УДК 517.9

ПРО ОБМЕЖЕНІ НА ВСІЙ ДІЙСНІЙ ОСІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ І ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

І. В. Бецко, Г. П. Пелюх

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна
e-mail: betskoiv@mail.ru
grygor@imath.kiev.ua

We study the structure of a solution set of a certain class of nonlinear functional-difference equations.

Исследована структура множества непрерывных решений одного класса систем нелинейных функционально-разностных уравнений.

Дослідження питань існування неперервних при $t \in \mathbb{R}$ розв'язків нелінійних функціонально-різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)), \tag{1}$$

де A, q — деякі дійсні сталі, $t \in \mathbb{R}$, $F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, були основною метою багатьох математиків (див. [1–5] і наведену там бібліографію). Особливо детально ці питання досліджено для лінійних функціонально-різницевих рівнянь [6–8]. Основною метою даної роботи є встановлення достатніх умов існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}$ розв'язків рівняння (1) і розробка методу їх побудови.

Спочатку розглянемо питання про існування неперервного обмеженого при $t \in \mathbb{R}$ розв'язку рівняння (1). Має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) функція $F(t,x)$ є неперервною при всіх $t, x \in \mathbb{R}$ і задовольняє умову

$$|F(t,\bar{x}) - F(t,\bar{\bar{x}})| \le L|\bar{x} - \bar{\bar{x}}|,$$

де $L = \mathrm{const} > 0$, $t, \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in \mathbb{R}$;

2) $\sup\limits_t |F(t,0)| = M < \infty$;

3) $0 < a = |A| < 1$, $0 < a + L = \Delta < 1$, $q \ne 0$.

Тоді рівняння (1) має єдиний неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\gamma(t)$.

Доведення. Побудуємо послідовність функцій

$$\begin{aligned} &x_0(t+1) = F(t,0),\\ &x_i(t+1) = Ax_{i-1}(t) + F(t, x_0(qt) + \ldots\\ &\qquad\qquad \ldots + x_{i-1}(qt)) - F(t, x_0(qt) + \ldots + x_{i-2}(qt)), \quad i = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{2}$$

© І. В. Бецко, Г. П. Пелюх, 2017

де $x_{-1}(t) \equiv 0$, і покажемо, що виконуються оцінки

$$|x_0(t)| \le M, \quad |x_i(t)| \le M\Delta^i, \quad i \ge 1. \tag{3}$$

Дійсно, оскільки із (2) випливають співвідношення

$$\begin{aligned} x_0(t) &= F(t-1,0),\\ x_i(t) &= Ax_{i-1}(t-1) + F(t-1, x_0(q(t-1)) + \ldots + x_{i-1}(q(t-1))) -\\ &\quad - F(t-1, x_0(q(t-1)) + \ldots + x_{i-2}(q(t-1))), \quad i \ge 1,\\ x_{-1}(t) &\equiv 0, \end{aligned}$$

то з огляду на умови теореми послідовно знаходимо

$$\begin{aligned} |x_0(t)| &= |F(t-1,0)| \le M,\\ |x_1(t)| &\le |A||x_0(t-1)| + |F(t-1, x_0(q(t-1))) - F(t-1,0)| \le\\ &\le aM + LM \le M(a+L) = M\Delta,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ |x_i(t)| &\le |A||x_{i-1}(t-1)| + |F(t-1, x_0(q(t-1)) + \ldots + x_{i-1}(q(t-1))) -\\ &\quad - F(t-1, x_0(q(t-1)) + \ldots + x_{i-2}(q(t-1)))| \le\\ &\le aM\Delta^{i-1} + LM\Delta^{i-1} \le M\Delta^{i-1}(a+L) = M\Delta^i. \end{aligned}$$

Таким чином, оцінки (3) виконуються при всіх $t \in \mathbb{R}$ і $i \ge 0$. Тоді безпосередньо із (3) випливає, що ряд

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t)$$

рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ до деякої неперервної функції $\gamma(t)$, яка задовольняє умову

$$|\gamma(t)| \le \frac{M}{1-\Delta}.$$

Більш того, покажемо, що функція $\gamma(t)$ є розв'язком рівняння (1). Дійсно, згідно з (2) для цього достатньо показати, що ряд

$$F(t,0) + \sum_{i=0}^{\infty} \left[F(t, x_0(qt) + \ldots + x_i(qt)) - F(t, x_0(qt) + \ldots + x_{i-1}(qt))\right],$$

