УДК 517.956

АСИМПТОТИЧНЕ РОЗВИНЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ В ТОНКОМУ ЗІРКОПОДІБНОМУ З'ЄДНАННІ

А. В. Клевцовський

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
вул. Володимирська, 64/13, Київ, 01601, Україна
e-mail: avklevtsovskiy@gmail.com

A linear parabolic boundary-value problem is considered in a thin 3D star-shaped junction that consist of a finite number of thin curvilinear cylinders that are joined through a domain (node) of diameter $\mathcal{O}(\varepsilon)$. A procedure for constructing a complete asymptotic expansion of the solution as $\varepsilon \to 0$, i.e., when the star-shaped junction transforms into a graph is developed. Using the method of matching asymptotic series, the limit problem ($\varepsilon = 0$) on a graph with corresponding Kirchhoff transmission conditions at the vertex is derived. Asymptotic estimates that show the impact of the geometrical shape of the node and physical processes in the node on the global asymptotic behavior of the solution is proved as well.

Рассмотрена линейная параболическая краевая задача в трехмерном тонком звездообразном соединении, которое состоит из конечного числа тонких криволинейных цилиндров, соединенных через некоторую область (узел) диаметра $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Разработана процедура для построения полного асимптотического разложения решения при $\varepsilon \to 0$, т. е. когда звездообразное соединение трансформируется в граф. С помощью метода согласования асимптотических рядов выведена предельная задача ($\varepsilon = 0$) на графе с соответствующими условиями сопряжения типа Кирхгофа в вершине. Также доказаны соответствующие асимптотические оценки, которые дают возможность проследить влияние геометрической формы узла и физических процессов в нем на глобальное асимптотическое поведение решения.

1. Вступ. Дослідження різних фізичних і біологічних процесів у каналах і з'єднаннях актуальне для багатьох галузей природознавства (див., наприклад, [1 – 13] та наведену там бібліографію). В цих роботах приділяється особлива увага вивченню впливу локальних нерегулярностей на глобальну поведінку розв'язку досліджуваних задач. Наприклад, в [14] автори вивчали вплив аневризмів на кровообіг у судинах. У цій роботі було класифіковано 12 різних типів аневризмів і запропоновано чисельний підхід до їх вивчення. Однак достатньої точності в побудові чисельної моделі кровообігу досягнути не вдалося (див. [14], п. 1).

Крім чисельних методів розроблено кілька асимптотичних методів для вивчення таких задач (див. [5, 8, 11, 12, 15 – 19]), але для їх застосування необхідні деякі додаткові припущення (однорідні крайові умови на бічних сторонах тонких циліндрів; задані функції, які входять у диференціальне рівняння, залежать тільки від поздовжньої змінної у відповідному циліндрі і є константами в околах вузла та вершинах; у [16, 17] задані функції задовольняють певні умови ортогональності (детальний аналіз цих методів проведено в [20, 21])). Всі ці додаткові умови значно звужують клас досліджуваних задач.

Дана стаття є продовженням досліджень крайових задач у тонких мультиструктурах із локальною нерегулярністю, що було розпочато в [20, 21] для еліптичних крайових задач і в [22] для квазілінійних параболічних крайових задач, які не містять згаданих вище припущень. Як виявилося, запропонований у цій статті метод дає кращі асимптотичні оцінки, ніж існуючі аналоги (детальніше див. [20]).

У даній роботі модифіковано й узагальнено запропонований метод для більш складної структури, а саме для тонких циліндрів довільної орієнтації, які формують зіркоподібне з’єднання. Крім того, вперше побудовано повне асимптотичне розвинення для розв’язку параболічної задачі з неоднорідними крайовими умовами Неймана на межі вузла.

2. Опис тонкої області і постановка задачі. Нехай $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ і $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$. Зафіксуємо індекс $i = \overline{1, M}$. Нехай тонкий циліндр $\Omega_\varepsilon^{(i)}$ розташовано в напрямку одиничного вектора $e^{(i)} = \left(e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, e_3^{(i)}\right)$. Виберемо деякий нормований вектор $\varsigma^{(i)} = \left(\varsigma_1^{(i)}, \varsigma_2^{(i)}, \varsigma_3^{(i)}\right)$, який є ортогональним до $e^{(i)}$, тобто $e_1^{(i)}\varsigma_1^{(i)} + e_2^{(i)}\varsigma_2^{(i)} + e_3^{(i)}\varsigma_3^{(i)} = 0.$

Введемо матрицю

$$\mathfrak{R}_i = \begin{pmatrix} e_1^{(i)} & e_2^{(i)} & e_3^{(i)} \\ \varsigma_1^{(i)} & \varsigma_2^{(i)} & \varsigma_3^{(i)} \\ e_2^{(i)}\varsigma_3^{(i)} - e_3^{(i)}\varsigma_2^{(i)} & e_3^{(i)}\varsigma_1^{(i)} - e_1^{(i)}\varsigma_3^{(i)} & e_1^{(i)}\varsigma_2^{(i)} - e_2^{(i)}\varsigma_1^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Рядки цієї матриці є ортами нової системи координат $x^{(i)} = \left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}\right)$, тобто $x^{(i)}(x) = \mathfrak{R}_i x^{\mathrm{T}}$. Легко перевірити, що $\mathfrak{R}_i^{-1} = \mathfrak{R}_i^{\mathrm{T}}$ і визначник $\det \mathfrak{R}_i = 1$.

Таким чином, введено M нових систем координат, кожна з яких є правою трійкою. Знаючи властивості матриці $\mathfrak{R}_i$, легко довести наступне твердження.

Твердження 2.1. *У новій системі координат $\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}\right)$ мають місце такі рівності:*

1) $\Delta_x = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial (x_1^{(i)})^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial (x_2^{(i)})^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial (x_3^{(i)})^2} = \Delta_{x^{(i)}};$

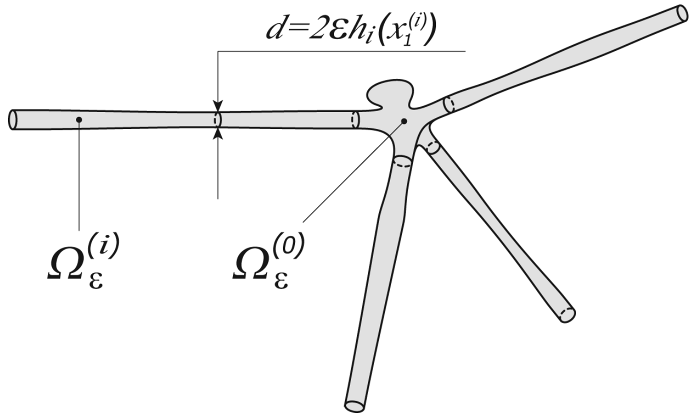
2) $(\xi, \nabla_x) = \xi_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2} + \xi_3 \dfrac{\partial}{\partial x_3} = \xi_1^{(i)} \dfrac{\partial}{\partial x_1^{(i)}} + \xi_2^{(i)} \dfrac{\partial}{\partial x_2^{(i)}} + \xi_3^{(i)} \dfrac{\partial}{\partial x_3^{(i)}} = \left(\xi^{(i)}, \nabla_{x^{(i)}}\right),$

де вектор $\xi^{(i)} = \left(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \xi_3^{(i)}\right) \in \mathbb{R}^3$ є вектором $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$ у новій системі координат;

3) $\displaystyle\int_Q v(x)\,dx = \int_{Q_i} v^{(i)}\left(x^{(i)}\right) dx^{(i)}$, *де* $Q \subset \mathbb{R}^3$, $Q_i = \{x^{(i)} \in \mathbb{R}^3 \colon \mathfrak{R}_i^{-1} x^{(i)\mathrm{T}} = x \in Q\}$, $v \in L^1(Q)$, *а* $v^{(i)}\left(x^{(i)}\right) = v\left(\mathfrak{R}_i^{-1} x^{(i)\,\mathrm{T}}\right)$.

Зауваження 2.1. Далі деяку область Q в нових координатах будемо позначати так само, тобто $Q := Q_i$.

Модельне тонке зіркоподібне з’єднання Ω_ε складається з M тонких криволінійних циліндрів $\Omega_\varepsilon^{(i)} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon \varepsilon\ell_0 < x_1^{(i)} < \ell_i, \left(x_2^{(i)}\right)^2 + \left(x_3^{(i)}\right)^2 < \varepsilon^2 h_i^2\left(x_1^{(i)}\right)\right\}$, $i = \overline{1, M}$, які з’єднані через область $\Omega_\varepsilon^{(0)}$ (далі „вузол”). Тут ε — малий параметр; $\ell_0 \in \left(0, \dfrac{1}{3}\right)$, $\ell_i \geq 1$, $i = \overline{1, M}$; додатні функції h_i належать простору $C^1([0, \ell_i])$ і дорівнюють деяким сталим в околах точок $x_1^{(i)} = 0$ і $x_1^{(i)} = \ell_i$, $i = \overline{1, M}$.



Модельне тонке зіркоподібне з'єднання Ω_ε.

Вузол $\Omega_\varepsilon^{(0)}$ сформовано за допомогою відображення гомотетії з коефіцієнтом ε з обмеженої області $\Xi^{(0)} \subset \mathbb{R}^3$, тобто $\Omega_\varepsilon^{(0)} = \varepsilon\Xi^{(0)}$. Додатково припускаємо, що його межа містить круги $\Upsilon_\varepsilon^{(i)}(\varepsilon\ell_0) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^{(i)} = \varepsilon\ell_0, \left(x_2^{(i)}\right)^2 + \left(x_3^{(i)}\right)^2 < \varepsilon^2 h_i^2(\varepsilon\ell_0)\right\}$, $i = \overline{1,M}$, і визначимо $\Gamma_\varepsilon^{(0)} := \partial\Omega_\varepsilon^{(0)} \setminus \left\{\bigcup_{i=1}^M \overline{\Upsilon_\varepsilon^{(i)}(\varepsilon\ell_0)}\right\}$.

Таким чином, тонке зіркоподібне з'єднання Ω_ε (див. рисунок) є внутрішністю об'єднання $\bigcup_{i=0}^M \overline{\Omega_\varepsilon^{(i)}}$ і ми припускаємо, що воно має ліпшицеву межу.

