УДК 517.9

УМОВИ БІФУРКАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ЛЯПУНОВА У ПРОСТОРІ ГІЛЬБЕРТА

Є. В. Панасенко

Запоріз. нац. ун-т
вул. Жуковського, 66, Запоріжжя, 69600, Україна
e-mail: panasenko.yevgeniy@gmail.com

О. О. Покутний*

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна
e-mail: lenasas@gmail.com

We find sufficient bifurcation conditions for solutions of boundary-value problems for the Lyapunov equation in a Hilbert space. The cases where the generating equation has or does not have solutions are considered. As an example, we consider the problem in the space l_2 of sequences with matrices of countable dimension.

Найдены достаточные условия бифуркации решений краевых задач в пространстве Гильберта для уравнения Ляпунова. Рассмотрены случаи, когда порождающее уравнение имеет решения и не имеет решений. В качестве примера рассмотрена задача в пространстве последовательностей l_2 со счетномерными матрицами.

Вступ. Дослідженню рівняння Ляпунова присвячено багато робіт (див., наприклад, [4, 9, 10, 12–20, 22, 24, 25, 27, 28]). Рівняння Ляпунова досліджується як у скінченновимірному, так і у нескінченновимірному випадках. Зазначимо, що рівняння Ляпунова використовується у квантовій механіці. Відомою є динамічна система, що породжується гамільтоніаном у чотиривимірному просторі й має назву „конфігураційний квантовий кіт Арнольда". Досліджуються як операторне, так і операторно-диференціальне рівняння Ляпунова.

Дана робота є продовженням роботи [20]. У ній досліджуються умови біфуркації розв'язків крайових задач для рівняння Ляпунова у так званому резонансному (критичному випадку), коли порушується єдиність розв'язку. Зазначимо, що біфуркаційні методи є досить розвиненими й потужними [1, 3, 7].

Постановка задачі. Розглянемо крайову задачу

$$Z'(t,\varepsilon) = AZ(t,\varepsilon) - Z(t,\varepsilon)B + \varepsilon C(t)Z(t,\varepsilon) + \Phi(t), \tag{1}$$

$$lZ(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon l_1 Z(\cdot,\varepsilon), \tag{2}$$

де $A, B \in \mathcal{L}(H_1)$ — лінійні обмежені оператори, $\Phi(t), C(t) \in C([a,b];\mathcal{L}(H_1))$ — неперервні оператор-функції, $l, l_1 \colon C^1([a,b];\mathcal{L}(H_1)) \to H_2$ — лінійні обмежені оператори, ε — малий параметр, $\mathcal{L}(H_1)$ — простір лінійних та обмежених операторів, що діють із простору Гільберта H_1 у себе, H_1 та H_2 — простори Гільберта, $\alpha \in H_2$. Шукаємо розв'язок

* Частково підтримано додатковою відомчою темою для молодих учених НАН України № 0117U002688.

$Z(t,\varepsilon) \in C^1([a,b];\mathcal{L}(H_1)) \times C(0,\varepsilon_0]$ для фіксованого $\varepsilon_0 > 0$. Можливі випадки, коли породжуюча задача ($\varepsilon = 0$) має розв'язки та не має їх.

1. Породжуюча крайова задача має розв'язки [20]. Шукаємо розв'язок крайової задачі (1), (2) у вигляді ряду $Z(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i Z_i(t)$. Прирівнюючи коефіцієнти при ε^0, маємо

$$Z_0'(t) = AZ_0(t) - Z_0(t)B + \Phi(t), \tag{3}$$

$$lZ_0(\cdot) = \alpha. \tag{4}$$

Загальний розв'язок задачі (3) має вигляд [2]

$$Z_0(t,\overline{C}_0) = e^{tA}\overline{C}_0 e^{-tB} + \int_0^t e^{(t-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-t)B}\,d\tau \tag{5}$$

для всіх $\overline{C}_0 \in \mathcal{L}(H_1)$.

Переконаємось у справедливості формули (5). Диференціюючи, одержуємо

$$Z_0'(t,\overline{C}_0) = Ae^{tA}\overline{C}_0 e^{-tB} - e^{tA}\overline{C}_0 e^{-tB}B + \Phi(t) +$$

$$+ A\int_0^t e^{(t-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-t)B}d\tau - \int_0^t e^{(t-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-t)B}\,d\tau B =$$

$$= AZ_0(t,\overline{C}_0) - Z_0(t,\overline{C}_0)B + \Phi(t),$$

$$\left(\int_0^t e^{(t-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-t)B}d\tau\right)_t' = e^{(t-t)A}\Phi(t)e^{(t-t)B} + \int_0^t \left(e^{(t-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-t)B}\right)_t' d\tau =$$

$$= \Phi(t) + \int_0^t \left(e^{(t-\tau)A}\right)_t' \Phi(\tau)e^{(\tau-t)B}\,d\tau +$$

$$+ \int_0^t e^{(t-\tau)A}\Phi(\tau)\left(e^{(\tau-t)B}\right)_t' d\tau =$$

$$= \Phi(t) + \int_0^t Ae^{(t-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-t)B}d\tau -$$

$$- \int_0^t e^{(t-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-t)B}Bd\tau =$$

$$= \Phi(t) + A\int_0^t e^{(t-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-t)B}d\tau - \int_0^t e^{(t-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-t)B}d\tau B.$$

Підставляючи у крайову умову, отримуємо операторне рівняння

$$Q\overline{C}_0 = g_0,$$

де

$$QC = le^{\cdot A}Ce^{-\cdot B}, \quad g_0 = \alpha - l\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-\cdot)B}d\tau.$$

Розглянемо випадок, коли $R(Q) = \overline{R(Q)}$. У цьому випадку розв'язок існує тоді й тільки тоді, коли виконується умова [11]