де $x_{-1}(t) \equiv 0$, рівномірно збігається при всіх $t \in \mathbb{R}$ і його сумою є функція

$$F\left(t, \sum_{i=0}^{\infty} x_i(qt)\right).$$

Для цього, в свою чергу, достатньо довести, що при всіх $t \in \mathbb{R}$ виконується співвідношення

$$\lim_{m\to\infty} F\left(t, \sum_{i=0}^{m} x_i(qt)\right) = F\left(t, \sum_{i=o}^{\infty} x_i(qt)\right). \tag{4}$$

Дійсно, з огляду на (3) для довільного як завгодно малого $\epsilon > 0$ можна вказати таке натуральне $\mathbb{N}$, що при $m \geq \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\frac{ML}{1-\Delta}\,\Delta^{m+1} \leq \epsilon.$$

Тоді, беручи до уваги умову 1 теореми, при всіх $m \geq \mathbb{N}$ отримуємо

$$\left| F\left(t, \sum_{i=0}^{\infty} x_i(qt)\right) - F\left(t, \sum_{i=0}^{m} x_i(qt)\right)\right| \leq L \sum_{i=m+1}^{\infty} |x_i(qt)| \leq$$

$$\leq LM\Delta^{m+1} \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i \leq M\Delta^{m+1} \frac{L}{1-\Delta} \leq \epsilon.$$

Таким чином, при всіх $t \in \mathbb{R}$ співвідношення (4) має місце. Цим самим доведено, що при всіх $t \in \mathbb{R}$ виконується тотожність

$$F\left(t, \sum_{i=0}^{\infty} x_i(qt)\right) = F(t,0) + [F(t, x_0(qt)) - F(t,0)] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \left[F(t, x_0(qt) + \ldots + x_i(qt)) - F(t, x_0(qt) + \ldots + x_{i-1}(qt))\right].$$

Нехай існує ще один неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\bar{\gamma}(t)$ рівняння (1). Тоді виконується співвідношення $\|\gamma(t) - \bar{\gamma}(t)\| = 0$, де $\|\gamma(t)\| = \sup\limits_t |\gamma(t)|$, що можливо лише при $\gamma = \bar{\gamma}$. Отримана суперечність доводить єдиність розв'язку.

Виконуючи в (1) заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \gamma(t), \tag{5}$$

де $\gamma(t)$ — побудований вище розв'язок рівняння (1), отримуємо рівняння для $y(t)$:

$$y(t+1) = Ay(t) + \tilde{F}(t, y(qt)), \tag{6}$$

де $\tilde{F}(t, y(qt)) = F(t, y(qt) + \gamma(qt)) - F(t, \gamma(qt))$, $\tilde{F}(t,0) \equiv 0$, яке, очевидно, має розв'язок $y(t) \equiv 0$.

Покажемо, що при $t \in \mathbb{R}^+$ для рівняння (6) справедливою є така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1–3 і* $A > 0$, $q > 1$. *Тоді рівняння (6) має сім'ю неперервних обмежених при* $t \in \mathbb{R}^+$ *розв'язків, що залежать від довільної неперервної 1-періодичної функції.*

Доведення. Побудуємо послідовність рівнянь

$$
\begin{aligned}
y_i(t+1) &= Ay_i(t) + \tilde{F}(t, y_0(qt) + \ldots + y_{i-1}(qt)) - \\
&\qquad - \tilde{F}(t, y_0(qt) + \ldots + y_{i-2}(qt)), \quad i \geq 1, \\
y_0(t) &= A^t \omega(t),
\end{aligned} \tag{7}
$$

де $\omega(t)$ — довільна неперервна 1-періодична функція, $y_{-1}(t) \equiv 0$, і доведемо, що ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) \tag{8}$$

рівномірно збігається при $t \geq 0$ до деякої неперервної функції $y(t)$, яка є розв'язком рівняння (6).

Легко переконатися, що рівняння (7) мають формальні розв'язки

$$
\begin{aligned}
y_i(t) &= -\sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} [\tilde{F}(t+j, y_0(q(t+j)) + \ldots + y_{i-1}(q(t+j))) - \\
&\qquad - \tilde{F}(t+j, y_0(q(t+j)) + \ldots + y_{i-2}(q(t+j)))], \quad i = 1, 2, \ldots, \\
y_0(t) &= A^t \omega(t).
\end{aligned} \tag{9}
$$

Покажемо, що ряди (9) рівномірно збігаються при $t \geq 0$ і виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \leq M\Delta^i A^t, \quad i \geq 0, \tag{10}$$

де $\Delta = \dfrac{L}{A - A^q} < 1$.

