УДК 519.21

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ІЗ ЗАГАЛЬНОЮ СТОХАСТИЧНОЮ МІРОЮ

М. Ф. Городній

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
вул. Володимирська, 64, Київ, 01033, Україна

We give sufficient conditions for existence of a weak solution to the Dirichlet problem for the heat equation with a random effect described by an integral and a general stochastic measure.

Приведены достаточные условия существования слабого решения задачи Дирихле для уравнения теплопроводности со случайным воздействием, описываемым с помощью интеграла по общей стохастической мере.

1. Вступ. В останні роки науковий доробок А. М. Самойленка поповнився, зокрема, фундаментальними результатами з дослідження систем диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями у правій частині (див. [1] та наведену там бібліографію). Дана робота відноситься до цієї ж тематики. У ній досліджується питання про існування слабкого розв'язку задачі Діріхле для рівняння теплопровідності з випадковим збуренням, яке описується за допомогою інтеграла за загальною стохастичною мірою. Аналогічний результат для задачі Неймана для рівняння теплопровідності у випадку, коли „вхідні" функції не залежать від просторової змінної, відносно якої накладається крайова умова, отримано в [2]. Про застосування рівнянь із частинними похідними із стохастичними мірами див. [2 – 5] та наведену там бібліографію.

2. Формулювання основного результату. Перелік необхідних у подальшому теоретичних відомостей щодо узагальнених випадкових функцій та загальних стохастичних мір міститься в [2].

Зафіксуємо натуральне число $n \geq 2$. Якщо $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, то $|x| = \left(x_1^2 + \ldots \ldots + x_n^2\right)^{1/2}$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, а отже, $x = (x', x_n)$, $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$, $(x,t) = (x', x_n, t)$, і при цьому t інтерпретується як часова, а $x_1, \ldots, x_n$ — як просторові координати; символом $\triangle_x = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ позначаємо оператор Лапласа, $\overline{A}$ — замикання множини A.

Нехай μ_k, $k = 1, 2, 3,$ — стохастичні міри на $\mathbf{B}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$. Розглянемо задачу Діріхле для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial V_{t,x_n}}{\partial t} = a^2 \triangle_x V_{t,x_n} + f\dot{\mu}_1, \quad t > 0, \quad x_n > 0, \tag{1}$$

$$V_{t,x_n}|_{t=0} = g\dot{\mu}_2, \quad x_n > 0, \tag{2}$$

$$V_{t,x_n}|_{x_n=0} = h\dot{\mu}_3, \quad t > 0, \tag{3}$$

відносно невідомого узагальненого випадкового відображення V_{t,x_n}, $t > 0$, $x_n > 0$, що набуває значення в $D'_r(\mathbb{R}^{n-1})$. Тут a — фіксоване додатне число; $f(x', x_n, t)$, $g(x', x_n)$, $h(x', t)$

— вимірні, обмежені, фінітні, дійсні функції, визначені відповідно на множинах $\mathbb{R}^n_+ \times \times(0,\infty)$, $\mathbb{R}^n_+$ та $\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)$ і такі, що функції $\dfrac{\partial f}{\partial t}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$, $\dfrac{\partial^3 g}{\partial y_n^3}$, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial t^2}$ визначені і обмежені на $\mathbb{R}^n_+ \times (0,\infty)$, $\mathbb{R}^n_+ \times (0,\infty)$, $\mathbb{R}^n_+$ і $\mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)$ відповідно.

Покладемо

$$G_1(t,x) = (2a\sqrt{\pi})^{-n} t^{-\frac{n+2}{n}} x_n \exp\left\{-\frac{|x|^2}{4a^2t}\right\}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$G_0(t,x,\xi) = (2a\sqrt{\pi t})^{-n} \exp\left\{-\frac{|x'-\xi'|^2}{4a^2t}\right\} \times$$

$$\times\left(\exp\left\{-\frac{(x_n-\xi_n)^2}{4a^2t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x_n+\xi_n)^2}{4a^2t}\right\}\right), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Означення. *Відображення V_{t,x_n}, $t > 0$, $x_n > 0$, називається розв'язком задачі Діріхле (1)–(3), якщо для кожної $\varphi \in D\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ виконуються такі умови:*

a_1) для довільних $t > 0$, $x_n > 0$

$$\frac{\partial (V_{t,x_n},\varphi)}{\partial t} = a^2\left((V_{t,x_n}, \triangle_{x'}\varphi) + \frac{\partial^2 (V_{t,x_n},\varphi)}{\partial x_n^2}\right) + \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f\left(x',x_n,t\right)\varphi\left(x'\right) d\mu_1\left(x'\right);$$

a_2) для довільного $x_n > 0$

$$\mathrm{P} - \lim_{t\to 0+} (V_{t,x_n},\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x',x_n)\varphi\left(x'\right) d\mu_2\left(x'\right);$$

a_3) для довільного $t > 0$

$$\mathrm{P} - \lim_{x_n\to 0+} (V_{t,x_n},\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} h(x',t)\varphi(x')\, d\mu_3(x').$$