В Ω_ε розглядається лінійна параболічна крайова задача

$$
\begin{gathered}
\partial_t u_\varepsilon - \Delta_x u_\varepsilon + \mathbf{k}\, u_\varepsilon = f \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon \times (0,T), \\
\partial_{\boldsymbol{\nu}} u_\varepsilon = \varphi_\varepsilon^{(0)} \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon^{(0)} \times (0,T), \\
\partial_{\boldsymbol{\nu}} u_\varepsilon = \varepsilon\varphi_\varepsilon^{(i)} \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon^{(i)} \times (0,T), \quad i = \overline{1,M}, \\
u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \Upsilon_\varepsilon^{(i)}(\ell_i) \times (0,T), \quad i = \overline{1,M}, \\
u_\varepsilon|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon,
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

де $\Gamma_\varepsilon^{(i)} = \partial\Omega_\varepsilon^{(i)} \cap \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon \varepsilon\ell_0 < x_1^{(i)} < \ell_i\right\}$, $T > 0$, $\mathbf{k}$ — невід'ємна стала, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_{\boldsymbol{\nu}}$ — похідна по зовнішній нормалі, задані функції f і $\{\varphi_\varepsilon^{(i)}\}_{i=0}^M$ є гладкими та

$$
\begin{gathered}
f(x,t) = f^{(i)}\left(x^{(i)}, t\right), \quad \left(x^{(i)}, t\right) \in \Omega_\varepsilon^{(i)} \times (0,T), \quad i = \overline{1,M}, \\
\varphi_\varepsilon^{(0)}(x,t) = \varphi^{(0)}\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right), \quad (x,t) \in \Gamma_\varepsilon^{(0)} \times (0,T), \\
\varphi_\varepsilon^{(i)}(x,t) = \varphi^{(i)}\left(\frac{\overline{x}_1^{(i)}}{\varepsilon}, x_1^{(i)}, t\right), \quad \left(x^{(i)}, t\right) \in \Gamma_\varepsilon^{(i)} \times (0,T), \quad i = \overline{1,M},
\end{gathered}
$$

де $\overline{x}_1^{(i)} = \left(x_2^{(i)}, x_3^{(i)}\right)$. Нові координати $\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}\right) = \left(x_1^{(i)}, \overline{x}_1^{(i)}\right) = x^{(i)} = \mathfrak{R}_i x^{\mathrm{T}}$ з'являються лише в тому випадку, коли мова йде про тонкі циліндри $\Omega_\varepsilon^{(i)}$, $i = \overline{1, M}$. Додатково вважаємо

$$f|_{t=0} = 0, \quad \varphi_\varepsilon^{(i)}\Big|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{0, M}. \tag{2.2}$$

Позначимо через $\mathcal{H}_\varepsilon^*$ спряжений простір до простору Соболєва

$$\mathcal{H}_\varepsilon = \left\{u \in H^1(\Omega_\varepsilon) \colon \ u|_{\Upsilon_\varepsilon^{(i)}(\ell_i)} = 0, i = \overline{1, M}\right\}.$$

Із класичної теорії лінійних параболічних крайових задач випливає, що для кожного фіксованого значення ε задача (2.1) має єдиний узагальнений розв'язок $u_\varepsilon \in L^2\left(0, T; \mathcal{H}_\varepsilon\right)$, для якого $\partial_t u_\varepsilon \in L^2\left(0, T; \mathcal{H}_\varepsilon^*\right)$, такий, що інтегральна тотожність

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \left(\partial_t + \mathbf{k}\right) u_\varepsilon \, v \, dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f \, v \, dx + \int\limits_{\Gamma_\varepsilon^{(0)}} \varphi_\varepsilon^{(0)} \, v \, d\sigma_x + \varepsilon \sum_{i=1}^{M} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon^{(i)}} \varphi_\varepsilon^{(i)} \, v \, d\sigma_x$$

справджується для будь-якої функції $v \in \mathcal{H}_\varepsilon$ і майже всіх $t \in (0, T)$ і $u_\varepsilon|_{t=0} = 0$. Відомо, що $u_\varepsilon \in C\left([0, T]; L^2(\Omega_\varepsilon)\right)$, а тому рівність $u_\varepsilon|_{t=0} = 0$ має сенс.

Метою даної статті є розробка і обґрунтування процедури для побудови повного асимптотичного розвинення для розв'язку задачі (2.1), коли малий параметр $\varepsilon \to 0$; виведення відповідної граничної задачі ($\varepsilon = 0$) на графі; доведення асимптотичних оцінок для різниці між розв'язком задачі (2.1) і асимптотичними наближеннями цього розв'язку, з яких простежується вплив геометричної неоднорідності вузла і фізичних процесів у ньому на асимптотичну поведінку розв'язку.

3. Формальні асимптотичні розклади. Пропонуємо такі асимптотичні анзаци для розв'язку задачі (2.1):

1) регулярні частини, які зосереджені в тонких циліндрах $\Omega_\varepsilon^{(i)}$, $i = \overline{1, M}$:

$$\omega_0^{(i)}\left(x_1^{(i)}, t\right) + \varepsilon \omega_1^{(i)}\left(x_1^{(i)}, t\right) + \sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon^k \left(\omega_k^{(i)}\left(x_1^{(i)}, t\right) + u_k^{(i)}\left(\frac{\overline{x}_1^{(i)}}{\varepsilon}, x_1^{(i)}, t\right)\right); \tag{3.1}$$

2) примежові шари, які зосереджені в околах основ $\Upsilon_\varepsilon^{(i)}(\ell_i)$ кожного з тонких циліндрів $\Omega_\varepsilon^{(i)}$:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon^k \Pi_k^{(i)}\left(\frac{\overline{x}_1^{(i)}}{\varepsilon}, \frac{\ell_i - x_1^{(i)}}{\varepsilon}, t\right); \tag{3.2}$$

3) внутрішня частина, яка зосереджена в околі вузла $\Omega_\varepsilon^{(0)}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k N_k\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right). \tag{3.3}$$

3.1. Регулярні частини асимптотики. Перейдемо до „швидких змінних" $\bar{\xi}_1^{(i)} = \dfrac{\overline{x}_1^{(i)}}{\varepsilon}$ в тонких циліндрах $\Omega_\varepsilon^{(i)}$. Розкладаючи в ряд Тейлора функцію f у точці $\overline{x}_1^{(i)} = (0,0)$ (відповідно, для кожного $i = \overline{1,M}$), підставляємо ряди (3.1) у диференціальне рівняння задачі (2.1).

Враховуючи вигляд зовнішньої нормалі до $\Gamma_\varepsilon^{(i)}$

$$\boldsymbol{\nu}^{(i)}\left(x_1^{(i)},\bar{\xi}_1^{(i)}\right) = \left(1+\varepsilon^2\left|h_i'\left(x_1^{(i)}\right)\right|^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\varepsilon h_i'\left(x_1^{(i)}\right),\overline{\nu}_1^{(i)}\left(\bar{\xi}_1^{(i)}\right)\right), \quad i = \overline{1,M},$$

де $\overline{\nu}_1^{(i)}\left(\bar{\xi}_1^{(i)}\right)$ — зовнішня нормаль до круга $\Upsilon_i\left(x_1^{(i)}\right) = \left\{\bar{\xi}_1^{(i)} \in \mathbb{R}^2\colon \left|\bar{\xi}_1^{(i)}\right| < h_i\left(x_1^{(i)}\right)\right\}$, для кожного значення $x_1^{(i)}$, $i = \overline{1,M}$, підставляємо ряди (3.1) у третє співвідношення задачі (2.1).

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε в отриманих співвідношеннях, виводимо рекурентні співвідношення для крайових задач для знаходження коефіцієнтів розкладу (3.1). Розглянемо крайові задачі для функцій $\left\{u_k^{(i)}\right\}_{i=1}^{M}$, $k \geq 2$:

$$\begin{gathered}
-\Delta_{\bar{\xi}_1^{(i)}} u_k^{(i)} = \left(-\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\left(\partial x_1^{(i)}\right)^2}-\mathbf{k}\right)\left(\omega_{k-2}^{(i)}+u_{k-2}^{(i)}\right)+f_{k-2}^{(i)} \quad \text{в} \quad \Upsilon_i,\\
\partial_{\boldsymbol{\nu}_{\bar{\xi}_1^{(i)}}} u_k^{(i)} = h_i'\,\frac{\partial}{\partial x_1^{(i)}}\left(\omega_{k-2}^{(i)}+u_{k-2}^{(i)}\right)+\eta_{k-2}^{(i)}\varphi^{(i)} \quad \text{на} \quad \partial\Upsilon_i, \qquad (3.4)\\
\left\langle u_k^{(i)}\left(\cdot,x_1^{(i)},t\right)\right\rangle_{\Upsilon_i\left(x_1^{(i)}\right)} = 0.
\end{gathered}$$

Тут $u_0 \equiv u_1 \equiv 0$, $\left\langle u\left(\cdot,x_1^{(i)},t\right)\right\rangle_{\Upsilon_i(x_1^{(i)})} := \int_{\Upsilon_i\left(x_1^{(i)}\right)} u\left(\bar{\xi}_1^{(i)},x_1^{(i)},t\right)\,d\bar{\xi}_1^{(i)}$, $i = \overline{1,M}$,

$$\eta_k^{(i)}\left(x_1^{(i)}\right) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k=0, \text{ або є непарним},\\ \dfrac{(-1)^{\frac{k}{2}}k!\left|h_i'\left(x_1^{(i)}\right)\right|^k}{(1-k)\left(\left(\dfrac{k}{2}\right)!\right)^2 4^{\frac{k}{2}}}, & \text{якщо } k \text{ є парним}, \end{cases} \qquad (3.5)$$

$$f_k^{(i)}\left(\bar{\xi}_1^{(i)},x_1^{(i)},t\right) = \frac{1}{k!}\left(\xi_2^{(i)}\frac{\partial}{\partial x_2^{(i)}}+\xi_3^{(i)}\frac{\partial}{\partial x_3^{(i)}}\right)^k f(x,t)\big|_{\overline{x}_1^{(i)}=(0,0)}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \qquad (3.6)$$

а змінні $\left(x_1^{(i)},t\right)$ розглядаються як параметри з $I_\varepsilon^{(i)} \times (0,T)$, де

$$I_\varepsilon^{(i)} = \left\{x\colon x_1^{(i)} \in (\varepsilon\ell_0,\ell_i),\overline{x}_1^{(i)} = (0,0)\right\}.$$

Для кожного значення $i \in \{1,2,\ldots,M\}$ задача (3.4) є неоднорідною задачею Неймана для рівняння Пуассона в $\Upsilon_i\left(x_1^{(i)}\right)$ відносно змінної $\overline{\xi}_i \in \Upsilon_i\left(x_1^{(i)}\right)$. Записуючи необхідну і достатню умову розв'язності задачі (3.4), отримуємо диференціальні рівняння для функцій $\left\{\omega_{k-2}^{(i)}\right\}_{i=1}^{M}$ (див. перші співвідношення в (3.19), (3.23)). Нехай $\omega_{k-2}^{(i)}$ — розв'язки отриманих диференціальних рівнянь, тоді розв'язки задач (3.4) існують, а треті умови в (3.4) забезпечують їх єдиність.