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}g_0 = 0,$$

де $\mathcal{P}_{N(Q^*)}$ — ортопроектор на ядро оператора Q^*, а загальний розв'язок має вигляд

$$\overline{C}_0 = Q^+g_0 + \mathcal{P}_{N(Q)}C_0, \quad C_0 \in \mathcal{L}(H_1).$$

Тоді загальний розв'язок задачі (3), (4) буде мати вигляд

$$Z_0(t, C_0) = e^{tA}\mathcal{P}_{N(Q)}C_0e^{-tB} + (G[\Phi,\alpha])(t),$$

де

$$(G[\Phi,\alpha])(t) = e^{tA}Q^+\left\{\alpha - l\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-\cdot)B}\,d\tau\right\}e^{-tB} + \int_0^t e^{(t-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-t)B}\,d\tau.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при ε^1, отримуємо крайову задачу

$$Z_1'(t) = AZ_1(t) - Z_1(t)B + C(t)Z_0(t, C_0), \tag{6}$$

$$lZ_1(\cdot) = l_1Z_0(\cdot, C_0). \tag{7}$$

Загальний розв'язок крайової задачі (6) буде мати вигляд

$$Z_1(t, \overline{C}_1) = e^{tA}\overline{C}_1e^{-tB} + \int_0^t e^{(t-\tau)A}C(\tau)Z_0(\tau, C_0)e^{(\tau-t)B}\,d\tau.$$

Підставляючи в умову (7), отримуємо операторне рівняння

$$Q\overline{C}_1 = g_1,$$

де

$$g_1 = l_1 Z_0(\cdot, C_0) - l \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) Z_0(\tau, C_0) e^{(\tau-\cdot)B}\, d\tau.$$

Умова розв'язності має вигляд

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} g_1 = 0. \tag{8}$$

Вводячи до розгляду оператор

$$B_0 C_0 = \mathcal{P}_{N(Q^*)} l_1 e^{\cdot A} \mathcal{P}_{N(Q)} C_0 e^{-\cdot B} - l \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) e^{\tau A} \mathcal{P}_{N(Q)} C_0 e^{-\tau B} e^{(\tau-\cdot)B}\, d\tau,$$

умову (8) можемо записати у вигляді операторного рівняння

$$B_0 C_0 = -\mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[l_1(G[\Phi, \alpha])(\cdot) - l \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) (G[\Phi, \alpha])(\tau) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau \right]. \tag{9}$$

За виконання умови $\mathcal{P}_{N(B_0^*)} \mathcal{P}_{N(Q^*)} = 0$ рівняння (9) буде мати розв'язок у вигляді

$$C_0 = -B_0^{+} \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[l_1(G[\Phi, \alpha])(\cdot) - l \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) (G[\Phi, \alpha])(\tau) e^{(\tau-\cdot)B}\, d\tau \right]. \tag{10}$$

Тоді

$$\overline{C}_1 = \mathcal{P}_{N(Q)} C_1 + Q^{+} g_1.$$

Підставляючи у загальний розв'язок, одержуємо

$$Z_1(t, C_1) = e^{tA} \mathcal{P}_{N(Q)} C_1 e^{-tB} + e^{tA} Q^{+} g_1 e^{-tB} + \int_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) Z_0(\tau, C_0) e^{(\tau-t)B}\, d\tau,$$

де C_0 визначається з рівності (10). Враховуючи визначення оператора Гріна, загальний розв'язок задачі (6), (7) можна записати у вигляді

$$Z_1(t, C_1) = e^{tA} \mathcal{P}_{N(Q)} C_1 e^{-tB} + (G[C Z_0, l_1 Z_0])(t).$$

Діючи за індукцією, отримуємо при ε^i крайову задачу

$$Z_i'(t) = A Z_i(t) - Z_i(t) B + C(t) Z_{i-1}(t), \tag{11}$$

$$l Z_i(\cdot) = l_1 Z_{i-1}(\cdot). \tag{12}$$

Загальний розв'язок задачі (11) має вигляд

$$Z_i(t,\overline{C}_i) = e^{tA}\overline{C}_i e^{-tB} + \int\limits_0^t e^{(t-\tau)A}C(\tau)Z_{i-1}(\tau,C_{i-1})e^{(\tau-t)B}\,d\tau.$$

Підставляючи у крайову умову (12), отримуємо операторне рівняння

$$Q\overline{C}_i = g_i,$$

де

$$g_i = l_1 Z_{i-1}(\cdot,C_{i-1}) - l\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)Z_{i-1}(\tau,C_{i-1})e^{(\tau-\cdot)B}\,d\tau.$$

Умова розв'язності набирає вигляду

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}g_i = 0.$$

Виходячи з позначень, бачимо, що умова розв'язності еквівалентна операторному рівнянню

$$B_0C_{i-1} = -\mathcal{P}_{N(Q^*)}\Bigg[l_1(G[CZ_{i-2},l_1Z_{i-2}])(\cdot) - \\ - l\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)(G[CZ_{i-2},l_1Z_{i-2}])(\tau)e^{(\tau-\cdot)B}\,d\tau\Bigg]. \tag{13}$$

Тоді

$$C_{i-1} = -B_0^+\mathcal{P}_{N(Q^*)}\Bigg[l_1(G[CZ_{i-2},l_1Z_{i-2}])(\cdot) - \\ - l\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)(G[CZ_{i-2},l_1Z_{i-2}])(\tau)e^{(\tau-\cdot)B}d\tau\Bigg],$$

$$\overline{C}_i = \mathcal{P}_{N(Q)}C_i + Q^+g_i,$$

та загальний розв'язок крайової задачі (11), (12) має вигляд

$$Z_i(t,C_i) = e^{tA}\mathcal{P}_{N(Q)}C_ie^{-tB} + (G[CZ_{i-1},l_1Z_{i-1}])(t).$$

Таким чином, отримали таку теорему.