При $\varphi \in D(\mathbb{R}^{n-1})$, $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $t > 0$ покладемо

$$r_1\left(x',x_n,t,\varphi\right) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} G_0(t-\tau,x,\xi) f\left(x',\xi_n,\tau\right)\varphi\left(\xi'\right) d\xi,$$

$$r_2(x',x_n,t,\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} G_0(t,x,\xi) g\left(x',\xi_n\right)\varphi(\xi') d\xi,$$

$$r_3(x',x_n,t,\varphi) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} G_1\left(t-\tau,x-\xi'\right) h(x',\tau)\varphi(\xi') d\xi'$$

і при $k = 1, 2, 3$ визначимо узагальнене випадкове відображення $V_{t,x_n,k}$, $t > 0$, $x_n > 0$, за правилом

$$(V_{t,x_n,k}, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} r_k(x', x_n, t, \varphi) d\mu_k(x'), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Основним результатом цієї статті є така теорема.

Теорема 1. *Відображення*

$$(V_{t,x_n}, \varphi) = \sum_{k=1}^{3} (V_{t,x_n,k}, \varphi), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^{n-1}),$$

є розв'язком задачі Діріхле (1)–(3).

3. Доведення теореми 1. Спочатку перевіримо, що відображення $V_{t,x_n,1}$, $t > 0$, $x_n > 0$, є розв'язком задачі Діріхле

$$\frac{\partial W_{t,x_n}}{\partial t} = a^2 \triangle_x W_{t,x_n} + f\dot{\mu}_1, \quad t > 0, \quad x_n > 0, \tag{4}$$

$$W_{t,x_n}|_{t=0} = 0, \quad x_n > 0, \tag{5}$$

$$W_{t,x_n}|_{x_n=0} = 0, \quad t > 0. \tag{6}$$

Зафіксуємо $\varphi \in D\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ і при кожному фіксованому $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ розглянемо задачу Діріхле для класичного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial r(y,t)}{\partial t} = a^2 \triangle_y r(y,t) + f(x', y_n, t)\varphi(y'), \quad (y,t) \in \mathbb{R}^n_+ \times (0, \infty), \tag{7}$$

$$r(y,t)|_{t=0} = 0, \quad y \in \mathbb{R}^n_+, \tag{8}$$

$$r(y,t)|_{y_n=0} = 0, \quad y' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad t > 0. \tag{9}$$

Оскільки f фінітна по t, має обмежені похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ і $\varphi \in D\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$, то задача Діріхле (7)–(9) має класичний розв'язок $r_x(y,t)$ (див., наприклад, [6, с. 67]), який належить простору Гельдера $C^{2+\alpha}(\overline{\mathbb{R}^n_+ \times (0,\infty)}, \mathbb{R})$ і зображується у вигляді

$$r_x(y,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} G_0(t-\tau, y, \xi) f\left(x', \xi_n, \tau\right) \varphi(\xi') d\xi, \quad (y,t) \in \mathbb{R}^n_+ \times (0, \infty).$$

Поклавши

$$v(y_n, \xi_n, t) = \exp\left\{-\frac{(y_n - \xi_n)^2}{4a^2 t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(y_n + \xi_n)^2}{4a^2 t}\right\}$$

і скориставшись явним виглядом G_0, можна переконатися, що

$$r_x(y,t)=\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\infty d\xi_n\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{e^{-|\eta'|^2}}{2a\sqrt{t-\tau}}f(x',\xi_n,\tau)v(y_n,\xi_n,t-\tau)\varphi\left(y'+2a\eta'\sqrt{t-\tau}\right)d\eta', \tag{10}$$

$$(y,t)\in\mathbb{R}^n_+\times(0,\infty).$$

Зауважимо, що для кожного $1\le k\le n-1$ існує похідна $\dfrac{\partial^2 r_x(y,t)}{\partial y_k^2}$, і її можна обчислити за допомогою теореми про диференціювання по параметру y_k інтеграла Лебега. Для знаходження $\dfrac{\partial^2 r_x(y,t)}{\partial y_n^2}$ при фіксованих $t>0$, $y'\in\mathbb{R}^{n-1}$ для кожного $k\ge 1$, покладемо $t_k=t-\dfrac{t}{k+1}$,

$$H_k(y_n)=\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n\int\limits_0^{t_k} d\tau\int\limits_0^\infty d\xi_n\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{e^{-|\eta'|^2}}{2a\sqrt{t-\tau}}f\left(x',\xi_n,t\right)v(y_n,\xi_n,t-\tau)\varphi\left(y'+2a\eta'\sqrt{t-\tau}\right)d\eta'.$$