Таким чином, розв'язки задач (3.4) визначаються єдиним чином. Отже, однозначно визначається рекурентна процедура для знаходження коефіцієнтів ряду (3.1).

3.2. Примежові частини асимптотики. Перейдемо в циліндрі $\Omega_\varepsilon^{(i)}$ (для кожного $i \in \in \{1,2,\ldots,M\}$) від змінних $\left(\overline{x}_1^{(i)}, x_1^{(i)}\right)$ до змінних $\overline{\xi}_1^{(i)} = \dfrac{\overline{x}_1^{(i)}}{\varepsilon}$, $\dot{\xi}_1^{(i)} = \dfrac{\ell_i - x_1^{(i)}}{\varepsilon}$. При прямуванні параметра ε до нуля, циліндр $\Omega_\varepsilon^{(i)}$ трансформується в напівнескінченний прямолінійний циліндр $\Upsilon_i(\ell_i)\times(0,+\infty)$.

Підставляючи ряд (3.2) в (2.1) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, отримуємо крайову задачу відносно змінних $\left(\overline{\xi}_1^{(i)}, \dot{\xi}_1^{(i)}\right)$:

$$
\begin{gathered}
-\Delta_{\overline{\xi}_1^{(i)}\dot{\xi}_1^{(i)}}\Pi_k^{(i)} = P_k^{(i)} \quad \text{в} \quad \Upsilon_i(\ell_i)\times(0,+\infty),\\
\partial_{\boldsymbol{\nu}_{\overline{\xi}_1^{(i)}}}\Pi_k^{(i)} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Upsilon_i(\ell_i)\times(0,+\infty),\\
\Pi_k^{(i)}\Big|_{\dot{\xi}_1^{(i)}=0} = \Phi_k^{(i)} \quad \text{на} \quad \Upsilon_i(\ell_i),\\
\Pi_k^{(i)}\left(\overline{\xi}_1^{(i)}, \dot{\xi}_1^{(i)}, t\right) \to 0, \quad \dot{\xi}_1^{(i)} \to +\infty, \quad \overline{\xi}_1^{(i)} \in \Upsilon_i(\ell_i),
\end{gathered}
\tag{3.7}
$$

де

$$
\begin{gathered}
P_0^{(i)} \equiv P_1^{(i)} \equiv 0, \quad P_k^{(i)} = -(\partial_t + \mathbf{k})\Pi_{k-2}^{(i)}, \quad k\in\mathbb{N}, \quad k\geq 2,\\
\Phi_k^{(i)}(t) = -\omega_k^{(i)}(\ell_i,t), \quad k=0,1,\\
\Phi_k^{(i)}\left(\overline{\xi}_1^{(i)}, t\right) = -u_k^{(i)}\left(\overline{\xi}_1^{(i)}, \ell_i, t\right) - \omega_k^{(i)}(\ell_i,t), \quad k\in\mathbb{N}, \quad k\geq 2.
\end{gathered}
$$

В (3.7) змінна $t\in(0,T)$ розглядається як параметр.

Розглянемо випадок однорідної правої частини, тобто коли $P_k^{(i)} \equiv 0$, $k\in\mathbb{N}_0$. Використовуючи метод відокремлення змінних, визначаємо розв'язок

$$
b_{k,0,0}^{(i)}(t) + \sum_{p=1}^{+\infty} b_{k,p,0}^{(i)}(t)\Theta_p^{(i)}\left(\overline{\xi}_1^{(i)}\right)\exp\left(-\lambda_p^{(i)}\dot{\xi}_1^{(i)}\right)
$$

однорідної задачі до (3.7) для фіксованого індексу k, де

$$
b_{k,p,0}^{(i)} = \left\|\Theta_p^{(i)}\right\|_{L^2(\Upsilon_i(\ell_i))}^{-2} \int\limits_{\Upsilon_i(\ell_i)} \Phi_k^{(i)}\Theta_p^{(i)}\,d\overline{\xi}_1^{(i)}, \quad p\in\mathbb{N}_0. \tag{3.8}
$$

Тут $\Theta_0^{(i)} \equiv 1, \Theta_p^{(i)}\left(\overline{\xi}_1^{(i)}\right)$ і $\left\{0 = \lambda_0^{(i)} < \lambda_1^{(i)} \leq \ldots \leq \lambda_p^{(i)} \leq \ldots\right\}$ є власними функціями і власними значеннями спектральної задачі

$$-\Delta_{\overline{\xi}_1^{(i)}} \Theta^{(i)} = \left(\lambda^{(i)}\right)^2 \Theta^{(i)} \quad \text{в} \quad \Upsilon_i(\ell_i),$$

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}_{\overline{\xi}_1^{(i)}}} \Theta^{(i)} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Upsilon_i(\ell_i).$$

З четвертої умови в (3.7) випливає, що коефіцієнт $b_{k,0,0}^{(i)} = -\left.\omega_k^{(i)}\right|_{x_1^{(i)}=\ell_i}$ повинен дорівнювати нулю. В результаті приходимо до таких крайових умов для функцій $\left\{\omega_k^{(i)}\right\}_{i=1}^M$: $\omega_k^{(i)}(\ell_i, t) = 0, k \in \mathbb{N}_0$.

Оскільки $\Phi_0^{(i)} \equiv \Phi_1^{(i)} \equiv 0$, робимо висновок, що $\Pi_0^{(i)} \equiv \Pi_1^{(i)} \equiv 0, i = \overline{1, M}$.

Загальним розв'язком крайової задачі (3.7) є

$$\Pi_k^{(i)}\left(\overline{\xi}_1^{(i)}, \dot{\xi}_1^{(i)}, t\right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \Theta_p^{(i)}\left(\overline{\xi}_1^{(i)}\right) \exp\left(-\lambda_p^{(i)} \dot{\xi}_1^{(i)}\right) \sum_{s=0}^{\lfloor k/2 \rfloor - 1} b_{k,p,s}^{(i)}(t) \left(\dot{\xi}_1^{(i)}\right)^s, \quad k \geq 2, \tag{3.9}$$

де коефіцієнти $\left\{b_{k,p,s}^{(i)}\right\}$ визначені в формулі (3.8) і в рекурентному співвідношенні $b_{k,p,s}^{(i)}(t) = (\partial_t + \mathbf{k}) \sum_{l=1}^{\lfloor k/2 \rfloor - s} (s + l - 2)!\, b_{k-2,\,p,\,s+l-2}^{(i)}(t) / \left(s! \left(2\lambda_p^{(i)}\right)^l\right)$, $k \geq 4$, $p \in \mathbb{N}$, $s = \overline{1, \lfloor k/2 \rfloor - 1}$. Тут $\lfloor n \rfloor$ позначає найбільше ціле число, яке не більше за n.

Зауваження 3.1. Із зображення (3.9) випливають такі асимптотичні співвідношення:

$$\Pi_k^{(i)}\left(\overline{\xi}_1^{(i)}, \dot{\xi}_1^{(i)}, t\right) = \mathcal{O}\left(\left(\dot{\xi}_1^{(i)}\right)^{\lfloor k/2 \rfloor - 1} \exp\left(-\lambda_1^{(i)} \dot{\xi}_1^{(i)}\right)\right), \quad \dot{\xi}_1^{(i)} \to +\infty, \quad i = \overline{1, M}.$$

3.3. Внутрішня частина асимптотики. Переходячи до змінних $\xi = \dfrac{x}{\varepsilon}$ $\left(\xi^{(i)} = \dfrac{x^{(i)}}{\varepsilon}\right)$ і спрямовуючи малий параметр ε до нуля, бачимо, що область Ω_ε трансформується в необмежену область Ξ, яка є об'єднанням вузла $\Xi^{(0)}$ і скінченної кількості напівобмежених циліндрів $\Xi^{(i)} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^3 \colon \ell_0 < \xi_1^{(i)} < +\infty, \left|\overline{\xi}_1^{(i)}\right| < h_i(0)\right\}, i = \overline{1, M}$, тобто Ξ є внутрішністю $\bigcup_{i=0}^M \overline{\Xi^{(i)}}$.