Теорема 1. *Нехай* $R(Q) = \overline{R(Q)}$, $R(B_0) = \overline{R(B_0)}$ *та виконуються умови*

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} \left\{ \alpha - l \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau \right\} = 0,$$

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)} \mathcal{P}_{N(Q^*)} = 0.$$

Тоді крайова задача (1), (2) має розв'язок у вигляді ряду $Z(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i Z_i(t)$, *коефіцієнти якого знаходяться таким чином:*

$$Z_0(t, C_0) = e^{tA} \mathcal{P}_{N(Q)} C_0 e^{-tB} + (G[\Phi, \alpha])(t), \quad C_0 \in \mathcal{L}(H_1),$$

$$Z_i(t, C_i) = e^{tA} \mathcal{P}_{N(Q)} C_i e^{-tB} + (G[CZ_{i-1}, l_1 Z_{i-1}])(t), \quad C_i \in \mathcal{L}(H_1),$$

де $(G[\cdot,\cdot])(t)$ — *узагальнений оператор Гріна, визначений вище;*

$$C_0 = -B_0^+ \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[l_1(G[\Phi,\alpha])(\cdot) - l \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) (G[\Phi,\alpha])(\tau) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau \right],$$

$$C_i = -B_0^+ \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[l_1(G[CZ_{i-1}, l_1 Z_{i-1}])(\cdot) - l \int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) (G[CZ_{i-1}, l_1 Z_{i-1}])(\tau) e^{(\tau-\cdot)B} d\tau \right].$$

Зауваження 1. Теорія, розроблена в роботі [23], дозволяє досліджувати умови біфуркації розв'язків рівняння Ляпунова й у тому випадку, коли множини значень операторів Q та B_0 не є замкненими, $R(Q) \neq \overline{R(Q)}$, $R(B_0) \neq \overline{R(B_0)}$, тобто оператори Q, B_0 не є нормально розв'язними. В такому випадку побудована вище процедура буде давати узагальнені розв'язки або квазірозв'язки й задача може бути дослідженою повністю. Доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 1.

Зауваження 2. Насамкінець буде наведено приклад крайової задачі з оператором, що не є нормально розв'язним (має незамкнену множину значень).

2. Породжуюча крайова задача не має розв'язків. В цьому випадку розв'язок шукаємо у вигляді ряду

$$Z(t,\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i Z_i(t). \tag{14}$$

Підставимо ряд (14) у крайову задачу (1), (2) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε.

Прирівнюючи коефіцієнти при ε^{-1}, приходимо до однорідної крайової задачі:

$$Z'_{-1}(t) = AZ_{-1}(t) - Z_{-1}(t)B, \tag{15}$$

$$lZ_{-1}(\cdot) = 0. \tag{16}$$

Задача (15), (16) має розв'язок

$$Z_{-1}(t, C_{-1}) = e^{tA}\mathcal{P}_{N(Q)}C_{-1}e^{-tB} \tag{17}$$

для довільного оператора $C_{-1} \in \mathcal{L}(H_1)$, який буде знайдено нижче.

Операторне рівняння (15) має розв'язок

$$Z_{-1}(t, \overline{C}_{-1}) = e^{tA}\overline{C}_{-1}e^{-tB}. \tag{18}$$

Переконаємось у справедливості формули (17):

$$Z_{-1}^{'}(t, \overline{C}_{-1}) = Ae^{tA}\overline{C}_{-1}e^{-tB} - e^{tA}\overline{C}_{-1}e^{-tB}B = Ae^{tA}\overline{C}_{-1}e^{-tB} - e^{tA}\overline{C}_{-1}e^{-tB}B.$$

Підставивши (18) у крайову умову (16), отримаємо операторне рівняння

$$Q\overline{C}_{-1} = 0,$$

де

$$Q\overline{C}_{-1} = le^{\cdot A}\overline{C}_{-1}e^{-\cdot B}.$$

Тоді

$$\overline{C}_{-1} = \mathcal{P}_{N(Q)}C_{-1}. \tag{19}$$

Підставляючи (19) у (18), одержуємо співвідношення (17).

Прирівнюючи коефіцієнти при ε^0, отримуємо крайову задачу для визначення коефіцієнта $Z_0(t)$:

$$Z_0^{'}(t, C_{-1}) = AZ_0(t, C_{-1}) - Z_0(t, C_{-1})B + C(t)Z_{-1}(t, C_{-1}) + \Phi(t), \tag{20}$$

$$lZ_0(\cdot, C_{-1}) = \alpha + l_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1}). \tag{21}$$

Операторне рівняння (20) має розв'язок

$$Z_0(t, \overline{C}_0) = e^{tA}\overline{C}_0e^{-tB} + \int\limits_0^t e^{(t-\tau)A}\left[C(\tau)Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau)\right]e^{(\tau-t)B}\,d\tau. \tag{22}$$

Підставляючи $Z_0(t, \overline{C}_0)$ у крайову умову (21), одержуємо операторне рівняння

$$Q\overline{C}_0 = g_0,$$

де

$$Q\overline{C}_0 = le^{\cdot A}\overline{C}_0e^{-\cdot B},$$

$$g_0 = \alpha + l_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) - l\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\left[C(\tau)Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau)\right]e^{(\tau-\cdot)B}\,d\tau.$$

У випадку, коли $R(Q) = \overline{R(Q)}$, розв'язок існує тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} g_0 = 0,$$

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\alpha + l_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) - l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot - \tau)A} \left[C(\tau) Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau) \right] e^{(\tau - \cdot)B} \, d\tau \right] = 0,$$

або, враховуючи, що $Z_{-1}(t, C_{-1}) = e^{tA} \mathcal{P}_{N(Q)} C_{-1} e^{-tB}$, маємо

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} \Bigg[\alpha + l_1 e^{\cdot A} \mathcal{P}_{N(Q)} C_{-1} e^{-\cdot B} -$$

$$- l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot - \tau)A} \left[C(\tau) e^{\cdot A} \mathcal{P}_{N(Q)} C_{-1} e^{-\cdot B} + \Phi(\tau) \right] e^{(\tau - \cdot)B} \, d\tau \Bigg] = 0,$$