Оскільки $H_k''(y_n)$, $y_n>0$, існує і знаходиться за допомогою теореми про диференціювання інтеграла по параметру, то з урахуванням оцінки

$$\exists K>0\quad\forall\left(x',\xi_n,\tau\right),\quad\left(x',y_n,t\right)\in\mathbb{R}^n_+\times(0,\infty):$$
$$\left|f\left(x',\xi_n,\tau\right)-f\left(x',y_n,t\right)\right|\le K(\sqrt{t-\tau}+|\xi_n-y_n|)$$

за допомогою граничного переходу неважко переконатися, що для кожного $y_n>0$ існує

$$\frac{\partial^2 r_x(y,t)}{\partial y_n^2}=\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\infty d\xi_n\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{e^{-|\eta'|^2}}{2a\sqrt{t-\tau}}\frac{\partial^2 v(y_n,\xi_n,t-\tau)}{\partial y_n^2}\times$$
$$\times\left(f(x',\xi_n,\tau)-f(x',y_n,t)\right)\varphi\left(y'+2a\eta'\sqrt{t-\tau}\right)d\eta'+$$
$$+f(x',y_n,t)\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\infty d\xi_n\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{\partial^2 v(y_n,\xi,t-\tau)}{\partial y_n^2}\varphi\left(y'+2a\eta'\sqrt{t-\tau}\right)d\eta'.$$

Тому, поклавши в (10) $y=x$ і застосувавши теорему про диференціювання інтеграла від числової функції по параметру, для кожної $(x,t)\in\mathbb{R}^n_+\times(0,\infty)$ будемо мати

$$r_1(x',x_n,t,\varphi)=r_x(x,t), \tag{11}$$

$$\frac{\partial r_1(x',x_n,t,\varphi)}{\partial t} = \left.\frac{\partial r_x(y,t)}{\partial t}\right|_{y=x} = a^2\triangle_y r_x(y,t)\big|_{y=x} + f(x',x_n,t)\varphi(x') =$$

$$= a^2\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\infty d\xi_n \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{e^{-|\eta'|^2}}{2a\sqrt{t-\tau}} f(x',\xi_n,\tau)\times$$

$$\times\, v(x_n,\xi_n,t-\tau)\left(\varphi''_{11}\left(x'+2a\eta'\sqrt{t-\tau}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\varphi''_{n-1n-1}\left(x'+2a\eta'\sqrt{t-\tau}\right)\right)d\eta'+$$

$$+\,a^2\left.\frac{\partial^2 r_x(y,t)}{\partial y_n^2}\right|_{y=x} + f(x',x_n,t)\varphi(x') =$$

$$= a^2 r_1\left(x,t,\triangle_{x'}\varphi\right) + a^2\,\frac{\partial^2 r_1\left(x',x_n,t,\varphi\right)}{\partial x_n^2} + f(x',x_n,t)\varphi(x'). \qquad (12)$$

Із (10), (11) випливає, що при фіксованих $t > 0$, $x_n > 0$, $\varphi \in D\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ функція $r_1\left(x',x_n,t,\varphi\right)$ вимірна за змінною x', а також

$$\sup_{x'\in\mathbb{R}^{n-1}}\left|r_1\left(x',x_n,t,\varphi\right)\right| \le 2t\|f\|_\infty\|\varphi\|_\infty.$$

Тут і в подальшому $\|\cdot\|_\infty$ позначає $\sup$-норму для обмеженої в своїй області визначення числової функції. Враховуючи також лінійність $r_1\left(x',x_n,t,\varphi\right)$ по $\varphi \in D\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ і теорему 1, робимо висновок, що $V_{t,x_n,1}$ належить $D'_r\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ для довільних $t > 0$, $x_n > 0$.

Внаслідок (12) при фіксованих $b > 0$, $x_n > 0$, $\varphi \in D\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ знайдеться така залежна від a, x_n, b стала M, що

$$\sup_{t\in(0,b),\ x'\in\mathbb{R}^{n-1}}\left|\frac{\partial r_1\left(x',x_n,t,\varphi\right)}{\partial t}\right| \le M\left(\|f\|_\infty\|\triangle_{x'}\varphi\|_\infty + \|\varphi\|_\infty + \|f\|_\infty\|\varphi\|_\infty\right).$$