Дійсно, оцінка (10) виконується при $i = 0$. Тоді на підставі (9) і умов 1–3 маємо

$$
\begin{aligned}
|y_1(t)| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} |F(t+j, y_0(q(t+j)) + \gamma(q(t+j))) - F(t+j, \gamma(q(t+j)))| \leq \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} L |y_0(q(t+j))| \leq L \sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} M A^{q(t+j)} \leq MLA^{qt-1} \sum_{j=0}^{\infty} A^{(q-1)j} \leq \\
&\leq MLA^{qt-1} \frac{1}{1 - A^{q-1}} \leq ML \frac{A^{-1}}{1 - A^{q-1}} A^{qt} \leq M\Delta A^t.
\end{aligned}
$$

Нехай оцінки (10) встановлено при $i = 1, 2, \ldots, k$. Тоді з огляду на (9) і умови 1–3 маємо

$$|y_{k+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} |\tilde{F}(t+j, y_0(q(t+j)) + \ldots + y_k(q(t+j)))-$$

$$- \tilde{F}(t+j, y_0(q(t+j)) + \ldots + y_{k-1}(q(t+j)))| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} L |y_k(q(t+j))| \leq \sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} LM\Delta^k A^{q(t+j)} \leq$$

$$\leq ML\Delta^k A^{-1} A^{qt} \sum_{j=0}^{\infty} A^{(q-1)j} \leq ML\Delta^k A^{qt} \frac{A^{-1}}{1 - A^{q-1}} \leq M\Delta^{k+1} A^t.$$

Отже, оцінки (10) мають місце при всіх $i \geq 0$. Звідси безпосередньо випливає, що ряд (8) рівномірно збігається при всіх $t \geq 0$ до деякої неперервної при $t \geq 0$ функції $y(t)$, яка є розв'язком рівняння (6) і такою, що виконується нерівність

$$y(t) \leq \frac{M}{1 - \Delta} A^t.$$

Для цього, як і при доведенні теореми 1, достатньо показати, що виконується співвідношення

$$\tilde{F}\left(t, \sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt)\right) \equiv \tilde{F}(t, 0) + \left[\tilde{F}(t, y_0(qt)) - \tilde{F}(t, 0)\right] + \ldots .$$

Теорема 3. *Нехай виконуються умови 1–3 і* $A < 0$, $q > 1$. *Тоді рівняння (6) має сім'ю неперервних обмежених при* $t \in \mathbb{R}^+$ *розв'язків, що залежать від довільної неперервної функції* $\omega(t)$, *яка задовольняє умову* $\omega(t+1) = -\omega(t)$.

Якщо побудувати послідовність рівнянь

$$\begin{gathered} y_i(t+1) = Ay_i(t) + \tilde{F}(t, y_0(qt) + \ldots + y_{i-1}(qt)) - \tilde{F}(t, y_0(qt) + \ldots + y_{i-2}(qt)), \quad i \geq 1, \\ y_0(t) = |A|^t \omega(t), \end{gathered} \tag{11}$$

де $\omega(t)$ — довільна неперервна функція, що задовольняє умову $\omega(t+1) = -\omega(t)$, $y_{-1} \equiv 0$, то, як і при доведенні теореми 2, можна показати, що ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t)$$

рівномірно збігається при $t \geq 0$ до деякої неперервної функції $y(t)$, яка є розв'язком рівняння (6).

При доведенні теореми 1 припускалось виконання умови 3, яка досить помітно обмежує її загальність. Внаслідок цього виникає природне питання: чи можна довести аналогічне твердження у випадку, коли ця умова не виконується? Відповідь дає наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови:*

1) функція $F(t,x)$ є неперервною при всіх $t, x \in \mathbb{R}$ і задовольняє умову

$$\left|F\left(t,x'\right)-F\left(t,x''\right)\right| \le L\left|x'-x''\right|,$$

де $L = \mathrm{const} > 0,\ t, x', x'' \in \mathbb{R}$;

2) $\sup\limits_t |F(t,0)| = M < \infty$;

3) $|A| > 1,\ |A^{-1}| < 1,\ \dfrac{L|A^{-1}|}{1-|A^{-1}|} = \Theta < 1,\ q \ne 0.$

Тоді рівняння (1) має єдиний неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\chi(t)$.

Доведення. Розглянемо послідовність рівнянь

$$\begin{aligned} x_0(t+1) &= Ax_0(t) + F(t,0), \\ x_i(t+1) &= Ax_i(t) + F(t, x_0(qt) + \ldots + x_{i-1}(qt)) - \\ &\quad - F(t, x_0(qt) + \ldots + x_{i-2}(qt)), \quad i \ge 1, \end{aligned} \tag{12}$$

де $x_{-1}(t) = 0$, і покажемо, що вони мають неперервні обмежені при $t \in \mathbb{R}$ розв'язки, які задовольняють умови

$$|x_i(t)| \le \tilde{M}\Theta^i, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{13}$$

де $\tilde{M} = M\,\dfrac{|A^{-1}|}{1-|A^{-1}|}$.