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\alpha + l_1 e^{\cdot A} \mathcal{P}_{N(Q)} C_{-1} e^{-\cdot B} - l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot - \tau)A} C(\tau) e^{\cdot A} \mathcal{P}_{N(Q)} C_{-1} e^{-\cdot B} e^{(\tau - \cdot)B} \, d\tau \right] -$$

$$- \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[-l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot - \tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau - \cdot)B} \, d\tau \right] = 0,$$

$$B_0 C_{-1} = -\mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\alpha - l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot - \tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau - \cdot)B} \, d\tau \right], \tag{23}$$

де оператор B_0 має вигляд

$$B_0 C_{-1} = \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[l_1 e^{\cdot A} \mathcal{P}_{N(Q)} C_{-1} e^{-\cdot B} - l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot - \tau)A} C(\tau) e^{\cdot A} \mathcal{P}_{N(Q)} C_{-1} e^{-\cdot B} e^{(\tau - \cdot)B} \, d\tau \right].$$

Рівняння (23) є розв'язним тоді і лише тоді, коли його права частина задовольняє умову

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)} \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\alpha - l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot - \tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau - \cdot)B} \, d\tau \right] = 0.$$

Остання умова виконується, якщо буде виконано умову

$$\mathcal{P}_{N(B_0^*)} \mathcal{P}_{N(Q^*)} = 0, \tag{24}$$

а операторне рівняння (23) при цьому буде мати хоча б один розв'язок у вигляді

$$C_{-1} = -B_0^+ \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[\alpha - l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} \Phi(\tau) e^{(\tau-\cdot)B} \, d\tau \right]. \tag{25}$$

В цьому випадку розв'язок рівняння $Q\overline{C}_0 = g_0$ буде мати вигляд

$$\overline{C}_0 = Q^+ g_0 + \mathcal{P}_{N(Q)} C_0, \quad C_0 \in \mathcal{L}(H_1),$$

або

$$\overline{C}_0 = Q^+ \Bigg[\alpha + l_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) - $$

$$- l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} \left[C(\tau) Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau) \right] e^{(\tau-\cdot)B} \, d\tau \Bigg] + \mathcal{P}_{N(Q)} C_0,$$

або

$$\overline{C}_0 = Q^+ \{ \alpha + l_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) \} -$$

$$- Q^+ l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} \left[C(\tau) Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau) \right] e^{(\tau-\cdot)B} \, d\tau + \mathcal{P}_{N(Q)} C_0.$$

Таким чином, розв'язок $Z_0(t, C_0)$ можна записати у вигляді

$$Z_0(t, C_0) = e^{tA} \mathcal{P}_{N(Q)} C_0 e^{-tB} + \overline{Z}_0(t) \tag{26}$$

для довільного оператора $C_0 \in \mathcal{L}(H_1)$, який буде знайдено нижче,

$$\overline{Z}_0(t) = e^{tA} \left[Q^+ \{ \alpha + l_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) \} \right] e^{-tB} + \left(G \left[C(\cdot) Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) + \Phi(\cdot) \right] \right)(t), \tag{27}$$

де оператор Гріна має вигляд

$$\left(G \left[C(\cdot) Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) + \Phi(\cdot) \right] \right)(t) = \int\limits_0^t e^{(t-\tau)A} \left[C(\tau) Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau) \right] e^{(\tau-t)B} \, d\tau -$$

$$- e^{tA} \left[Q^+ l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} \left[C(\tau) Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau) \right] e^{(\tau-\cdot)B} \, d\tau \right] e^{-tB}. \tag{28}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при ε^1, отримуємо крайову задачу для визначення коефіцієнта $Z_1(t)$:

$$Z_1'(t) = A Z_1(t) - Z_1(t) B + C(t) Z_0(t, C_0), \tag{29}$$

$$l Z_1(\cdot) = l_1 Z_0(\cdot, C_0). \tag{30}$$

Операторне рівняння (29) має розв'язок

$$Z_1(t,\overline{C}_1) = e^{tA}\overline{C}_1 e^{-tB} + \int\limits_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) Z_0(\tau, C_0) e^{(\tau-t)B}\, d\tau. \tag{31}$$

Підставляючи $Z_1(t)$ в крайову умову (31), одержуємо операторне рівняння

$$Q\overline{C}_1 = g_1,$$

де

$$Q\overline{C}_1 = l e^{\cdot A}\overline{C}_1 e^{-\cdot B},$$

$$g_1 = l_1 Z_0(\cdot, C_0) - l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) Z_0(\tau, C_0) e^{(\tau-\cdot)B}\, d\tau.$$

У випадку, коли $R(Q) = \overline{R(Q)}$, розв'язок існує тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} g_1 = 0,$$

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[l_1 Z_0(\cdot, C_0) - l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} \left[C(\tau) Z_0(\tau, C_0)\right] e^{(\tau-\cdot)B}\, d\tau \right] = 0,$$

або, враховуючи, що $Z_0(t, C_0) = e^{tA}\mathcal{P}_{N(Q)} C_0 e^{-tB} + \overline{Z}_0(t)$, маємо

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} \Bigg[l_1 e^{\cdot A}\mathcal{P}_{N(Q)} C_0 e^{-\cdot B} + l_1 \overline{Z}_0(\cdot) - $$

$$- l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} \left[C(\tau) \left(e^{tA}\mathcal{P}_{N(Q)} C_0 e^{-tB} + \overline{Z}_0(\tau) \right) \right] e^{(\tau-\cdot)B} d\tau \Bigg] = 0,$$

