому збуджуються періодичні коливання. При збільшенні швидкості потоку частота коливань зростає, і у спектрі поступово з'являються нові гармоніки (рис. 10 б). При $Re = 4228$ ще можна виділити основну частоту коливань $f_2 = 915$ Гц, проте внесок інших складових спектра вже є досить суттєвим (рис. 10 в). З рис. 10 г видно, що при $Re = 4369$ спектр є багаточастотним, що характерно для шуму.

Одержані результати дають змогу встановити залежність числа Струхала $St = fD_2/V_2$ коливань профілю поздовжньої швидкості U_x в перетині S_2 від числа Рейнольдса Re . На відповідному графіку (рис. 11) нижня лінія відповідає першому режиму автоколивань з нижчими частотами f_1 , верхня лінія — другому режиму з частотами f_2 . Отже, автоколивання в системі виникають тільки після досягнення певного критичного значення числа Рейнольдса $Re_1 \approx 2678$. До цього потік є стаціонарним і коливання не збуджуються. При досягненні другого критичного значення $Re_2 \approx 3312$ в системі з'являється другий стійкий режим автоколивань. Зі збільшенням швидкості потоку число Струхала майже не змінюється як у випадку першого, так і другого режимів, і лежить у межах $St_1 \in [0.52, 0.53]$ та $St_2 \in [0.58, 0.59]$ відповідно. Тобто частота коливань зростає практично прямо пропорційно швидкості потоку, що є типовим для систем з гідродинамічним зворотним зв'язком [1]. При значенні числа Рейнольдса, більшому за $Re_3 \approx 4087$, перший режим автоколивань не спостерігається, а другий продовжує бути періодичним до $Re_4 \approx 4228$. Далі автоколивання стають багаточастотними і характер звуку наближається до шумового.

Така поведінка підтверджується експериментальними дослідженнями та чисельними розрахунками інших авторів. У роботі [4] було показано, що коливання, спричинені зіткненням вихорів у зсувному шарі з твердою поверхнею, виникають на певних інтервалах чисел Рейнольдса з приблизно сталими числами Струхала, а перехід від одного інтервалу до іншого пов'язаний з гістерезисом. У роботі [5] за допомогою камери зі стробоскопічним підсвічуванням було вперше зафіксовано, що на поверхні струменя дійсно