Дійсно, легко переконатися, що рівняння (12) мають формальні розв'язки

$$\begin{aligned} x_0(t) &= -\sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} F(t+j, 0), \\ x_i(t) &= -\sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)} [F(t+j, x_0(q(t+j)) + \ldots + x_{i-1}(q(t+j))) - \\ &\quad - \tilde{F}(t+j, x_0(q(t+j)) + \ldots + x_{i-2}(q(t+j)))], \quad i \ge 1, \end{aligned} \tag{14}$$

де $x_{-1}(t) = 0$. Беручи до уваги умови теореми, знаходимо

$$|x_0(t)| \le \left|A^{-1}\right| M \sum_{j=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^j \le M\frac{|A^{-1}|}{1-|A^{-1}|} = \tilde{M}.$$

Отже, оцінка (13) виконується при $i = 0$. Розмірковуючи за індукцією, припускаємо, що вона виконується при $i = 0, 1, \ldots, k$. Тоді з огляду на (14) і умови теореми отримуємо

$$|x_{k+1}(t)| \le \left|A^{-1}\right| \sum_{j=0}^{\infty} \left|A^{-j}[F(t+j, x_0(q(t+j)) + \ldots + x_k(q(t+j))) - \right.$$

$$\left. - F(t+j, x_0(q(t+j)) + \ldots + x_{k-1}(q(t+j)))]\right| \le$$

$$\le \left|A^{-1}\right| L \sum_{j=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^j |x_k(q(t+j))| \le \left|A^{-1}\right| L\tilde{M}\Theta^k \sum_{j=0}^{\infty} \left|A^{-1}\right|^j \le$$

$$\le \tilde{M}\Theta^k \frac{L|A^{-1}|}{1 - |A^{-1}|} \le \tilde{M}\Theta^{k+1}.$$

Таким чином, оцінки (13) виконуються при всіх $i \ge 0$ і $t \in \mathbb{R}$.

Безпосередньо із (13) випливає, що ряд

$$\chi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) \tag{15}$$

рівномірно збігається до деякої неперервної обмеженої при $t \in \mathbb{R}$ функції $\chi(t)$, яка є розв'язком рівняння (1) (доведення цього твердження є аналогічним проведеному при доведенні теореми 1).

Виконуючи в (1) заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \chi(t),$$

де $\chi(t)$ — неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок (15), отримуємо рівняння

$$y(t+1) = Ay(t) + \bar{F}(t, y(qt)), \tag{16}$$

де $\bar{F}(t, y(qt)) = F(t, y(qt) + \chi(qt)) - F(t, \chi(qt))$, яке має єдиний неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $y(t) \equiv 0$. Для рівняння (15) справедливою є така теорема.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови 1–3 теореми 4 і $A > 0$, $q > 1$. Тоді рівняння (15) має сім'ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^-$ розв'язків, що залежать від довільної неперервної 1-періодичної функції.*

Доведення. Побудуємо послідовність рівнянь

$$\begin{aligned} &y_0(t+1) = Ay_0(t), \\ &y_i(t+1) = Ay_i(t) + \bar{F}(t, y_0(qt) + \ldots + y_{i-1}(qt)) - \\ &\qquad - \bar{F}(t, y_0(qt) + \ldots + y_{i-2}(qt)), \quad i \ge 1, \end{aligned} \tag{17}$$

де $y_{-1}(t) = 0$, і доведемо, що вони мають неперервні обмежені при $t \in \mathbb{R}^-$ розв'язки $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, такі, що ряд

$$\chi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) \tag{18}$$

рівномірно збігається при $t \in \mathbb{R}^-$ до деякої неперервної обмеженої функції $\bar{\chi}(t)$, яка є розв'язком рівняння (16).

Легко безпосередньо переконатися, що рівняння (17) мають формальні розв'язки

$$
\begin{aligned}
y_0(t) &= A^t \omega(t), \\
y_i(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} A^{j-1} [\bar{F}(t-j, y_0(q(t-j)) + \ldots + y_{i-1}(q(t-j))) - \\
&\quad - \bar{F}(t-j, y_0(q(t-j)) + \ldots + y_{i-2}(q(t-j)))], \quad i = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

де $\omega(t)$ — довільна неперервна 1-періодична функція.

Покажемо, що при всіх $i \geq 0$ і $t \in \mathbb{R}^-$ виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \leq \bar{M} \Theta^i A^t, \tag{20}$$

де $\Theta = \dfrac{L}{A^q - A}$.