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} \Bigg[l_1 e^{\cdot A}\mathcal{P}_{N(Q)} C_0 e^{-\cdot B} + l_1 \overline{Z}_0(\cdot) - $$

$$- l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} \left[C(\tau) e^{tA}\mathcal{P}_{N(Q)} C_0 e^{-tB} \right] e^{(\tau-\cdot)B}\, d\tau \Bigg] -$$

$$- \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[-l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) \overline{Z}_0(\tau) e^{(\tau-\cdot)B}\, d\tau \right] = 0,$$

$$B_0C_0 = -\mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[l_1\overline{Z}_0(\cdot) - l\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)\overline{Z}_0(\tau)e^{(\tau-\cdot)B}\,d\tau\right], \tag{32}$$

де оператор B_0 має вигляд

$$B_0C_0 = \mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[l_1e^{\cdot A}\mathcal{P}_{N(Q)}C_0e^{-\cdot B} - l\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)e^{\cdot A}\mathcal{P}_{N(Q)}C_0e^{-\cdot B}e^{(\tau-\cdot)B}\,d\tau\right].$$

Рівняння (32) належить до рівнянь вигляду (23) і при тій же умові (24) має хоча б один розв'язок у вигляді

$$C_0 = -B_0^+\mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[l_1\overline{Z}_0(\cdot) - l\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)\overline{Z}_0(\tau)e^{(\tau-\cdot)B}\,d\tau\right]. \tag{33}$$

В цьому випадку розв'язок рівняння $Q\overline{C}_1 = g_1$ буде мати вигляд

$$\overline{C}_1 = Q^+g_1 + \mathcal{P}_{N(Q)}C_1, \quad C_1 \in \mathcal{L}(H_1),$$

або

$$\overline{C}_1 = Q^+\left[l_1Z_0(\cdot, C_0) - l\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\left[C(\tau)Z_0(\tau, C_0)\right]e^{(\tau-\cdot)B}\,d\tau\right] + \mathcal{P}_{N(Q)}C_1,$$

або

$$\overline{C}_1 = Q^+l_1Z_0(\cdot, C_0) - Q^+l\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\left[C(\tau)Z_0(\tau, C_0)\right]e^{(\tau-\cdot)B}\,d\tau + \mathcal{P}_{N(Q)}C_1.$$

Таким чином, розв'язок $Z_1(t)$ можна записати у вигляді

$$Z_1(t, C_1) = e^{tA}\mathcal{P}_{N(Q)}C_1e^{-tB} + \overline{Z}_1(t) \tag{34}$$

для довільного оператора $C_1 \in \mathcal{L}(H_1)$, який буде знайдено нижче,

$$\overline{Z}_1(t) = e^{tA}\left[Q^+l_1Z_0(\cdot, C_0)\right]e^{-tB} + \left(G\left[C(\cdot)Z_0(\cdot, C_0)\right]\right)(t), \tag{35}$$

де оператор Гріна має вигляд

$$\left(G\left[C(\cdot)Z_0(\cdot, C_0)\right]\right)(t) = \int\limits_0^t e^{(t-\tau)A}C(\tau)Z_0(\tau, C_0)e^{(\tau-t)B}\,d\tau -$$

$$- e^{tA}\left[Q^+l\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\left[C(\tau)Z_0(\tau, C_0)\right]e^{(\tau-\cdot)B}\,d\tau\right]e^{-tB}. \tag{36}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при ε^2, отримуємо крайову задачу для визначення коефіцієнта $Z_2(t)$:

$$Z_2^{'}(t) = AZ_2(t) - Z_2(t)B + C(t)Z_1(t, C_1), \tag{37}$$

$$lZ_2(\cdot) = l_1 Z_1(\cdot, C_1). \tag{38}$$

Операторне рівняння (37) має розв'язок

$$Z_2(t) = e^{tA}\overline{C}_2 e^{-tB} + \int\limits_0^t e^{(t-\tau)A} C(\tau) Z_1(\tau, C_1) e^{(\tau-t)B}\, d\tau. \tag{39}$$

Підставляючи $Z_2(t)$ в крайову умову (38), одержуємо операторне рівняння

$$Q\overline{C}_2 = g_2,$$

де

$$Q\overline{C}_2 = le^{\cdot A}\overline{C}_2 e^{-\cdot B}, \quad g_2 = l_1 Z_1(\cdot, C_1) - l\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) Z_1(\tau, C_1) e^{(\tau-\cdot)B}\, d\tau.$$

У випадку, коли $R(Q) = \overline{R(Q)}$, розв'язок існує тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)} g_2 = 0,$$

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[l_1 Z_1(\cdot, C_1) - l\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\left[C(\tau) Z_1(\tau, C_1)\right] e^{(\tau-\cdot)B}\, d\tau\right] = 0,$$

або, враховуючи, що $Z_1(t, C_1) = e^{tA}\mathcal{P}_{N(Q)} C_1 e^{-tB} + \overline{Z}_1(t)$, маємо

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\Bigg[l_1 e^{\cdot A}\mathcal{P}_{N(Q)} C_1 e^{-\cdot B} + l_1\overline{Z}_1(\cdot) -$$

$$- l\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\left[C(\tau)\left(e^{tA}\mathcal{P}_{N(Q)} C_1 e^{-tB} + \overline{Z}_1(\tau)\right)\right] e^{(\tau-\cdot)B}\, d\tau\Bigg] = 0,$$

$$\mathcal{P}_{N(Q^*)}\Bigg[l_1 e^{\cdot A}\mathcal{P}_{N(Q)} C_1 e^{-\cdot B} + l_1\overline{Z}_1(\cdot) -$$

$$- l\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\left[C(\tau) e^{tA}\mathcal{P}_{N(Q)} C_1 e^{-tB}\right] e^{(\tau-\cdot)B}\, d\tau\Bigg] -$$

$$- \mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[-l\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau)\overline{Z}_1(\tau) e^{(\tau-\cdot)B}\, d\tau\right] = 0,$$

$$B_0 C_1 = -\mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[l_1 \overline{Z}_1(\cdot) - l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) \overline{Z}_1(\tau) e^{(\tau-\cdot)B}\, d\tau \right], \tag{40}$$