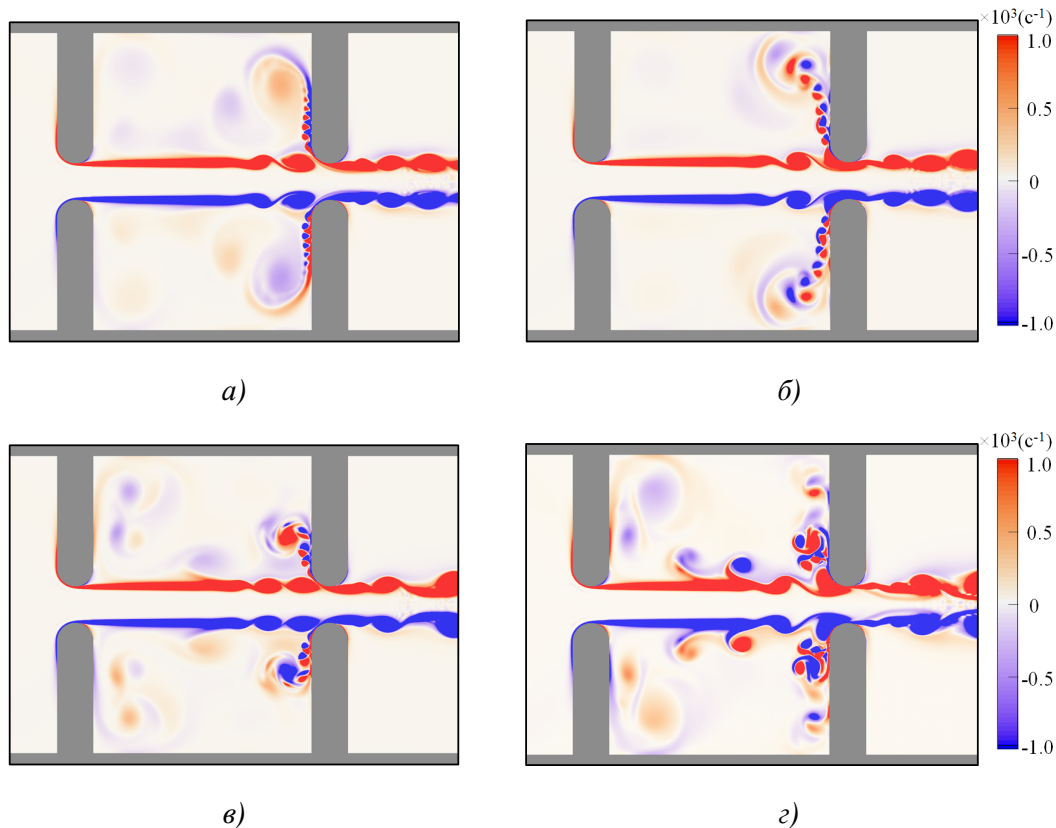


Рис. 9. Поле завихреності в області між діафрагмами при $Re = 4087$ в момент часу а) $\tilde{t} = 0$ с; б) $\tilde{t} = 0,34$ с; в) $\tilde{t} = 1,465$ с; при г) $Re = 4369$.

утворюються кільцеві вихори, з появою яких і пов'язувалося виникнення звукових сигналів. Обчислені поля завихреності узгоджуються з візуалізаціями потоку, зображеними і в інших експериментальних роботах [7, 10, 11, 13], а також з полями завихреності та тиску, поданими у інших прикладних математичних роботах [15, 17, 18, 20, 21].

Інтервал швидкостей потоку, що відповідає першому режиму автоколивань, співпадає з інтервалом експериментального спостереження тонального звуку в роботі [5]. Частоти коливань також є близькими, проте частота звуку в експерименті зі збільшенням швидкості зростає повільніше, що пов'язано з акустичним зворотним зв'язком ззовні порожнини. У роботах [11, 16, 18] показано, що стоячі акустичні хвилі в каналах вгору чи вниз за потоком від порожнини при резонансних умовах можуть визначати характеристики звуку в системі. Водночас у роботі [15] показано, що при відсутності резонансних структур гідродинамічний зворотний зв'язок повністю визначає фундаментальні характеристики даної системи, тоді як акустичний зворотний зв'язок пригнічує широкопasmовий шум і підсилює основну частоту звуку та її вищі гармоніки.

Окремо варто відзначити, що в роботах [20, 21] показано, що в тривимірній моделі подібної динамічної системи при абсолютній геометричній осьовій симетрії наявна асиметрія потоку. Спостерігалася азимутальна деформація кільцевих вихорів у зсувному шарі та нахил їх осей відносно осі симетрії. Проте автори відмічають, що асиметрія в полі тиску є досить незначною і тому можна нехтувати ефектами неоднорідності в азимутальному