Тому до $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} r_1\left(x',x_n,t,\varphi\right)d\mu_1(x')$ можна застосувати теорему 2 із [2], а отже, з урахуванням (12) при фіксованих $t > 0$, $x_n > 0$ матимемо

$$\frac{\partial(V_{t,x_n,1},\varphi)}{\partial t} = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial r_1\left(x',x_n,t,\varphi\right)}{\partial t}\,d\mu_1(x') = a^2(V_{t,x_n,1},\triangle_{x'}\varphi)+$$

$$+\,a^2\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{\partial^2 r_1(x',x_n,t,\varphi)}{\partial x_n^2}\,d\mu_1(x') + \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x',x_n,t)\varphi(x')d\mu_1(x'). \qquad (13)$$

Також зазначимо, що при фіксованих $t > 0$, $\varphi \in D\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ до $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} r_1\left(x',x_n,t,\varphi\right)\,d\mu_1(x')$ можна двічі застосувати аналог теореми про диференціювання інтеграла Лебега по параметру $x_n \in (\epsilon,b)$, де $0 < \epsilon < b$ — довільні додатні числа. Тому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{\partial^2 r_1(x',x_n,t,\varphi)}{\partial x_n^2}\,d\mu_1(x') = \frac{\partial^2(V_{t,x_n,1},\varphi)}{\partial x_n^2}.$$

Із фінітності f за змінною t на $(0, \infty)$ випливає, що

$$\exists t_0 > 0 \quad \forall t \in (0, t_0] \quad \forall (x', x_n) \in \mathbb{R}^n_+ \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^{n-1})\colon r_1\left(x', x_n, t, \varphi\right) = 0.$$

Тому при фіксованих $x_n > 0$, $\varphi \in D\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$

$$\mathrm{P} - \lim_{t \to 0+} (V_{t, x_n, 1}, \varphi) = 0. \tag{14}$$

Використовуючи означення розв'язку класичної задачі Діріхле (7) – (9) і рівність (11), робимо висновок, що при фіксованих $t > 0$, $\varphi \in D\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$

$$\forall x' \in \mathbb{R}^{n-1}\colon r_1\left(x', x_n, t, \varphi\right) \to 0, x_n \to 0+ .$$

Тому

$$\mathrm{P} - \lim_{x_n \to 0+} (V_{t, x_n, 1}, \varphi) = 0. \tag{15}$$

Згідно з (13) – (15) відображення $V_{t, x_n, 1}$, $t > 0$, $x_n > 0$ є розв'язком задачі Діріхле (4) – (6).

Міркуючи аналогічно, можна встановити, що відображення $V_{t, x_n, 2}$, $t > 0$, $x_n > 0$, є розв'язком задачі Діріхле

$$\frac{\partial W_{t, x_n}}{\partial t} = a^2 \triangle_x W_{t, x_n}, \quad t > 0, \quad x_n > 0, \tag{16}$$

$$W_{t, x_n}|_{t=0} = g\dot{\mu}_2, \quad x_n > 0, \tag{17}$$

$$W_{t, x_n}|_{x_n=0} = 0, \quad t > 0. \tag{18}$$

Також, використовуючи метод, подібний до запропонованого для доведення існування розв'язку задачі Неймана (19) – (21) у роботі [2], неважко переконатися, що узагальнене випадкове відображення $V_{t, x_n, 3}$, $t > 0$, $x_n > 0$, є розв'язком задачі Діріхле

$$\frac{\partial W_{t, x_n}}{\partial t} = a^2 \triangle_x W_{t, x_n}, \quad t > 0, \quad x_n > 0, \tag{19}$$

$$W_{t, x_n}|_{t=0} = 0, \quad x_n > 0, \tag{20}$$

$$W_{t, x_n}|_{x_n=0} = h\dot{\mu}_3, \quad t > 0. \tag{21}$$

Насамкінець зауважимо, що сума розв'язків задач (4) – (6), (16) – (18), (19) – (21) є розв'язком задачі Діріхле (1) – (3).

Теорему 1 доведено.

Література

1. *Самойленко А. М., Станжицький О. М.* Якісний та асимптотичний аналіз диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями. — Київ: Наук. думка, 2009. — 335 с.

2. *Городній М., Полюля Д.* Існування розв'язку задачі Неймана для рівняння теплопровідності із загальною стохастичною мірою // Нелінійні коливання. — 2015. — **18**, № 2. — С. 192 – 199.

3. *Радченко В. Н.* Уравнение теплопроводности и волновое уравнение с общими случайными мерами // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 12. — С. 1675 – 1685.

4. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения глазами физика. — М.: Физматлит, 2001. — 528 с.

5. *Sturm A.* On convergence of population prosesses in random enviroments to the stochastic heat equation with colored noise // Electron. J. Probab. — 2003. — **8**, № 6. — P. 1 – 39.

6. *Ивасишен С. Д.* Линейные параболические граничные задачи. — Киев: Вища шк., 1987. — 72 с.

Одержано 31.10.17