Позначимо

$$\Gamma_i = \left\{\xi \in \mathbb{R}^3 \colon \ell_0 < \xi_1^{(i)} < +\infty, \left|\overline{\xi}_1^{(i)}\right| = h_i(0)\right\}, \quad i = \overline{1, M}, \quad \Gamma_0 = \partial\Xi \backslash \left(\bigcup_{i=1}^M \Gamma_i\right).$$

Підставляючи ряд (3.3) в задачу (2.1) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, виводимо такі співвідношення для $\{N_k\}$:

$$
\begin{gathered}
-\Delta_\xi N_k(\xi,t) = F_k(\xi,t), \quad \xi\in\Xi,\\
\partial_{\boldsymbol{\nu}_\xi} N_k(\xi,t) = B_k^{(i)}(\xi,t), \quad \xi\in\Gamma_i, \quad i=\overline{0,M}, \\
N_k(\xi,t)\sim\omega_k^{(i)}(0,t)+\Psi_k^{(i)}\left(\xi^{(i)},t\right), \quad \xi_1^{(i)}\to+\infty, \quad \bar{\xi}_1^{(i)}\in\Upsilon_i(0), \quad i=\overline{1,M}.
\end{gathered}
\tag{3.10}
$$

Тут

$$
F_0\equiv F_1\equiv 0, \quad F_k(\xi,t) = -\left(\partial_t+\mathbf{k}\right)N_{k-2}(\xi,t)+\frac{(\xi,\nabla_x)^{k-2}f(0,t)}{(k-2)!},
$$

$$
B_0^{(0)}\equiv B_k^{(0)}\equiv 0, \quad B_1^{(0)}(\xi,t) = \varphi^{(0)}(\xi,t),
$$

$$
B_0^{(i)}\equiv B_1^{(i)}\equiv 0, \quad B_k^{(i)}(\xi,t) = \frac{\left(\xi_1^{(i)}\right)^{k-2}}{(k-2)!}\,\frac{\partial^{k-2}\varphi^{(i)}}{\partial\left(x_1^{(i)}\right)^{k-2}}\left(\bar{\xi}_1^{(i)},0,t\right), \quad i=\overline{1,M}.
$$

Як і раніше, змінна t розглядається в якості параметра з інтервалу $(0,\,T)$. Праву частину диференціального рівняння і крайові умови на $\{\Gamma_i\}$ задачі (3.10) отримано за допомогою розкладу в ряд Тейлора функцій f і $\varphi^{(i)}$ в точках $x=0$ і $x_1^{(i)}=0$, $i=\overline{1,M}$, відповідно.

Третя умова в (3.10) з'являється в результаті узгодження регулярних і внутрішніх асимптотик в околі вузла, тобто асимптотики членів $\{N_k\}$ при $\xi_1^{(i)}\to+\infty$ повинні збігатися з відповідними асимптотиками членів регулярних розкладів (3.1) при $x_1^{(i)}=\varepsilon\xi_1^{(i)}\to+0$, $i=\overline{1,M}$. Записуючи кожний член регулярної асимптотики у вигляді ряду Тейлора в околі точок $x_1^{(i)}=0$, $i=\overline{1,M}$, і збираючи коефіцієнти при однакових степенях ε, отримуємо

$$
\begin{aligned}
&\Psi_0^{(i)}\equiv 0, \quad \Psi_1^{(i)}\left(\xi^{(i)},t\right) = \xi_1^{(i)}\frac{\partial\omega_0^{(i)}}{\partial x_1^{(i)}}(0,t), \quad i=\overline{1,M},\\
&\Psi_k^{(i)}\left(\xi^{(i)},t\right) = \sum_{j=1}^{k}\frac{\left(\xi_1^{(i)}\right)^j}{j!}\frac{\partial^j\omega_{k-j}^{(i)}}{\partial\left(x_1^{(i)}\right)^j}(0,t)+\\
&\qquad +\sum_{j=0}^{k-2}\frac{\left(\xi_1^{(i)}\right)^j}{j!}\,\frac{\partial^j u_{k-j}^{(i)}}{\partial\left(x_1^{(i)}\right)^j}\left(\bar{\xi}_1^{(i)},0,t\right), \quad i=\overline{1,M}, \quad k\ge 2.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Розв'язок задачі (3.10) шукаємо у формі $N_k=\sum_{i=1}^M\Psi_k^{(i)}\chi_i+\widetilde{N}_k$, де $\chi_i\in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, $0\le$ $\le\chi_i\le 1$ та

$$
\chi_i\left(\xi_1^{(i)}\right)=\begin{cases}0, & \text{якщо}\quad \xi_1^{(i)}\le 1+\ell_0,\\ 1, & \text{якщо}\quad \xi_1^{(i)}\ge 2+\ell_0,\end{cases} \qquad i=\overline{1,M}.
$$

Тоді $\widetilde{N}_k$ повинен бути розв'язком задачі

$$\begin{aligned} -\Delta_\xi \widetilde{N}_k(\xi,t) &= \widetilde{F}_k(\xi,t), \quad \xi\in\Xi, \\ \partial_{\boldsymbol{\nu}_\xi}\widetilde{N}_k(\xi,t) &= \widetilde{B}^{(i)}_k(\xi,t), \quad \xi\in\Gamma_i, \quad i=\overline{0,M}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

і задовольняти умови стабілізації

$$\widetilde{N}_k(\xi,t)\to\omega^{(i)}_k(0,t), \quad \xi^{(i)}_1\to+\infty, \quad \overline{\xi}^{(i)}_1\in\Upsilon_i(0), \quad i=\overline{1,M}, \tag{3.13}$$

де

$$\widetilde{F}_1(\xi,t)=\sum_{i=1}^M\left(\xi^{(i)}_1\frac{\partial\omega^{(i)}_0}{\partial x^{(i)}_1}(0,t)\chi''_i\left(\xi^{(i)}_1\right)+2\,\frac{\partial\omega^{(i)}_0}{\partial x^{(i)}_1}(0,t)\chi'_i\left(\xi^{(i)}_1\right)\right),$$

$$\widetilde{F}_k=\sum_{i=1}^M\left(\Psi^{(i)}_k\chi''_i+2\,\frac{\partial\Psi^{(i)}_k}{\partial\xi^{(i)}_1}\,\chi'_i\right)-(\partial_t+\mathbf{k})\left(\widetilde{N}_{k-2}-\sum_{i=1}^M\omega^{(i)}_{k-2}\Big|_{x=0}\chi_i\right)+$$
$$+\left(1-\sum_{i=1}^M\chi_i\right)\left.\frac{(\xi,\nabla_x)^{k-2}f}{(k-2)!}\right|_{x=0},$$

$$\widetilde{B}^{(0)}_1(\xi,t)=\varphi^{(0)}(\xi,t), \quad \widetilde{B}^{(0)}_k\equiv 0, \quad \widetilde{B}^{(i)}_1\equiv 0,$$

$$\widetilde{B}^{(i)}_k(\xi,t)=\frac{\left(\xi^{(i)}_1\right)^{k-2}}{(k-2)!}\,\frac{\partial^{k-2}\varphi^{(i)}}{\partial\left(x^{(i)}_1\right)^{k-2}}\left(\overline{\xi}^{(i)}_1,0,t\right)\left(1-\chi_i\left(\xi^{(i)}_1\right)\right), \quad i=\overline{1,M}, \quad k\geq 2.$$

Існування розв'язку задачі (3.12) у відповідному енергетичному просторі можна отримати із загальних результатів про асимптотичну поведінку розв'язків еліптичних крайових задач в областях із різними виходами на нескінченності [23, 24]. Будемо використовувати підхід, запропонований у [24, 25], який було використано у роботах [20–22].

Нехай $C^\infty_{0,\xi}(\overline{\Xi})$ — простір нескінченно диференційовних фінітних функцій в $\overline{\Xi}$, тобто для всіх $v\in C^\infty_{0,\xi}(\overline{\Xi})$ існує $R>0$ таке, що для всіх $\xi\in\overline{\Xi}$, $\xi^{(i)}_1\geq R$, $i=\overline{1,M}$, функції $v(\xi)=0$. Визначимо простір $\mathcal{H}:=\overline{\left(C^\infty_{0,\xi}(\overline{\Xi}),\|\cdot\|_{\mathcal{H}}\right)}$, де

$$\|v\|_{\mathcal{H}}=\sqrt{\int_\Xi|\nabla v(\xi)|^2\,d\xi+\int_\Xi|v(\xi)|^2|\rho(\xi)|^2\,d\xi}$$

і вагова функція $\rho\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $0\leq\rho\leq 1$,

$$\rho(\xi)=\begin{cases}1, & \text{якщо}\quad \xi\in\Xi^{(0)},\\ \left|\xi^{(i)}_1\right|^{-1}, & \text{якщо}\quad \xi^{(i)}_1\geq\ell_0+1, \quad \xi\in\Xi^{(i)}, \quad i=\overline{1,M}.\end{cases}$$

Означення 3.1. *Функція $\widetilde{N}_k$ з простору $\mathcal{H}$ називається узагальненим розв'язком задачі (3.12), якщо для довільної функції $v \in \mathcal{H}$ має місце інтегральна тотожність*

$$\int\limits_{\Xi} \nabla \widetilde{N}_k \cdot \nabla v \, d\xi = \int\limits_{\Xi} \widetilde{F}_k \, v \, d\xi + \sum_{i=0}^{M} \int\limits_{\Gamma_i} \widetilde{B}_k^{(i)} \, v \, d\sigma_\xi .$$

Твердження 3.1. *Нехай $\rho^{-1}\widetilde{F}_k(\cdot,t) \in L^2(\Xi)$, $\widetilde{B}_k^{(0)}(\cdot,t) \in L^2(\Gamma_0)$, $\rho^{-1}\widetilde{B}_k^{(i)}(\cdot,t) \in L^2(\Gamma_i)$, $i = \overline{1,M}$, для майже всіх $t \in (0,T)$. Узагальнений розв'язок задачі (3.12) існує тоді і тільки тоді, коли*

$$\int\limits_{\Xi} \widetilde{F}_k \, d\xi + \sum_{i=0}^{M} \int\limits_{\Gamma_i} \widetilde{B}_k^{(i)} \, d\sigma_\xi = 0. \tag{3.14}$$

Цей розв'язок визначається з точністю до адитивної сталої. Адитивну сталу можна вибрати таким чином, щоб гарантувати існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (3.12), який має таку диференційовну асимптотику зі сталими $\{\gamma_i\}_{i=1}^{M}$:

$$\widehat{N}_k(\xi,t) = \begin{cases} \mathcal{O}\left(\exp\left(-\gamma_1 \xi_1^{(1)}\right)\right), & \xi_1^{(1)} \to +\infty, \\ \boldsymbol{\delta_k^{(i)}}(t) + \mathcal{O}\left(\exp\left(-\gamma_i \xi_1^{(i)}\right)\right), & \xi_1^{(i)} \to +\infty, \quad i = \overline{2,M}. \end{cases} \tag{3.15}$$