Дійсно, оцінка (20) виконується при $i = 0$. Тоді, беручи до уваги (19) і умови теореми, послідовно отримуємо

$$
\begin{aligned}
|y_1(t)| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} A^{(j-1)} |\bar{F}(t-j, y_0(q(t-j)))| = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} A^{(j-1)} |F(t-j, y_0(q(t-j)) + \bar{\chi}(q(t-j))) - F(t-j, \bar{\chi}(q(t-j)))| \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} A^{(j-1)} L |y_0(q(t-j))| \leq L\bar{M} \sum_{j=1}^{\infty} A^{j-1} A^{q(t-j)} \leq \bar{M} L A^{qt} \sum_{j=1}^{\infty} A^{(1-q)j-1} \leq \\
&\leq \bar{M} A^{qt} \frac{LA^{-q}}{1 - A^{1-q}} \leq \bar{M} \Theta A^{qt} \leq \bar{M} \Theta A^t,
\end{aligned}
$$

. . . .

$$
\begin{aligned}
|y_i(t)| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} A^{j-1} L |y_{i-1}(q(t-j))| \leq \sum_{j=1}^{\infty} A^{j-1} L \bar{M} \Theta^{i-1} A^{q(t-j)} \leq \\
&\leq \bar{M} L \Theta^{i-1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} A^{j-1-qj} \right) A^{qt} \leq \bar{M} \Theta^{i-1} A^{qt} \frac{L}{A^q - A} = \bar{M} \Theta^i A^{qt} \leq \bar{M} \Theta^i A^t.
\end{aligned}
$$

Таким чином, оцінки (20) виконуються при всіх $i \geq 0$ і $t \in \mathbb{R}^-$. Звідси випливає, що ряд (18) рівномірно збігається при всіх $t \leq 0$ до деякої неперервної обмеженої при $t \leq 0$ функції $\bar{\chi}(t)$. Як і при доведенні теореми 1, можна показати, що функція $\bar{\chi}(t)$ задовольняє рівняння (16).

Теорему 5 доведено.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови 1–3 теореми 4 і $A < 0$, $q > 1$. Тоді рівняння (16) має сім'ю неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^-$ розв'язків, що залежать від довільної неперервної функції $\bar{\omega}(t)$, яка задовольняє умову $\bar{\omega}(t+1) = -\bar{\omega}(t)$.*

Доведення теореми 6 аналогічне доведенню теореми 5.

Тепер розглянемо систему функціонально-різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)), \tag{21}$$

де A — дійсна $(n \times n)$-матриця, $q = \mathrm{const} > 0$, $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Припустимо, що власні числа λ_i, $i = 1, \ldots, n$, матриці A задовольняють умови

$$|\lambda_i| \neq 0, 1, \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Тоді існує неособлива заміна змінних

$$x(t) = Cy(t), \tag{22}$$

яка приводить систему (21) до вигляду

$$y(t+1) = \Lambda y(t) + \tilde{F}(t, y(qt)), \tag{23}$$

де $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\tilde{F}(t, y(qt)) = C^{-1}F(t, Cy(qt))$.

Дослідимо систему (23) у випадку, коли виконуються такі умови:

1) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j$, $i = 1, \ldots, k$, $j = k+1, \ldots, n$;

2) вектор-функція $\tilde{F}(t, y)$ задовольняє умову

$$\left|\tilde{F}(t, \bar{y}) - \tilde{F}(t, \bar{\bar{y}})\right| \leq L|\bar{y} - \bar{\bar{y}}|,$$

де $L = \mathrm{const} > 0$, $(t, \bar{y}), (t, \bar{\bar{y}}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\tilde{F}(0, 0) = 0$.

Якщо позначити

$$\Lambda_1 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k), \quad \Lambda_2 = \operatorname{diag}(\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n),$$

$$y(t) = \left(y^1(t), y^2(t)\right), \quad y^1(t) = (y_1(t), \ldots, y_k(t)), \quad y^2(t) = (y_{k+1}(t), \ldots, y_n(t)),$$

$$\tilde{F}(t, y) = \left(\tilde{F}^1(t, y), \tilde{F}^2(t, y)\right),$$

$$\tilde{F}^1(t, y) = \left(\tilde{F}_1(t, y), \ldots, \tilde{F}_k(t, y)\right), \quad \tilde{F}^2(t, y) = \left(\tilde{F}_{k+1}(t, y), \ldots, \tilde{F}_n(t, y)\right),$$

то систему рівнянь (23) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} y^1(t+1) &= \Lambda_1 y^1(t) + \tilde{F}^1\left(t, y^1(qt), y^2(qt)\right), \\ y^2(t+1) &= \Lambda_2 y^2(t) + \tilde{F}^2\left(t, y^1(qt), y^2(qt)\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Для системи рівнянь (24) мають місце такі теореми.