де оператор B_0 має вигляд

$$B_0 C_1 = \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[l_1 e^{\cdot A} \mathcal{P}_{N(Q)} C_1 e^{-\cdot B} - l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) e^{\cdot A} \mathcal{P}_{N(Q)} C_1 e^{-\cdot B} e^{(\tau-\cdot)B}\, d\tau \right].$$

Рівняння (40) належить до рівнянь вигляду (23) і при тій же умові (24) має хоча б один розв'язок у вигляді

$$C_1 = -B_0^+ \mathcal{P}_{N(Q^*)} \left[l_1 \overline{Z}_1(\cdot) - l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} C(\tau) \overline{Z}_1(\tau) e^{(\tau-\cdot)B}\, d\tau \right]. \tag{41}$$

В цьому випадку розв'язок рівняння $Q\overline{C}_2 = g_2$ буде мати вигляд

$$\overline{C}_2 = Q^+ g_2 + \mathcal{P}_{N(Q)} C_2, \quad C_2 \in \mathcal{L}(H_1),$$

або

$$\overline{C}_2 = Q^+ \left[l_1 Z_1(\cdot, C_1) - l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} \left[C(\tau) Z_1(\tau, C_1) \right] e^{(\tau-\cdot)B}\, d\tau \right] + \mathcal{P}_{N(Q)} C_2,$$

або

$$\overline{C}_2 = Q^+ l_1 Z_1(\cdot, C_0) - Q^+ l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} \left[C(\tau) Z_1(\tau, C_1) \right] e^{(\tau-\cdot)B}\, d\tau + \mathcal{P}_{N(Q)} C_2.$$

Таким чином, розв'язок $Z_2(t)$ можна записати у вигляді

$$Z_2(t, C_2) = e^{tA} \mathcal{P}_{N(Q)} C_2 e^{-tB} + \overline{Z}_2(t) \tag{42}$$

для довільного оператора $C_2 \in \mathcal{L}(H_1)$, який буде знайдено нижче,

$$\overline{Z}_2(t) = e^{tA} \left[Q^+ l_1 Z_1(\cdot, C_1) \right] e^{-tB} + \left(G \left[C(\cdot) Z_1(\cdot, C_1) \right] \right)(t), \tag{43}$$

де оператор Гріна має вигляд

$$\left(G \left[C(\cdot) Z_1(\cdot, C_1) \right] \right)(t) = \int\limits_0^{t} e^{(t-\tau)A} C(\tau) Z_1(\tau, C_1) e^{(\tau-t)B}\, d\tau -$$

$$- e^{tA} \left[Q^+ l \int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A} \left[C(\tau) Z_1(\tau, C_1) \right] e^{(\tau-\cdot)B}\, d\tau \right] e^{-tB}. \tag{44}$$

Діючи за індукцією, для визначення коефіцієнта $x_i(t)$ при ε^i ряду (14) приходимо до крайової задачі

$$Z_i'(t) = AZ_i(t) - Z_i(t)B + C(t)Z_{i-1}(t, C_{i-1}), \tag{45}$$

$$lZ_i(\cdot) = l_1 Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1}). \tag{46}$$

При тій же умові (24) крайова задача (45) (46) має розв'язок

$$Z_i(t, C_i) = e^{tA}\mathcal{P}_{N(Q)}C_i e^{-tB} + \overline{Z}_i(t), \tag{47}$$

де частинний розв'язок $\overline{Z}_i(t)$ крайової задачі (45), (46) має вигляд

$$\overline{Z}_i(t) = e^{tA}\left[Q^+ l_1 Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})\right] e^{-tB} + \left(G\left[C(\cdot)Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})\right]\right)(t). \tag{48}$$

Довільний оператор $C_i \in \mathcal{L}(H_1)$ знаходиться за формулою

$$C_i = -B_0^+\mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[l_1\overline{Z}_i(\cdot) - l\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)\overline{Z}_i(\tau)e^{(\tau-\cdot)B}\,d\tau\right]. \tag{49}$$

$\left(G\left[C(\cdot)Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})\right]\right)(t)$ — оператор Гріна неоднорідної крайової задачі (45), (46), який діє на оператор $C(\cdot)Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1}) \in C([a;b];H_1)$ так:

$$\left(G\left[C(\cdot)Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})\right]\right)(t) = \int\limits_0^t e^{(t-\tau)A}C(\tau)Z_{i-1}(\tau, C_{i-1})e^{(\tau-t)B}\,d\tau -$$

$$- e^{tA}\left[Q^+ l\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\left[C(\tau)Z_{i-1}(\tau, C_{i-1})\right]e^{(\tau-\cdot)B}\,d\tau\right]e^{-tB}. \tag{50}$$

Таким чином, маємо ітераційний алгоритм побудови розв'язку крайової задачі (45), (46):

$$Z_i(t, C_i) = \begin{cases} e^{tA}\mathcal{P}_{N(Q)}C_i e^{-tB}, & \text{якщо} \quad i = -1, \\ e^{tA}\mathcal{P}_{N(Q)}C_i e^{-tB} + \overline{Z}_i(t), & \text{якщо} \quad i = \overline{0, \infty}, \end{cases} \tag{51}$$

$$C_i = \begin{cases} -B_0^+\mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[\alpha - l\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\Phi(\tau)e^{(\tau-\cdot)B}\,d\tau\right], & \text{якщо} \quad i = -1, \\ -B_0^+\mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[l_1\overline{Z}_i(\cdot) - l\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)\overline{Z}_i(\tau)e^{(\tau-\cdot)B}\,d\tau\right], & \text{якщо} \quad i = \overline{0, \infty}, \end{cases} \tag{52}$$