Величини $\left\{\boldsymbol{\delta_k^{(i)}}\right\}_{i=2}^{M}$ з (3.15) визначаються за формулою

$$\boldsymbol{\delta_k^{(i)}}(t) = \int\limits_{\Xi} \mathfrak{N}_i(\xi)\widetilde{F}_k(\xi,t)\, d\xi + \sum_{j=0}^{M} \int\limits_{\Gamma_j} \mathfrak{N}_i(\xi)\widetilde{B}_k^{(j)}(\xi,t)\, d\sigma_\xi, \quad i = \overline{2,M}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.16}$$

де $\{\mathfrak{N}_i\}_{i=2}^{M}$ — спеціальні розв'язки відповідної однорідної задачі

$$-\Delta_\xi \mathfrak{N} = 0 \quad \text{в} \quad \Xi, \quad \partial_{\boldsymbol{\nu}} \mathfrak{N} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Xi. \tag{3.17}$$

Твердження 3.2. *Задача (3.17) має $M-1$ лінійно незалежних розв'язків $\{\mathfrak{N}_i\}_{i=2}^{M}$, які не належать простору $\mathcal{H}$ і мають диференційовну асимптотику*

$$\mathfrak{N}_i(\xi) = \begin{cases} -\dfrac{\xi_1^{(1)}}{\pi h_1^2(0)} + \mathcal{O}\left(\exp\left(-\gamma_1 \xi_1^{(1)}\right)\right), & \xi_1^{(1)} \to +\infty, \\ C_i^{(i)} + \dfrac{\xi_1^{(i)}}{\pi h_i^2(0)} + \mathcal{O}\left(\exp\left(-\gamma_i \xi_1^{(i)}\right)\right), & \xi_1^{(i)} \to +\infty, \\ C_i^{(j)} + \mathcal{O}\left(\exp\left(-\gamma_j \xi_1^{(j)}\right)\right), & \xi_1^{(j)} \to +\infty, \ j \in \{2,\ldots,M\} \setminus \{i\}. \end{cases} \tag{3.18}$$

Будь-який інший розв'язок однорідної задачі, який має поліноміальне зростання на нескінченності, можна зобразити у вигляді лінійної комбінації $\mathfrak{c}_1 + \sum_{i=2}^{M} \mathfrak{c}_i \mathfrak{N}_i$.

Зауваження 3.2. Щоб отримати формулу (3.16) для величин $\left\{\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{k}}^{(i)}\right\}_{i=2}^{M}$, необхідно підставити функції $\widehat{N}_k, \mathfrak{N}_i$, $i = \overline{1, M}$, відповідно у другу формулу Гріна – Остроградського

$$\int\limits_{\Xi_R} \left(\widehat{N}\, \Delta_\xi \mathfrak{N} - \mathfrak{N} \Delta_\xi \widehat{N}\right) d\xi = \int\limits_{\partial\Xi_R} \left(\widehat{N}\, \partial_{\nu_\xi} \mathfrak{N} - \mathfrak{N}\, \partial_{\nu_\xi} \widehat{N}\right) d\sigma_\xi$$

і потім перейти до границі при $R \to +\infty$. Тут $\Xi_R = \Xi \cap \left\{\xi \colon \left|\xi_1^{(i)}\right| < R, i = \overline{1, M}\right\}$.

3.3.1. Гранична задача. Розглянемо задачу (3.10) при $k = 0$. Легко перевірити, що $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{0}}^{(i)} \equiv 0$, $i = \overline{2, M}$, і $\widehat{N}_0 \equiv 0$. Тому ця задача має розв'язок в $\mathcal{H}$ тоді і тільки тоді, коли $\omega_0^{(1)}(0, t) = \omega_0^{(2)}(0, t) = \ldots = \omega_0^{(M)}(0, t)$, $t \in (0, T)$; у цьому випадку $N_0 \equiv \widetilde{N}_0 \equiv \omega_0^{(1)}(0, t)$.

Умова розв'язності (3.14) задачі (3.12) при $k = 1$ записується як четверте співвідношення в (3.19).

Таким чином, для функцій $\left\{\omega_0^{(i)}\right\}_{i=1}^{M}$, які є першими членами регулярного асимптотичного розкладу (3.1), отримуємо задачу

$$\begin{gathered}
\pi h_i^2 \frac{\partial \omega_0^{(i)}}{\partial t} - \pi \frac{\partial}{\partial x_1^{(i)}} \left(h_i^2 \frac{\partial \omega_0^{(i)}}{\partial x_1^{(i)}}\right) + \pi h_i^2\, \mathbf{k}\, \omega_0^{(i)} = \widehat{F}_0^{(i)} \quad \text{в} \quad I_i \times (0, T), \quad i = \overline{1, M}, \\
\omega_0^{(i)}(\ell_i, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad i = \overline{1, M}, \\
\omega_0^{(1)}(0, t) = \omega_0^{(2)}(0, t) = \ldots = \omega_0^{(M)}(0, t), \quad t \in (0, T), \\
\sum_{i=1}^{M} \pi h_i^2(0) \frac{\partial \omega_0^{(i)}}{\partial x_1^{(i)}}(0, t) = -\int\limits_{\Gamma_0} \varphi^{(0)}(\xi, t)\, d\sigma_\xi, \quad t \in (0, T), \\
\omega_0^{(i)}\left(x_1^{(i)}, 0\right) = 0, \quad x^{(i)} \in I_i, \quad i = \overline{1, M},
\end{gathered} \tag{3.19}$$

де

$$I_i := \left\{x^{(i)} \colon x_1^{(i)} \in (0, \ell_i), \overline{x}_1^{(i)} = (0, 0)\right\} \quad \text{і} \quad \widehat{F}_0^{(i)} = \pi h_i^2 f_0^{(i)} + \int\limits_{\partial\Upsilon_i(x_1^{(i)})} \varphi^{(i)}\, dl_{\overline{\xi}_1^{(i)}}.$$

Задача (3.19) називається *граничною* для задачі (2.1).

Для функцій $\widetilde{\phi}(x) = \phi^{(i)}\left(x_1^{(i)}\right)$, $x^{(i)} \in I_i$, $i = \overline{1, M}$, визначених на графі $\mathcal{I} := \bigcup_{i=1}^{M} \overline{I_i}$, введемо простір Соболєва

$$\mathcal{H}_0 := \left\{\widetilde{\phi} \colon \phi^{(i)} \in H^1(I_i), \phi^{(i)}(\ell_i) = 0, i = \overline{1, M}, \phi^{(1)}(0) = \phi^{(2)}(0) = \ldots = \phi^{(M)}(0)\right\}$$

зі скалярним добутком $(\widetilde{\phi}, \widetilde{\psi})_0 := \sum_{i=1}^{M} \pi \int_0^{\ell_i} h_i^2 \frac{d\phi^{(i)}}{dx_1^{(i)}} \frac{d\psi^{(i)}}{dx_1^{(i)}}\, dx_1^{(i)}$, $\widetilde{\phi}, \widetilde{\psi} \in \mathcal{H}_0$.

Функція $\widetilde{\omega} \in L^2(0,T;\mathcal{H}_0)$, для якої $\partial_t\widetilde{\omega} \in L^2\left(0,T;\mathcal{H}_0^*\right)$, називається узагальненим розв'язком задачі (3.19), якщо вона задовольняє інтегральну тотожність

$$\pi\sum_{i=1}^{M}\int_0^{\ell_i} h_i^2(\partial_t+\mathbf{k})\omega^{(i)}\psi^{(i)}\,dx_1^{(i)}+(\widetilde{\omega},\widetilde{\psi})_0 = \psi^{(1)}(0)\int_{\Gamma_0}\varphi^{(0)}\,d\sigma_\xi+\sum_{i=1}^{M}\int_0^{\ell_i}\widehat{F}_0^{(i)}\,\psi^{(i)}\,dx_1^{(i)}$$

для всіх $\widetilde{\psi} \in \mathcal{H}_0$ і майже всіх $t \in (0,T)$ і $\widetilde{\omega}|_{t=0} = 0$. Тут простір $\mathcal{H}_0^*$ є спряженим до $\mathcal{H}_0$.

Існування і єдиність розв'язку задачі (3.19) випливає з теорії лінійних параболічних крайових задач.

3.3.2. Задачі для $\{\omega_k\}$. Враховуючи співвідношення в задачах (3.4), з умови розв'язності (3.14) задачі (3.12) для фіксованого індексу $k \geq 2$ отримуємо такі умови Кірхгофа для $\left\{\omega_k^{(i)}\right\}$:

$$\sum_{i=1}^{M}\pi h_i^2(0)\frac{\partial\omega_{k-1}^{(i)}}{\partial x_1^{(i)}}(0,t) = \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{k-1}}^{*}(t), \quad k \geq 2, \tag{3.20}$$

де

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{k}}^{*} = \sum_{i=1}^{M}\Bigg(&\sum_{j=1}^{k}\frac{\ell_0^j}{j!}\int_{\Upsilon_i(0)}\left.\frac{\partial^{j-1}f_{k-j}^{(i)}}{\partial x_i^{j-1}}\right|_{x_1^{(i)}=0}d\bar{\xi}_1^{(i)}+\frac{\ell_0^k}{k!}\int_{\partial\Upsilon_i(0)}\left.\frac{\partial^{k-1}\varphi^{(i)}}{\left(\partial x_1^{(i)}\right)^{k-1}}\right|_{x_1^{(i)}=0}dl_{\bar{\xi}_1^{(i)}}+\\&+\int_{\Xi^{(i)}\cap\{\xi^{(i)}:\,\ell_0<\xi_1^{(i)}<\ell_0+2\}}(\partial_t+\mathbf{k})N_{k-1}\,d\xi^{(i)}-\\&-\pi h_i^2(0)\sum_{j=1}^{k}\frac{(\ell_0+2)^j}{j!}\,(\partial_t+\mathbf{k})\left.\frac{\partial^{j-1}\omega_{k-j+2}^{(i)}}{\partial\left(x_1^{(i)}\right)^{j-1}}\right|_{x_1^{(i)}=0}+\\&+\int_{\Xi^{(i)}\cap\{\xi^{(i)}:\,\xi_1^{(i)}>\ell_0+2\}}(\partial_t+\mathbf{k})\left(N_{k-1}-\left.\omega_{k-1}^{(i)}\right|_{x_1^{(i)}=0}-\Psi_{k-1}^{(i)}\right)d\xi^{(i)}\Bigg)-\\&-\int_{\Xi^{(0)}}\left(\left.\frac{(\xi,\nabla_x)^{k-1}f}{(k-1)!}\right|_{x=0}-(\partial_t+\mathbf{k})N_{k-1}\right)d\xi, \quad k \in \mathbb{N}.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Отже, якщо функції $\left\{\omega_{k-1}^{(i)}\right\}_{i=1}^{M}$ задовольняють умови (3.20), то розв'язок $\widetilde{N}_k$ задачі (3.12) існує. За твердженням 3.1 його можна вибрати єдиним чином, щоб гарантувати асимптотику (3.15).