Теорема 7. *Нехай виконуються умови 1, 2, а також*

3) $q > 1$, $\lambda^{*q} < \lambda_*$, $\Theta = \max\left\{2L\dfrac{1}{\lambda_* - \lambda^{*q}}, 2L\dfrac{1}{\lambda_{**} - \lambda^{*q}}\right\} < 1$, $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, k\}$, $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, k\}$, $\lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j = k+1, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (24) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \geq 0$ *розв'язків, що залежать від довільної 1-періодичної вектор-функції* $\omega_1(t)$ *розмірності* k.

Доведення. Розв'язки системи (24) шукатимемо у вигляді функціональних рядів

$$y^1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t),$$
$$y^2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t), \tag{25}$$

де $y_i^1(t), y_i^2(t), i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні й обмежені при $t \geq 0$ вектор-функції.

Оскільки ряди (що буде доведено пізніше)

$$\tilde{F}^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \right.$$
$$\left. -\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right),$$

$$\tilde{F}^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \right.$$
$$\left. -\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right),$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}^+$ і їх суми дорівнюють $\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right)$ і $\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right)$ відповідно, то, підставляючи (25) в (24), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t+1) = \Lambda_1 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t) + \tilde{F}^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) +$$
$$+ \sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t+1) = \Lambda_2 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t) + \tilde{F}^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) +$$
$$+ \sum_{i=2}^{\infty} \left(\tilde{F}^2 \left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt) \right) - \tilde{F}^2 \left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt) \right) \right).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i^1(t)$, $y_i^2(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\begin{aligned} y_0^1(t+1) &= \Lambda_1 y_0^1(t), \\ y_0^2(t+1) &= \Lambda_2 y_0^2(t), \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} y_1^1(t+1) &= \Lambda_1 y_1^1(t) + \tilde{F}^1 \left(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)\right), \\ y_1^2(t+1) &= \Lambda_2 y_1^2(t) + \tilde{F}^2 \left(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)\right), \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} y_i^1(t+1) &= \Lambda_1 y_i^1(t) + \tilde{F}^1 \left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt) \right) - \tilde{F}^1 \left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt) \right), \\ y_i^2(t+1) &= \Lambda_2 y_i^2(t) + \tilde{F}^2 \left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt) \right) - \tilde{F}^2 \left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt) \right), \\ & i = 2, 3, \ldots, \end{aligned} \tag{28}$$

то ряди (25) є формальним розв'язком системи рівнянь (24).

Беручи до уваги умови теореми і зображення загального розв'язку системи (26), можна переконатися, що існує сім'я розв'язків, яка задовольняє систему рівнянь (26), і виконуються оцінки

$$\begin{aligned} |y_0^1(t)| &\leq M^1 \lambda^{*t}, \\ |y_0^2(t)| &= 0, \end{aligned} \tag{29}$$

де $M^1 = \max |\omega_1(t)|$.

Далі, з огляду на (27) та (29) отримуємо

$$|y_1^1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda_1^{-1}|^{j+1} |\tilde{F}^1(t+j, y_0^1(q(t+j)), y_0^2(q(t+j)))| \leq$$
$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_*^{-1})^{j+1} L(|y_0^1(q(t+j))| + |y_0^2(q(t+j))|) \leq$$
$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_*^{-(j+1)} L |y_0^1(q(t+j))| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_*^{-(j+1)} L M^1 \lambda^{*q(t+j)} \leq$$

$$\leq LM^1\lambda_*^{-1}\lambda^{*qt}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\lambda_*^{-1}\lambda^{*q}\right)^j \leq lM^1\,\frac{1}{\lambda_*-\lambda^{*q}}\,\lambda^{*qt} \leq M^1\Theta\lambda^{*qt},$$

$$|y_1^2(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty}|\Lambda_2^{-1}|^{j+1}|\tilde{F}^2\left(t+j, y_0^1(q(t+j))\right), y_0^2(q(t+j)))| \leq \tag{30}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty}\left(\lambda_{**}^{-1}\right)^{j+1}L(|y_0^1(q(t+j))|+|y_0^2(q(t+j))|) \leq \sum_{j=0}^{\infty}\lambda_{**}^{-(j+1)}L\left|y_0^1(q(t+j))\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty}\lambda_{**}^{-(j+1)}LM^1\lambda^{*q(t+j)} \leq lM^1\,\frac{1}{\lambda_{**}-\lambda^{*q}}\,\lambda^{*qt} \leq M^1\Theta\lambda^{*qt},$$