$$\overline{Z}_i(t) = \begin{cases} e^{tA}\left[Q^+\left(\alpha + l_1 Z_{-1}(\cdot, C_{-1})\right)\right]e^{-tB} + \\ \quad + \left(G\left[C(\cdot)Z_{-1}(\cdot, C_{-1}) + \Phi(\cdot)\right]\right)(t), \quad \text{якщо} \quad i = 0, \\ \\ e^{tA}\left[Q^+ l_1 Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})\right]e^{-tB} + \\ \quad + \left(G\left[C(\cdot)Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})\right]\right)(t), \qquad \text{якщо} \quad i = \overline{1,\infty}, \end{cases} \tag{53}$$

$$\left(G\left[C(\cdot)Z_{i-1}(\cdot, C_{i-1})\right]\right)(t) =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)A}\left[C(\tau)Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau)\right]e^{(\tau-t)B}\,d\tau - \\ \quad \displaystyle -e^{tA}\left[Q^+ l\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\left[C(\tau)Z_{-1}(\tau, C_{-1}) + \Phi(\tau)\right]e^{(\tau-\cdot)B}\,d\tau\right]e^{-tB}, \quad \text{якщо} \;\; i = 0, \\ \\ \displaystyle\int_0^t e^{(t-\tau)A}C(\tau)Z_{i-1}(\tau, C_{i-1})e^{(\tau-t)B}\,d\tau - \\ \quad \displaystyle -e^{tA}\left[Q^+ l\int_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}\left[C(\tau)Z_{i-1}(\tau, C_{i-1})\right]e^{(\tau-\cdot)B}\,d\tau\right]e^{-tB}, \qquad \text{якщо} \;\; i = \overline{1,\infty}. \end{cases} \tag{54}$$

Отже, критерій розв'язності крайової задачі (1), (2) у гільбертовому просторі можна сформулювати таким чином.

Теорема 2. *Нехай оператор $QC_i = le^{\cdot A}C_i e^{-\cdot B}$, що діє з гільбертового простору H_1 у гільбертовий простір H_2, має псевдообернений і породжуюча крайова задача, отримана із (1), (2) при $\varepsilon = 0$, при довільних неоднорідностях $\Phi(t) \in C([a;b], H_1)$ та $\alpha \in H_2$ не має розв'язків. Тоді якщо виконуються умови:*

1) оператор B_0 має псевдообернений оператор;

2) $\mathcal{P}_{N(B_0^*)}\mathcal{P}_{N(Q^*)} = 0$,

то збурена крайова задача (1), (2) при довільних неоднорідностях $\Phi(t) \in C([a;b], H_1)$ та $\alpha \in H_2$ має хоча б один розв'язок у вигляді ряду

$$Z(t) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i Z_i(t),$$

абсолютно збіжного при довільних фіксованих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, оператор B_0 має вигляд

$$B_0 C_0 = \mathcal{P}_{N(Q^*)}\left[l_1 e^{\cdot A}\mathcal{P}_{N(Q)}C_0 e^{-\cdot B} - l\int\limits_0^{\cdot} e^{(\cdot-\tau)A}C(\tau)e^{\cdot A}\mathcal{P}_{N(Q)}C_0 e^{-\cdot B}e^{(\tau-\cdot)B}\,d\tau\right],$$

а коефіцієнти ряду визначаються ітераційним алгоритмом (51) – (54).

Приклад. Розглянемо зліченну систему рівнянь із матрицями

$$A = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right), \quad B = \operatorname{diag}(1, 1, 1, \ldots)$$

зі значеннями у просторі l_2. Матрична функція $Z(t)$ належить $L_2([0;1];l_2\times l_2)$, тобто

$$Z(t)=(z_{ij}(t))_{i,j=1}^{+\infty}\colon \|Z\|^2=\int\limits_0^1\|z_{ij}(t)\|^2_{l_2\times l_2}\,dt=\sum_{i,j=1}^{+\infty}\int\limits_0^1|z_{ij}(t)|^2\,dt<\infty,$$

а крайова умова має вигляд

$$lZ(\cdot)=\left(0,z_{22}(0),\frac{z_{33}(0)}{2},\ldots,\frac{z_{ii}(0)}{i-1},\ldots\right)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\ldots)\in l_2.$$

Тоді загальний розв'язок системи буде мати вигляд

$$Z(t,C)=K_0^tC=e^{-\frac{t}{2}}(c_{ij})_{i,j=1}^{+\infty},$$

де

$$\sum_{i,j=1}^{+\infty}c_{ij}^2<\infty.$$

Підставляючи в крайову умову, переконуємося, що розв'язність крайової задачі еквівалентна розв'язності рівняння

$$lZ(\cdot)=QC=\left(0,c_{22},\frac{c_{33}}{2},\ldots\right)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)\in l_2,$$

де $Q\colon l_2\times l_2\to l_2$.

Покажемо, що оператор Q має незамкнену множину значень. Для цього достатньо зауважити, що

$$l_2\ni\left(0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right)=\lim_{k\to\infty}\left(0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{k},0,0,\ldots\right),$$

$$\left(0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{k},0,0,\ldots\right)=QC^k,$$

де в якості послідовності C^k вибрано таку:

$$C^k=\operatorname{diag}(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k+1},0,0,\ldots)\in l_2\times l_2,$$

та для $C=\operatorname{diag}(1,1,\ldots,1,\ldots)$

$$QC=\left(0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{k},\ldots\right).$$

Але C не належить простору $l_2\times l_2$, оскільки

$$\|C\|=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n 1\to\infty.$$

Таким чином, маємо послідовність C^k таку, що $QC^k = y^k = \left(0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, 0, 0, \ldots\right) \in$ $\in l_2$ й $y^k \to y = \left(0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, \ldots\right)$ у просторі l_2, коли $k \to \infty$, але $y = QC$, де C не належить простору $l_2 \times l_2$. Отже, оператор Q має незамкнену множину значень. Далі, після факторизації [23] можна вважати, що маємо оператор $\mathcal{Q}$, який діє за правилом

$$\mathcal{Q}C = \left(c_{11}, \frac{c_{22}}{2}, \ldots, \frac{c_{nn}}{n}, \ldots\right).$$