Проте до цього часу не було враховано умову (3.13). Щоб її виконати, запишемо узагальнений розв'язок задачі (3.12) у вигляді $\widetilde{N}_k(\xi,t) = \omega_k^{(1)}(0,t)+\widehat{N}_k(\xi,t)$. Враховуючи асимптотику (3.15), покладаємо $\omega_k^{(1)}(0,t) = \omega_k^{(i)}(0,t) - \boldsymbol{\delta_k^{(i)}}(t)$, $i = \overline{2,M}$, $k \in \mathbb{N}$. В результаті отримуємо розв'язок задачі (3.10) з такою асимптотикою:

$$N_k(\xi,t) = \omega_k^{(i)}(0,t) + \Psi_k^{(i)}\left(\xi^{(i)},t\right) + \mathcal{O}\left(\exp\left(-\gamma_i \xi_1^{(i)}\right)\right), \quad \xi_1^{(i)} \to +\infty, \quad i = \overline{1,M}. \quad (3.22)$$

Зауваження 3.3. З огляду на (3.22) можемо стверджувати, що умови твердження 3.1 виконуються, а також невласні інтеграли в (3.21) збігаються.

Покладемо $G_k(\xi,t) := \omega_k^{(i)}(0,t) + \Psi_k^{(i)}\left(\xi^{(i)},t\right)$, $\left(\xi^{(i)},t\right) \in \Xi^{(i)} \times (0,T)$, $i = \overline{1,M}$, $k \in \mathbb{N}$.

Зауваження 3.4. Згідно з (3.22), функції $\{N_k - G_k\}$ експоненціально спадають при $\xi_1^{(i)} \to +\infty$, $i = \overline{1,M}$.

Таким чином, функції $\left\{\omega_k^{(i)}\right\}_{i=1}^M$ визначаються із задачі

$$\begin{gathered}
\pi h_i^2 \frac{\partial \omega_k^{(i)}}{\partial t} - \pi \frac{\partial}{\partial x_1^{(i)}}\left(h_i^2 \frac{\partial \omega_k^{(i)}}{\partial x_1^{(i)}}\right) + \pi h_i^2\,\mathbf{k}\,\omega_k^{(i)} = \widehat{F}_k^{(i)} \quad \text{в} \quad I_i \times (0,T), \quad i = \overline{1,M}, \\
\omega_k^{(i)}(\ell_i,t) = 0, \quad t \in (0,T), \quad i = \overline{1,M}, \\
\omega_k^{(i)}(0,t) - \boldsymbol{\delta_k^{(i)}}(t) = \omega_k^{(1)}(0,t), \quad t \in (0,T), \quad i = \overline{2,M}, \\
\sum_{i=1}^M \pi h_i^2(0) \frac{\partial \omega_k^{(i)}}{\partial x_1^{(i)}}(0,t) = \boldsymbol{d_k^*}(t), \quad t \in (0,T), \\
\omega_k^{(i)}\left(x_1^{(i)},0\right) = 0, \quad x^{(i)} \in I_i, \quad i = \overline{1,M},
\end{gathered} \qquad (3.23)$$

де

$$\widehat{F}_k^{(i)} = \int\limits_{\Upsilon_i(x_i)} f_k^{(i)}\, d\bar{\xi}_1^{(i)} + \eta_k^{(i)} \int\limits_{\partial\Upsilon_i(x_1^{(i)})} \varphi^{(i)}\, dl_{\bar{\xi}_1^{(i)}} + h_i' \int\limits_{\partial\Upsilon_i(x_1^{(i)})} \frac{\partial u_k^{(i)}}{\partial x_1^{(i)}}\, dl_{\bar{\xi}_1^{(i)}}, \quad i = \overline{1,M}, \quad k \in \mathbb{N},$$

а $f_k^{(i)}, \eta_k^{(i)}$ визначено в (3.6) і (3.5) відповідно; нагадаємо, що $u_1^{(i)} \equiv 0$, $i = \overline{1,M}$.

Після підстановки $\phi_k^{(1)} = \omega_k^{(1)}$, $\phi_k^{(i)} = \omega_k^{(i)}\left(1 - x_1^{(i)}/\ell_i\right)\boldsymbol{\delta_k^{(i)}}$, $i = \overline{2,M}$, при фіксованому k задача (3.23) спрощується до лінійної параболічної задачі у просторі $L^2(0,T;\mathcal{H}_0)$. Звідси, а також із класичної теорії лінійних параболічних крайових задач випливає існування і єдиність розв'язку задачі (3.23).

4. Повний асимптотичний розклад і обґрунтування. *Перший крок.* Із граничної задачі (3.19) однозначно визначаємо перші члени $\left\{\omega_0^{(i)}\right\}_{i=1}^M$ регулярних частин асимптотичного розвинення (3.1). Далі єдиним чином визначаємо перший член N_0 внутрішнього розвинення (3.3); він є розв'язком задачі (3.10) при $k = 0$, $N_0 = \omega_0^{(1)}(0,t)$. Знаючи $\left\{\omega_0^{(i)}\right\}_{i=1}^M$, переходимо до задачі (3.4) при $k = 2$ для знаходження коефіцієнта $u_2^{(i)}$ для кожного індексу $i = \overline{1,M}$. Легко перевірити, що умови розв'язності цієї задачі виконуються.

За третьою умовою з (3.4) існує єдиний розв'язок задачі (3.4). Використовуючии формулу (3.9), визначаємо перші члени $\left\{\Pi_2^{(i)}\right\}_{i=1}^M$ примежового розвинення (3.2) як розв'язки задач (3.7) при $k=2$.

Другий крок. Наступні члени $\left\{\omega_1^{(i)}\right\}_{i=1}^M$ регулярних асимптотик (3.1) знаходимо із задачі (3.23) при $k = 1$. Величини $\left\{\boldsymbol{\delta_1^{(i)}}\right\}_{i=2}^M$ (див. (3.16)) і $\boldsymbol{d_1^*}$ (див. (3.21)) визначаються однозначно за формулами

$$\boldsymbol{\delta_1^{(i)}}(t) = \int\limits_{\Xi} \mathfrak{N}_i(\xi) \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial \omega_0^{(j)}}{\partial x_1^{(j)}}(0,t) \left(\xi_1^{(j)} \chi_j'' \left(\xi_1^{(j)}\right) + 2\,\chi_j' \left(\xi_1^{(j)}\right)\right) d\xi + \int\limits_{\Gamma_0} \mathfrak{N}_i(\xi) \varphi^{(0)}(\xi,t)\, d\xi, \quad (4.1)$$

$$\boldsymbol{d_1^*}(t) = \ell_0 \sum_{i=1}^{M} \left(\pi h_i^2(0) f(0,t) + \int\limits_{\partial\Upsilon_i(0)} \varphi^{(i)}(\overline{\xi}_i, 0, t)\, dl_{\overline{\xi}_i} \right) - \left|\Xi^{(0)}\right|_3 f(0,t), \quad (4.2)$$

де $|\Xi^{(0)}|_3$ — об'єм $\Xi^{(0)}$ (див. п. 2). Знаючи $\left\{\omega_1^{(i)}\right\}_{i=1}^M$, можемо знайти другі члени регулярних асимптотик $\left\{u_3^{(i)}\right\}_{i=1}^M$ (ряди (3.1)) і примежових асимптотик $\left\{\Pi_3^{(i)}\right\}_{i=1}^M$ (ряди (3.2)) із задач (3.4) і (3.2) при $k = 3$ відповідно. Другий член N_1 розкладу (3.3) є єдиним розв'язком задачі (3.10) при $k = 1$.

Індуктивний крок. Припустимо, що визначено коефіцієнти $\left\{\omega_0^{(i)}, \omega_1^{(i)}, \ldots, \omega_{n-3}^{(i)}\right\}_{i=1}^M$, $\left\{u_2^{(i)}, u_3^{(i)}, \ldots, u_{n-1}^{(i)}\right\}_{i=1}^M$ ряду (3.1), коефіцієнти $\left\{\Pi_2^{(i)}, \Pi_3^{(i)}, \ldots, \Pi_{n-1}^{(i)}\right\}_{i=1}^M$ ряду (3.2), коефіцієнти $\{N_1, \ldots, N_{n-3}\}$ ряду (3.3), величини $\left\{\boldsymbol{\delta_1^{(i)}}, \ldots, \boldsymbol{\delta_{n-3}^{(i)}}\right\}_{i=2}^M$ та $\left\{\boldsymbol{d_1^*}, \ldots, \boldsymbol{d_{n-3}^*}\right\}$. Тоді можемо знайти розв'язки $\left\{\omega_{n-2}^{(i)}\right\}_{i=1}^M$ задачі (3.23) з величинами $\{\boldsymbol{\delta_{n-2}^{(i)}}\}_{i=2}^M$ (див. (3.16)) у першій умові спряження і величиною $\boldsymbol{d_{n-2}^*}$ (див. (3.21)) в умові Кірхгофа. Коефіцієнти $\left\{u_n^{(i)}\right\}_{i=1}^M$ знаходяться як розв'язки задач (3.4) при $k = n$. Умова розв'язності цих задач виконується, оскільки $\left\langle u_{n-2}^{(i)}\left(\cdot, x_1^{(i)}, t\right)\right\rangle_{\Upsilon_i(x_1^{(i)})} = 0, i = \overline{1, M}$. Далі, за допомогою (3.9) знаходимо коефіцієнти $\left\{\Pi_n^{(i)}\right\}_{i=1}^M$ примежового асимптотичного розкладу (3.2) як розв'язки задач (3.7) при $k = n$. Нарешті, знаходимо коефіцієнт N_{n-2} внутрішнього розкладу (3.3), який є єдиним розв'язком задачі (3.10) при $k = n-2$.