де $\Theta = \max\left\{2L\,\frac{1}{\lambda_*-\lambda^{*q}}, 2L\,\frac{1}{\lambda_{**}-\lambda^{*q}}\right\} < 1.$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (28) при $i = 2, 3, \ldots$, легко показати, що ряди

$$y_i^1(t) = -\sum_{j=0}^{\infty}\Lambda_1^{-(j+1)}\left[\tilde{F}^1\left(t+j, \sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(q(t+j)), \sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(q(t+j))\right) - \right.$$
$$\left. -\tilde{F}^1\left(t+j, \sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(q(t+j)), \sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(q(t+j))\right)\right],$$
$$y_i^2(t) = -\sum_{j=0}^{\infty}\Lambda_2^{-(j+1)}\left[\tilde{F}^2\left(t+j, \sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(q(t+j)), \sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(q(t+j))\right) - \right. \tag{31}$$
$$\left. -\tilde{F}^2\left(t+j, \sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(q(t+j)), \sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(q(t+j))\right)\right]$$

рівномірно збігаються при $t \geq 0$ і задовольняють систему рівнянь (28) при $i = 2, 3, \ldots$, а також виконуються оцінки

$$\left|y_i^1(t)\right| \leq M^1\Theta^i\lambda^{*qt},$$
$$\left|y_i^2(t)\right| \leq M^1\Theta^i\lambda^{*qt}, \quad i = 2, 3, \ldots. \tag{32}$$

Звідси випливає, що ряди (25) рівномірно збігаються при $t \geq 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y(t) = (y^1(t), y^2(t))$, які є розв'язками системи рівнянь (24) і задовольняють умову

$$|y^1(t)| \leq \frac{M^1}{1-\Theta}\,\lambda^{*t}, \quad |y^2(t)| \leq \frac{M^1}{1-\Theta}\,\lambda^{*t}.$$

Доведемо тепер, що

$$\tilde{F}^1\left(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)\right) + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \right.$$

$$\left. -\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right) = \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right),$$

$$\tilde{F}^2\left(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)\right) + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \right.$$

$$\left. -\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right) = \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right).$$

Дійсно, оскільки при всіх $m \geq 1$ виконуються співвідношення

$$\tilde{F}^1\left(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)\right) + \sum_{i=2}^{m+1}\left(\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \right.$$

$$\left. -\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right) = \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{m} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{m} y_j^2(qt)\right),$$

$$\tilde{F}^2\left(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)\right) + \sum_{i=2}^{m+1}\left(\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \right.$$

$$\left. -\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right) = \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{m} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{m} y_j^2(qt)\right),$$

то внаслідок умов теореми отримуємо

$$\left|\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right) - \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{m} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{m} y_j^2(qt)\right)\right| \leq$$

$$\leq L\left(\left|\sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt) - \sum_{j=0}^{m} y_j^1(qt)\right| + \left|\sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt) - \sum_{j=0}^{m} y_j^2(qt)\right|\right) \leq$$

$$\leq L\left(\left|\sum_{j=m+1}^{\infty} y_j^1(qt)\right| + \left|\sum_{j=m+1}^{\infty} y_j^2(qt)\right|\right) \leq L\sum_{j=m+1}^{\infty} 2M^1\Theta^i\lambda^{*qt} \leq 2LM^1\,\frac{\Theta^{m+1}}{1-\Theta}\,\lambda^{*qt},$$

$$\left|\tilde{F}^2\left(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)\right)-\tilde{F}^2\left(t,\sum_{j=0}^{m}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{m}y_j^2(qt)\right)\right|\leq$$

$$\leq L\left(\left|\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt)-\sum_{j=0}^{m}y_j^1(qt)\right|+\left|\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)-\sum_{j=0}^{m}y_j^2(qt)\right|\right)\leq$$

$$\leq L\left(\left|\sum_{j=m+1}^{\infty}y_j^1(qt)\right|+\left|\sum_{j=m+1}^{\infty}y_j^2(qt)\right|\right)\leq L\sum_{j=m+1}^{\infty}2M^1\Theta^i\lambda^{*qt}\leq 2LM^1\,\frac{\Theta^{m+1}}{1-\Theta}\,\lambda^{*qt}.$$

Отже, згідно з умовою 3 знайдеться таке натуральне число $\mathbb{N}$, що при всіх $m\geq\mathbb{N}$ і довільному як завгодно малому $\epsilon>0$ має місце нерівність

$$2LM^1\frac{\Theta^{m+1}}{1-\Theta}\,\lambda^{*qt}\leq\epsilon.$$

Таким чином, для всіх $m\geq\mathbb{N}$, $t\in\mathbb{R}^+$ виконуються нерівності

$$\left|\tilde{F}^1\left(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)\right)-\tilde{F}^1\left(t,\sum_{j=0}^{m}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{m}y_j^2(qt)\right)\right|\leq\epsilon,$$

$$\left|\tilde{F}^2\left(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)\right)-\tilde{F}^2\left(t,\sum_{j=0}^{m}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{m}y_j^2(qt)\right)\right|\leq\epsilon$$