Поповнивши простір $l_2 \times l_2$ за нормою

$$\|C\|_{\overline{H}} = \|\mathcal{Q}C\|_{l_2} = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{c_{ii}}{i}\right)^2,$$

отримаємо простір $\overline{H} \supset l_2 \times l_2$, в якому цей оператор буде нормально розв'язним. В цьому випадку узагальнений псевдообернений оператор $\overline{Q}^+ : l_2 \to \overline{H}$ має вигляд

$$\overline{Q}^+ \alpha = \overline{Q}^+(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) = \operatorname{diag}(0, \alpha_2, 2\alpha_3, \ldots, (n-1)\alpha_n, \ldots).$$

Задача буде розв'язною тоді й тільки тоді, коли $\alpha_1 = 0$. Тоді один із сильних узагальнених розв'язків крайової задачі буде мати вигляд

$$Z(t) = K_0^t \overline{Q}^+ \alpha = e^{-\frac{t}{2}} \operatorname{diag}(0, \alpha_2, 2\alpha_3, \ldots, (n-1)\alpha_n, \ldots)$$

у просторі $L_2([0;1]; \overline{H})$.

Зауваження 3. Аналогічна задача у випадку, коли оператори A, B є необмеженими або несталими $(A(t), B(t))$ [21], вимагає окремого дослідження.

Література

1. *Арнольд В. И.* Теория катастроф. — М.: Наука, 1990. — 129 с.
2. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. — 368 с.
3. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 527 с.
4. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
5. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
6. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 104 с.
7. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. — М.: Мир, 1976. — 454 с.
8. *Чуйко С. М.* Обобщенный оператор Грина нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения // Изв. вузов. Математика. — 2016. — № 8. — С. 74–83.
9. *Bamieh B., Dahleh M.* Energy amplification in channel flows with stochastic excitation // Phys. Fluids. — 2001. — **13**. — P. 3258–3269.
10. *Bhatia Rajendra.* A note on the Lyapunov equation // Linear Algebra and Appl. — 1997. — **259**. — P. 71–76.
11. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — 2 nd. ed. — De Gruyter, 2016. — 296 p.

12. *Boichuk O. A., Krivosheya S. A.* Criterion for the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukr. Mat. Zh. — 1998. — **50**, № 8. — P. 1021 – 1026 (English transl.: Ukr. Math. J. — 1998. — **50**, № 8. — P. 1162 – 1169).

13. *Bondarev A. N., Laptinskii V. N.* Multipoint boundary value problem for the Lyapunov equation in the case of strong degeneration of the boundary conditions // Different. Equat. — 2011. — **47**, № 6. — P. 778 – 786.

14. *Chuiko S. M.* On the solution of matrix Lyapunov equations // Visn. Kharkiv. Univ. Ser. Mat., Prikl. Mat., Mekh. — 2014. — № 1120. — P. 85 – 94.

15. *Datko R.* Extending a theorem of a A. M. Lyapunov to Hilbert space // J. Math. Anal. and Appl. — 1970. — **32**. — P. 610 – 616.

16. *Druskin V., Knizhnerman L., Simoncini V.* Analysis of the rational Krylov subspace and ADI methods for solving the Lyapunov equation // SIAM J. Numer. Anal. — 2011. — **49**, № 5. — P. 1875 – 1898.

17. *Duncana T. E., Maslowski B., Pasik-Duncana B.* Stochastic equations in Hilbert space with a multiplicative fractional Gaussian noise // Stochast. Process. and Appl. — 2005. — **115**. — P. 1357 – 1383.

18. *Kielhöfer H.* On the Lyapunov stability of stationary solutions of semilinear parabolic differential equations // J. Different. Equat. — 1976. — **22**. — P. 193 – 208.

19. *Man'ko V. I., Vilela Mendes R.* Lyapunov exponent in quantum mechanics. A phase-space approach // Physica D. — 2000. — **145**. — P. 330 – 348.

20. *Panasenko E. V., Pokutnyi O. O.* Boundary-value problems for the Lyapunov equation in Banach spaces // J. Math. Sci. — 2017. — **223**. — P. 1 – 7.

21. *Панасенко Є. В., Покутний О. О.* Крайові задачі для диференціальних рівнянь у банаховому просторі з необмеженим оператором у лівій частині // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 4. — С. 518 – 526 (English transl.: J. Math. Sci. — 2014. — **203**, № 3. — P. 366 – 374).

22. *Pazy A.* On the applicability of Lyapunov's theorem in Hilbert space // SIAM J. Math. Anal. — 1972. — **3**, № 2. — P. 291 – 294.

23. *Pokutnyi O. O.* Generalized inverse operator in Fréchet, Banach, and Hilbert spaces // Visn. Kyiv. Nats. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauk. — 2013. — № 4. — P. 158 – 161.

24. *Maci Przyluski K.* The Lyapunov equation and the problem of stability for linear bounded discrete-time systems in Hilbert space // Appl. Math. and Optim. — 1980. — **6**. — P. 97 – 112.

25. *Rosen I. G., Wang C.* A multilevel technique for the approximate solution of operator Lyapunov and algebraic riccati equations // SIAM J. Numer. Anal. — 1995. — **32**, № 2. — P. 514 – 541.

26. *Sather D.* Branching of solutions of an equation in Hilbert space // Arch. Ration. Mech. and. Anal. — 1970. — **36**. — P. 47 – 64.

27. *Vu Ngoc Phat, Tran Tin Kiet.* On the Lyapunov equation in Banach spaces and applications to control problems // Int. J. Math. and Math. Sci. — 2002. — **29**, № 3. — P. 155 – 166.

28. *Wen John Ting-Yung, Balas Mark J.* Robust adaptive control in Hilbert space // J. Math. Anal. and Appl. — 1989. — **143**. — P. 1 – 26.

Одержано 02.05.17,
після доопрацювання — 13.07.17