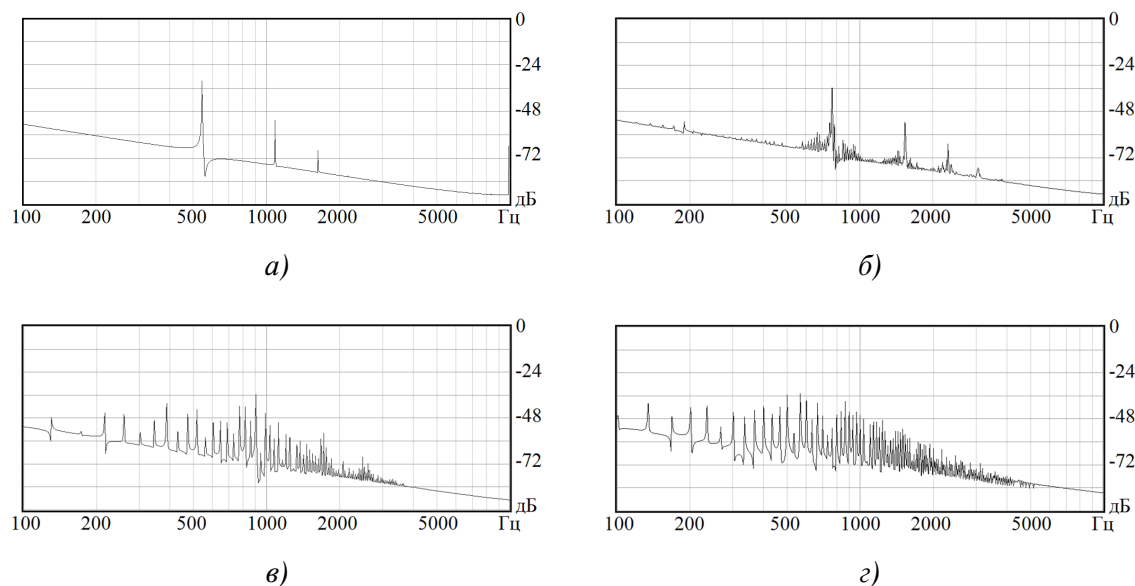


Рис. 10. Амплітудно-частотні спектри коливань поздовжньої швидкості U_x в точці отвору другої діафрагми M_o при а) $Re = 2819$; б) $Re = 3946$; в) $Re = 4228$; г) $Re = 4369$.

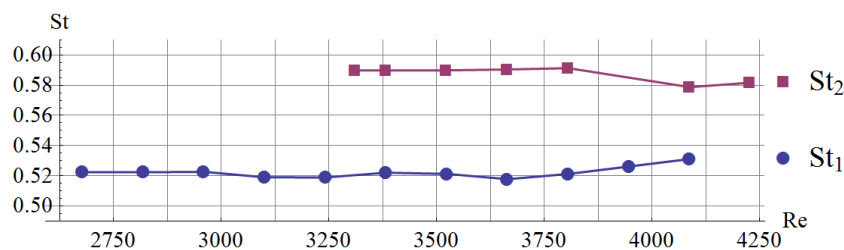


Рис. 11. Число Струхалі коливань профілю поздовжньої швидкості U_x в перетині отвору другої діафрагми S_2 як функція числа Рейнольдса Re .

напрямку. Водночас варто зауважити, що величина асиметрії залежить від геометричних параметрів системи та збільшується при більш високій швидкості потоку [10].

5. Висновки. Проведено чисельне моделювання течії в'язкої нестисливої рідини у циліндричному каналі з двома послідовно розташованими діафрагмами. У зв'язку з прийнятими припущеннями поставлена гідродинамічна задача розв'язується в межах моделі в'язкої нестисливої рідини. Розв'язання проводиться за методом скінченних об'ємів з використанням схем дискретизації другого порядку точності за простором та часом. Для інтерполяції конвективних членів використовується TVD форма центрально-різницевої схеми з обмежувачем потоку. Розрахунок поля швидкості і тиску проводиться за допомогою процедури PISO.

Проведено аналіз процесу формування потоку та особливостей руху середовища в області між звуженнями залежно від швидкості потоку на основі полів завихреності, ліній течії та профілів швидкості в отворах діафрагм. Показано, що у порожнині між діафрагмами встановлюється циркуляційний рух середовища, який можна інтерпретувати як гідродинамічний канал зворотного зв'язку. В певному діапазоні чисел Рейнольдса у зсувному шарі утворюється послідовний ряд кільцевих вихорів, що спричиняють періодичні коливання

профілю поздовжньої швидкості в отворі другої діафрагми. Ці коливання можуть бути джерелом звуку в каналі.

Важливою особливістю даної системи є існування двох стійких режимів автоколивань з різними частотами. Ці режими характеризуються практично сталим числом Струхала зі зміною числа Рейнольдса. Структура амплітудно-частотного спектра цих коливань ускладнюється при збільшенні числа Рейнольдса. Також при наближенні до певного критичного значення числа Рейнольдса режим коливань може почергово змінюватися внаслідок дестабілізації циркуляційного руху. При перевищенні цього значення автоколивання втрачають періодичність, і структура їхнього амплітудно-частотного спектра набуває характерного для шуму вигляду.