Таким чином, можемо визначити кожний коефіцієнт рядів (3.1), (3.2) і (3.3).

4.1. Обґрунтування. За допомогою рядів (3.1), (3.2), (3.3) побудовано асимптотичний ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \left(\overline{u}_k(x,t,\varepsilon,\alpha) + \overline{\Pi}_k(x,t,\varepsilon) + \overline{N}_k(x,t,\varepsilon,\alpha)\right), \quad (x,t) \in \Omega_\varepsilon \times (0,T), \quad (4.3)$$

де

$$\overline{u}_k(x,t,\varepsilon,\alpha) := \sum_{i=1}^{M} \chi_{\ell_0}^{(i)}\left(\frac{x_1^{(i)}}{\varepsilon^{\alpha}}\right)\left(\omega_k^{(i)}\left(x_1^{(i)},t\right) + u_k^{(i)}\left(\frac{\overline{x}_1^{(i)}}{\varepsilon}, x_1^{(i)}, t\right)\right), \quad u_0 \equiv u_1 \equiv 0,$$

$$\overline{\Pi}_k(x,t,\varepsilon) := \sum_{i=1}^{M} \chi_{\delta}^{(i)}\left(x_1^{(i)}\right)\Pi_k^{(i)}\left(\frac{\overline{x}_1^{(i)}}{\varepsilon}, \frac{\ell_i - x_1^{(i)}}{\varepsilon}, t\right), \quad \Pi_0 \equiv \Pi_1 \equiv 0,$$

$$\overline{N}_k(x,t,\varepsilon,\alpha) := \left(1 - \sum_{i=1}^{M} \chi_{\ell_0}^{(i)}\left(\frac{x_1^{(i)}}{\varepsilon^{\alpha}}\right)\right) N_k\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right), \quad N_0 = \omega_0^{(1)}(0,t),$$

α — фіксоване число з інтервалу $\left(\dfrac{2}{3}, 1\right)$, $\chi_{\ell_0}^{(i)}$, $\chi_{\delta}^{(i)}$ — гладкі зрізаючі функції, визначені за формулами

$$\chi_{\ell_0}^{(i)}(\zeta_i) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \zeta_i \ge 3\ell_0, \\ 0, & \text{якщо } \zeta_i \le 2\ell_0, \end{cases} \quad \chi_{\delta}^{(i)}\left(x_1^{(i)}\right) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_1^{(i)} \ge \ell_i - \delta, \\ 0, & \text{якщо } x_1^{(i)} \le \ell_i - 2\delta, \end{cases} \quad i = \overline{1,M}, \tag{4.4}$$

а δ — достатньо мале фіксоване додатне число.

Теорема 4.1. *Ряд (4.3) є асимптотичним розвиненням розв'язку u_ε крайової задачі (2.1), тобто*

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad (m \ge 2) \quad \exists C_m > 0 \quad \exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0):$$

$$\max_{t \in [0,T]} \left\| u_\varepsilon(\cdot,t) - U_\varepsilon^{(m)}(\cdot,t) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \left\| u_\varepsilon - U_\varepsilon^{(m)} \right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon))} \le C_m \varepsilon^{\alpha\left(m-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}, \tag{4.5}$$

де $U_\varepsilon^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \left(\overline{u}_k + \overline{\Pi}_k + \overline{N}_k\right)$ є частковою сумою ряду (4.3).

Зауваження 4.1. Тут і далі всі сталі в нерівностях не залежать від параметра ε.

Доведення. Виберемо довільне $m \ge 2$, $m \in \mathbb{N}$. Підставимо різницю $W_\varepsilon := u_\varepsilon - U_\varepsilon^{(m)}$ в рівняння та крайові умови задачі (2.1). Згідно з (2.2), легко перевірити, що часткова сума $U_\varepsilon^{(m)}$ не залишає жодних відхилів у початкових умовах. Таким чином, функція W_ε задовольняє такі співвідношення:

$$\begin{gathered} \partial_t W_\varepsilon - \Delta_x W_\varepsilon + \mathbf{k}\, W_\varepsilon = R_\varepsilon^{(m)} \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon \times (0,T), \\ \partial_{\boldsymbol{\nu}} W_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon^{(0)} \times (0,T), \\ \partial_{\boldsymbol{\nu}} W_\varepsilon = \breve{R}_{\varepsilon,(i)}^{(m)} \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon^{(i)} \times (0,T), \quad i = \overline{1,M}, \\ W_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \Upsilon_\varepsilon^{(i)}(\ell_i) \times (0,T), \quad i = \overline{1,M}, \\ W_\varepsilon|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon, \end{gathered} \tag{4.6}$$

де для відхилів $R_\varepsilon^{(m)}$ та $\breve{R}_{\varepsilon,(i)}^{(m)}$ отримано оцінки

$$\begin{gathered}\left\|R_\varepsilon^{(m)}\right\|_{L^2((\Omega_\varepsilon\times(0,T)))} \le \check{c}_m \varepsilon^{\alpha\left(m-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}, \\ \left\|\breve{R}_{\varepsilon,(i)}^{(m)}\right\|_{L^2((\Gamma_\varepsilon^{(i)}\times(0,T)))} \le \overline{c}_m \varepsilon^{\alpha\left(m-\frac{1}{2}\right)+1}, \quad i=\overline{1,M}.\end{gathered} \tag{4.7}$$

Доведення оцінок (4.7) проводиться, як і в роботі [21].

З (4.6) виводимо, що інтегральне співвідношення

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \partial_t W_\varepsilon\, W_\varepsilon\, dx + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |\nabla_x W_\varepsilon|^2\, dx + \mathbf{k} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} W_\varepsilon^2\, dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} R_\varepsilon^{(m)}\, W_\varepsilon\, dx + \sum_{i=1}^{M} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon^{(i)}} \breve{R}_{\varepsilon,(i)}^{(m)}\, W_\varepsilon\, d\sigma_{x^{(i)}}$$

справджується для майже всіх $t \in (0,T)$. Звідси, інтегруючи по $t \in (0,\tau)$, де $\tau \in (0,T]$, і враховуючи нерівності (4.7) і нерівність Фрідріхса, отримуємо нерівність

$$\|W_\varepsilon(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\nabla_x W_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,\tau))} \le C_m \varepsilon^{\alpha\left(m-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}} \|W_\varepsilon\|_{L^2(0,\tau;H^1(\Omega_\varepsilon))},$$

з якої випливає асимптотична оцінка (4.5).

Теорему 4.1 доведено.

З формули (4.5), як і в роботі [21], випливають такі наслідки.

Наслідок 4.1. *Для різниці між розв'язком u_ε вихідної задачі (2.1) і частковими сумами $U_\varepsilon^{(0)}, U_\varepsilon^{(1)}$ справджуються такі асимптотичні оцінки:*

$$\left\|u_\varepsilon - U_\varepsilon^{(0)}\right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon))} \le \widetilde{C}_0\, \varepsilon^{1+\frac{\alpha}{2}}, \quad \max_{t\in[0,T]} \left\|u_\varepsilon(\cdot,t) - U_\varepsilon^{(0)}(\cdot,t)\right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le \widetilde{C}_1 \varepsilon^2, \tag{4.8}$$

$$\left\|u_\varepsilon - U_\varepsilon^{(1)}\right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon))} \le \widetilde{C}_2\, \varepsilon^2, \quad \max_{t\in[0,T]} \left\|u_\varepsilon(\cdot,t) - U_\varepsilon^{(1)}(\cdot,t)\right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \le \widetilde{C}_3\, \varepsilon^{\min\left(1+\frac{5}{2}\,\alpha,\,3\right)}. \tag{4.9}$$

У циліндрах $\Omega_{\varepsilon,\alpha}^{(i)} := \Omega_\varepsilon^{(i)} \cap \left\{x^{(i)} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^{(i)} \in I_{\varepsilon,\alpha}^{(i)} := (3\ell_0\varepsilon^\alpha, \ell_i)\right\}$ мають місце такі оцінки:

$$\left\|u_\varepsilon - \omega_0^{(i)}\right\|_{L^2\left(0,T;H^1(\Omega_{\varepsilon,\alpha}^{(i)})\right)} \le \widetilde{C}_4 \varepsilon^2, \quad i=\overline{1,M}. \tag{4.10}$$

В околі $\Omega_{\varepsilon,\ell_0}^{(0)} := \Omega_\varepsilon \cap \left\{x^{(i)} \colon x_1^{(i)} < 2\ell_0\varepsilon, i=\overline{1,M}\right\}$ вузла $\Omega_\varepsilon^{(0)}$ маємо оцінку

$$\left\|u_\varepsilon - \omega_0^{(i)}\Big|_{x_1^{(i)}=0} - \varepsilon\, N_1\right\|_{L^2\left(0,T;H^1\left(\Omega_{\varepsilon,\ell_0}^{(0)}\right)\right)} \le \widetilde{C}_5 \varepsilon^{\frac{5}{2}}. \tag{4.11}$$

Наслідок 4.2. *Якщо* $h_i\left(x_1^{(i)}\right) \equiv h_i \equiv \text{const}, i = \overline{1, M}$, *то*

$$\left\| E_\varepsilon^{(i)} u_\varepsilon - \omega_0^{(i)} \right\|_{L^2\left(0,T;H^1(I_{\varepsilon,\alpha}^{(i)})\right)} \le \widetilde{C}_1 \varepsilon, \tag{4.12}$$

$$\left\| E_\varepsilon^{(i)} u_\varepsilon - \omega_0^{(i)} \right\|_{L^2(0,T;C([3\ell_0\varepsilon^\alpha,\ell_i]))} \le \widetilde{C}_2 \varepsilon, \quad i = \overline{1, M}, \tag{4.13}$$