Отримані результати добре узгоджуються з результатами інших авторів. Обчислені величини полів швидкості та тиску в ближньому полі дають можливість оцінити частоту збуджених акустичних коливань та можуть бути використані для дослідження дальнього акустичного поля. Вартим уваги залишається також питання залежності особливостей потоку від геометричних параметрів системи. Крім цього, використана методика дозволяє в подальшому досліджувати тривимірну модель потоку.

Література

1. Вовк І. В., Гринченко В. Т. Звук, рожденный потоком (очерки об аэрогидродинамической акустике). – Киев: Наук. думка, 2010. – 221 с.
2. Sondhauss C. Ueber die beim Ausstromen der Luft entstehenden Tone // Ann. Phys. Chem. – 1854. – **167**, № 1. – P. 126–147.
3. Стрелит Дж. В. Теория звука. Т. 2. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1955. – 474 с.
4. Chanaud R. C., Powell. A. Some experiments concerning the hole and ring tone // J. Acoust. Soc. America. – 1965. – **37**, № 5. – P. 902–911.
5. Wilson T. A., Beavers G. S., DeCoster M. A., Holger D. K., Regenfuss M. D. Experiments on the fluid mechanics of whistling // J. Acoust. Soc. America. – 1971. – **50**, № 1B. – P. 366–372.
6. Rockwell D., Schachenmann A. Self-generation of organized waves in an impinging turbulent jet at low Mach numbers // J. Fluid Mech. – 1982. – **117**. – P. 425–441.
7. Huang X. Y., Weaver D. S. On the active control of shear layer oscillations across a cavity in the presence of pipeline acoustic resonance // J. Fluids Struct. – 1991. – **5**, № 2. – P. 207–219.
8. Басовский В. Г., Вовк І. В., Вовк О. И. О возможности генерирования тональных звуковых колебаний потоком воздуха в бронхах со стенозом // Акуст. вестн. – 2003. – **6**, № 1. – С. 3–21.
9. Geveci M., Oshkai P., Rockwell D., Lin J.-C., Pollack M. Imaging of the self-excited oscillation of flow past a cavity during generation of a flow tone // J. Fluids Struct. – 2003. – **18**, № 6. – P. 665–694.
10. Meganathan A. J., Vakili A. D. An experimental study of acoustic and flow characteristics of hole tones // 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 9–12 January 2006. – Reno, Nevada, 2006. – 14 p.
11. Henrywood R. H., Agarwal A. The aeroacoustics of a steam kettle // Phys. Fluids. – 2013. – **25**, № 10. – 23 p.
12. Curle N. The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound // Proc. Royal Soc. London. Ser. A. Math. Phys. Sci. – 1955. – **231**, № 1187. – P. 505–514.
13. Hourigan K., Welsh M. C., Thompson M. C., Stokes A. N. Aerodynamic sources of acoustic resonance in a duct with baffles // J. Fluids Struct. – 1990. – **4**, № 4. – P. 345–370.
14. Kriesels P. C., Peters M. C. A. M., Hirschberg A., Wijnands A. P. J., Iafrati A., Riccardi G., Piva R., Bruggeman J. C. High amplitude vortex-induced pulsation in a gas transport system // J. Sound Vib. – 1995. – **184**, № 2. – P. 343–368.
15. Langthjem M. A., Nakano M. A numerical simulation of the hole-tone feedback cycle based on an axisymmetric discrete vortex method and Curle's equation // J. Sound Vib. – 2005. – **288**, № 1-2. – P. 133–176.