де

$$\left(E_\varepsilon^{(i)} u_\varepsilon\right)\left(x_1^{(i)}, t\right) = \frac{1}{\pi\varepsilon^2\, h_i^2} \int\limits_{\Upsilon_\varepsilon^{(i)}(0)} u_\varepsilon(x,t)\, d\overline{x}_1^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}.$$

Наслідок 4.3. *Якщо до припущень* $h_i\left(x_1^{(i)}\right) \equiv h_i \equiv \text{const}, i = \overline{1, M}$, *додатково* $\varphi_\varepsilon^{(i)} \equiv \equiv 0$ *і* $f^{(i)} = f^{(i)}\left(x_1^{(i)}, t\right), \left(x^{(i)}, t\right) \in \Omega_\varepsilon^{(i)} \times (0,T), i = \overline{1, M}$, *то в асимптотичному розвиненні (4.3) розв'язку* u_ε *всі члени* $\left\{u_k^{(i)}, \Pi_k^{(i)}\right\}$ *тотожно дорівнюють нулю, а асимптотичні оцінки покращуються:*

$$\max_{t\in[0,T]} \left\| u_\varepsilon(\cdot,t) - U_\varepsilon^{(m)}(\cdot,t) \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \left\| u_\varepsilon - U_\varepsilon^{(m)} \right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon))} \le C_m \varepsilon^{\alpha\left(m-\frac{1}{2}\right)+1}, \tag{4.14}$$

$$\left\| u_\varepsilon - \omega_0^{(i)} - \varepsilon\omega_1^{(i)} \right\|_{L^2\left(0,T;H^1\left(\Omega_{\varepsilon,\alpha}^{(i)}\right)\right)} \le \widetilde{C}_1\, \varepsilon^3, \quad i = \overline{1, M}, \tag{4.15}$$

$$\left\| E_\varepsilon^{(i)} u_\varepsilon - \omega_0^{(i)} - \varepsilon\omega_1^{(i)} \right\|_{L^2\left(0,T;H^1\left(I_{\varepsilon,\alpha}^{(i)}\right)\right)} \le \widetilde{C}_2 \varepsilon^2, \quad i = \overline{1, M}, \tag{4.16}$$

$$\left\| E_\varepsilon^{(i)} u_\varepsilon - \omega_0^{(i)} - \varepsilon\omega_1^{(i)} \right\|_{L^2(0,T;C([3\ell_0\varepsilon^\alpha,\ell_i]))} \le \widetilde{C}_3 \varepsilon^2, \quad i = \overline{1, M}. \tag{4.17}$$

5. Висновки. 1. Таким чином, у статті побудовано і обґрунтовано асимптотичне розвинення розв'язку задачі (2.1) і доведено відповідні оцінки. Отримані результати дають можливість замінити складну крайову задачу (2.1) відповідною одновимірною крайовою задачею (3.19) у графі $\mathcal{I}$ з достатньою точністю, яка вимірюється параметром ε, що характеризує товщину вузла і криволінійних циліндрів. У зв'язку з цим оцінки (4.13) і (4.17), які є важливими у прикладних задачах, також підтверджують висновки.

Для побудови асимптотичного наближення в усій області було застосовано метод узгодження асимптотичних розвинень (див. [26]) зі спеціальними зрізаючими функціями $\left\{\chi_{\ell_0}^{(i)}\right\}_{i=1}^M$.

2. За допомогою оцінок (4.8), (4.9) і (4.15) – (4.17) можна визначити вплив геометричної нерегулярності вузла і фізичних процесів у вузлі на глобальному рівні через члени $\left\{\omega_0^{(i)}, \omega_1^{(i)}\right\}_{i=1}^M$ регулярних асимптотик (3.1), оскільки розв'язок $\widetilde{\omega}_0$ граничної задачі (3.19) залежить від інтеграла $\int_{\Gamma_0} \varphi^{(0)}\, d\xi$ в умові Кірхгофа, а $\widetilde{\omega}_1$ — від величини $\boldsymbol{d}_1^*$ (див. (4.2)) в умові Кірхгофа і величин $\left\{\boldsymbol{\delta}_1^{(i)}\right\}_{i=2}^M$ (див. (4.1)) у першій умові спряження, які враховують ці фактори.

3. З оцінок (4.9) і (4.11) отримуємо апроксимацію градієнта розв'язку

$$\nabla_x u_\varepsilon(x,t) \sim \frac{\partial \omega_0^{(i)}}{\partial x_1^{(i)}} \left(x_1^{(i)}, t\right) + \varepsilon \frac{\partial \omega_1^{(i)}}{\partial x_1^{(i)}} \left(x_1^{(i)}, t\right) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0$$

в L^2-нормі в кожному криволінійному циліндрі $\Omega^{(i)}_{\varepsilon,\alpha}$, $i = \overline{1, M}$, і

$$\nabla_x u_\varepsilon(x,t) \sim \nabla_\xi \left(N_1(\xi,t)\right)\big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0$$

в околі $\Omega^{(0)}_{\varepsilon,\ell_0}$ вузла. Також використовуючи оцінки (4.5), можемо отримати краще наближення розв'язку і його градієнта з точністю $\mathcal{O}\left(\varepsilon^{\alpha\left(m-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}\right)$ для будь-якого $m \in \mathbb{N}$.

Автор висловлює подяку своєму науковому керівнику професору Т. А. Мельнику за постановку задачі і підтримку в написанні цієї роботи.

Література

1. *Borisyuk A. O.* Model study of noise field in the human chest due to turbulent flow in a large blood vessel // J. Fluids and Structures. — 2003. — **17**. — P. 1095 – 1110.
2. *Borisyuk A. O.* Experimental study of wall pressure fluctuations in rigid and elastic pipes behind an axisymmetric narrowing // J. Fluids and Structures. — 2010. — **26**. — P. 658 – 674.
3. *Borysyuk A. O., Borysyuk Ya. A.* Wall preassure fluctuations behind a pipe narrowing of various shapes // Наукоємні технології. — 2017. — **34**, № 2. — C. 162 – 170.
4. *Borsche R., Klar A., Pham T. N. H.* Kinetic and related macroscopic models for chemotaxis on networks // Math. Models and Meth. Appl. Sci. — 2016. — **26**, № 6. — P. 1219 – 1242.
5. *Cardone G., Corbo-Esposito A., Panasenko G.* Asymptotic partial decomposition for diffusion with sorption in thin structures // Nonlinear Anal. — 2006. — **65**. — P. 79 – 106.
6. *Chechkin G. A., Jikov V. V., Lukkassen D., Piatnitski A. L.* On homogenization of networks and junctions // Asymptotic Anal. — 2002. — **30**. — P. 61 – 80.
7. *Cioranescu D., Saint Jean Paulin J.* Homogenization of reticulated structures // Appl. Math. Sci. — New York: Springer-Verlag, 1999. — **136**.
8. *Gaudiello A., Kolpakov A. G.* Influence of non degenerated joint on the global and local behavior of joined rods // Int. J. Eng. Sci. — 2011. — **49**, Issue 3. — P. 295 – 309.
9. *Mel'nyk T. A.* Asymptotic approximation for the solution to a semi-linear parabolic problem in a thick junction with the branched structure // J. Math. Anal. and Appl. — 2015. — **424**. — P. 1237 – 1260.
10. *Назаров С. А.* Асимптотический анализ тонких пластин и стержней. — Новосибирск: Науч. книга, 2002. — Т. 1.
11. *Panasenko G. P.* Multi-scale modelling for structures and composites. — Dordrecht: Springer, 2005.
12. *Panasenko G., Pileckas K.* Asymptotic analysis of the non-steady Navier – Stokes equations in a tube structure. I. The case without boundary-layer in time // Nonlinear Anal. — 2015. — **122**. — P. 125 – 168.
13. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* Усреднение задач теории упругости на периодических сетках критической толщины // Мат. сб. — 2003. — **194**, № 5. — С. 61 – 96.
14. *Evju Ø., Valen-Sendstad K., Mardal K. A.* A study of wall shear stress in 12 aneurysms with respect to different viscosity modelsand flow conditions // J. Biomechanics. — 2013. — **46**. — P. 2802 – 2808.
15. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. — М.: Наука, 1984.
16. *Назаров С. А., Слуцкий А. С.* Произвольные плоские системы анизотропных балок // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2002. — **236**. — С. 234 – 261.

17. *Назаров С. А., Слуцкий А. С.* Асимптотический анализ произвольной пространственной системы тонких стержней // Тр. Санкт-Петербург. мат. о-ва. — 2004. — **10**. — С. 63–115.

18. *Panasenko G. P.* Method of asymptotic partial decomposition of domain // Math. Models and Meth. Appl. Sci. — 1998. — **8**, № 1. — P. 139–156.

19. *Panasenko G., Pileckas K.* Asymptotic analysis of the non-steady Navier–Stokes equations in a tube structure. II. General case // Nonlinear Anal. — 2015. — **125**. — P. 582–607.

20. *Klevtsovskiy A. V., Mel'nyk T. A.* Asymptotic expansion for the solution to a boundary-value problem in a thin cascade domain with a local joint // Asymptotic Anal. — 2016. — **97**. — P. 265–290.

21. *Клевцовский А. В., Мельник Т. А.* Асимптотические приближения решения краевой задачи в тонких областях типа аневризма // Пробл. мат. анализа. — 2017. — **88**. — С. 59–81 (Eng. transl.: J. Math. Sci. — 2017. — **224**, Issue 5. — P. 667–693).

22. *Klevtsovskiy A. V., Mel'nyk T. A.* Asymptotic approximation for the solution to a semi-linear parabolic problem in a thin star-shaped junction // Math. Meth. Appl. Sci. — 2017. DOI: 10.1002/mma.4603

23. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // Успехи мат. наук. — 1983. — **38**, вып. 2. — С. 3–76.

24. *Назаров С. А.* Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей. 1 // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1995. — **18**. — С. 3–78.

25. *Mel'nyk T. A.* Homogenization of the Poisson equation in a thick periodic junction // Z. Anal. und Anwend. — 1999. — **18**, № 4. — S. 953–975.

26. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. — М.: Наука, 1989.

Одержано 21.09.17