16. *Langthjem M. A., Nakano M.* Asymptotic and numerical analysis of resonance and lock-in by flow-acoustic interaction in an expansion chamber-pipe system // *J. Fluid Sci. Technol.* – 2016. – **11**, № 4. – 19 p.
17. *Nakiboglu G., Belfroid S. P. C., Golliard J., Hirschberg A.* On the whistling of corrugated pipes: effect of pipe length and flow profile // *J. Fluid Mech.* – 2011. – **672**. – P. 78–108.
18. *Nakiboglu G., Manders H. B. M., Hirschberg A.* Aeroacoustic power generated by a compact axisymmetric cavity: prediction of self-sustained oscillation and influence of the depth // *J. Fluid Mech.* – 2012. – **703**. – P. 163–191.
19. *Борисюк А. О.* Метод розв'язування задачі про течію в каналі з двома осесиметричними звуженнями // *Науков. технології.* – 2018. – **38**, № 2. – P. 270–278.
20. *Matsuura K., Nakano M.* Direct computation of a hole-tone feedback system at very low Mach numbers // *J. Fluid Sci. Technol.* – 2011. – **6**, № 4. – P. 548–561.
21. *Matsuura K., Nakano M.* A throttling mechanism sustaining a hole tone feedback system at very low Mach numbers // *J. Fluid Mech.* – 2012. – **710**. – P. 569–605.
22. *Малюга В. С.* Численное исследование течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами. Алгоритм решения // *Прикл. гідромеханіка.* – 2010. – **12**, № 4. – С. 45–62.
23. *Вовк І. В., Гринченко В. Т., Малюга В. С.* Особенности движения среды в каналах со стенозами // *Прикл. гідромеханіка.* – 2009. – **11**, № 4. – С. 17–30.
24. *Вовк І. В., Малюга В. С.* Об одном методе оценки звукового поля эоловых тонов // *Акуст. вестн.* – 2010. – **13**, № 2. – С. 3–19.
25. *Малюга В. С.* Численное моделирование обтекания сферы потоком вязкой несжимаемой жидкости // *Прикл. гідромеханіка.* – 2013. – **15**, № 3. – С. 43–67.
26. *Vovk I. V., Grinchenko V. T., Malyuga V. S.* Self-induced oscillations of a jet flowing over the wedge. The mechanism of appearance of the feedback // *J. Math. Sci.* – 2017. – **220**, № 3. – P. 265–272.
27. *Троценко Я. П.* Автоколивальні процеси в циліндричному каналі зі стенозами // *Вісн. КНУ ім. Т. Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки.* – 2017. – № 3. – С. 229–232.
28. *Waterson N. P., Deconinck H.* Design principles for bounded higher-order convection schemes — a unified approach // *J. Comput. Phys.* – 2007. – **224**, № 1. – P. 182–207.
29. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
30. *Chakravarthy S. R., Osher S.* High resolution application of the Osher upwind scheme for the Euler equation // *Proc. AIAA Comp. Fluid Dynamics conference.* – Danvers, MA, 1983. – P. 363–372.
31. *Jasak H.* Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows. PhD Thesis. – London: Imperial College, 1996. – 394 p.
32. *Issa R. I.* Solution of implicit discretised fluid flow equations by operator-splitting // *J. Comput. Phys.* – 1986. – **62**, № 1. – P. 40–65.
33. *Khosla P. K., Rubin S. G.* A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme // *Comput. & Fluids.* – 1974. – **2**, № 2. – P. 207–209.
34. *Barrett R., Berry M., Chan T. F., Demmel J., Donato J. M., Dongarra J., Eijkhout V., Pozo R., Romine C., Van der Vorst H.* Templates for the solution of linear systems: Building blocks for iterative methods, 2nd Edition. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 107 p.
35. *Van der Vorst H. A.* Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems // *SIAM J. Sci. Comput.* – 1992. – **13**, № 2. – P. 631–644.
36. *Головинський А. Л., Маленко А. Л., Сергієнко І. В., Тульчинський В. Г.* Енергоефективний суперкомп'ютер СКІТ-4 // *Вісн. НАН України.* – 2013. – № 2. – С. 50–59.
37. *Ferziger J. H., Peric M.* Computational methods for fluid dynamics. – Berlin: Springer, 2002. – 424 p.

Одержано 20.06.2018,
після доопрацювання — 11.11.2018