і, отже, мають місце співвідношення

$$\lim_{m\to\infty}\tilde{F}^1\left(t,\sum_{j=0}^{m}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{m}y_j^2(qt)\right)=\tilde{F}^1\left(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)\right),$$

$$\lim_{m\to\infty}\tilde{F}^2\left(t,\sum_{j=0}^{m}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{m}y_j^2(qt)\right)=\tilde{F}^2\left(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)\right).$$

Цим самим доведено, що ряди

$$\tilde{F}^1\left(t,y_0^1(qt),y_0^2(qt)\right)+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^1\left(t,\sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(qt)\right)-\right.$$

$$\left.-\tilde{F}^1\left(t,\sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(qt)\right)\right),$$

$$\tilde{F}^2\left(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)\right) + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \right.$$

$$\left. -\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right)$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}^+$ і їх суми дорівнюють

$$\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right), \quad \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right).$$

Теорему 7 доведено.

Аналогічну теорему можна довести у випадку, коли $t \leq 0$.

Теорема 8. *Нехай виконуються умови 1, 2 і умова*

3) $q > 1$, $\lambda_{**}^q > \lambda^{**}$, $\Theta = \max\left\{\dfrac{2L}{\lambda_{**}^q - \lambda^*}, \dfrac{2L}{\lambda_{**}^q - \lambda^{**}}\right\}$, $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, k\}$, $\lambda^{**} = \max\{\lambda_j, j = k+1, \ldots, n\}$ $\lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j = k+1, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (24) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \leq 0$ *розв'язків, що залежать від довільної 1-періодичної вектор-функції* $\omega_2(t)$ *розмірності* $n - k$.

Доведення. Розв'язок системи (24) шукатимемо у вигляді функціональних рядів

$$\begin{aligned} y^1(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t), \\ y^2(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t), \end{aligned} \tag{33}$$

де $y_i^1(t), y_i^2(t), i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні й обмежені при $t \leq 0$ вектор-функції.

Оскільки ряди (доведення аналогічне тому, яке було проведено при доведенні теореми 7)

$$\tilde{F}^1\left(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)\right) + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \right.$$

$$\left. -\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right),$$

$$\tilde{F}^2\left(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)\right) + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \right.$$

$$\left. -\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right)$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}^-$ і їх суми дорівнюють $\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right)$ і $\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt) \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right)$ відповідно, то, підставляючи (33) в (24), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t+1) = \Lambda_1 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t) + \tilde{F}^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t+1) = \Lambda_2 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t) + \tilde{F}^2\left(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)\right) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i^1(t)$, $y_i^2(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\begin{aligned} y_0^1(t+1) &= \Lambda_1 y_0^1(t), \\ y_0^2(t+1) &= \Lambda_2 y_0^2(t), \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} y_1^1(t+1) &= \Lambda_1 y_1^1(t) + \tilde{F}^1\left(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)\right), \\ y_1^2(t+1) &= \Lambda_2 y_1^2(t) + \tilde{F}^2\left(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)\right), \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} y_i^1(t+1) \; &= \; \Lambda_1 y_i^1(t) + \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \\ & - \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right), \\ y_i^2(t+1) \; &= \; \Lambda_2 y_i^2(t) + \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \\ & - \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right), \qquad i = 2, 3, \ldots, \end{aligned} \tag{36}$$

то ряди (33) є формальним розв'язком системи рівнянь (24).

Беручи до уваги умови теореми, можна переконатися, що існують розв'язки, які задовольняють систему рівнянь (34), і виконуються оцінки

$$\begin{gathered}\left|y_0^1(t)\right| = 0,\\ \left|y_0^2(t)\right| \le M^2 \lambda_{**}^t,\end{gathered} \tag{37}$$

де $M^2 = \max|\omega_2(t)|$.

Далі, з огляду на (35) та (37) маємо

$$\begin{aligned}|y_1^1(t)| &\le \sum_{j=1}^{\infty} |\Lambda_1^{j-1}||\tilde{F}^1(t-j, y_0^1(q(t-j)), y_0^2(q(t-j)))| \le \\ &\le \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^*)^{j-1} L |y_0^2(q(t-j))| \le \\ &\le \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^*)^{j-1} L M^2 \lambda_{**}^{q(t-j)} \le \\ &\le LM^2 \frac{1}{\lambda^*} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda^*}{\lambda_{**}^q}\right)^j \lambda_{**}^{qt} \le \\ &\le M^2 \frac{L}{\lambda_{**}^q - \lambda^*} \lambda_{**}^{qt} \le M^2 \Theta \lambda_{**}^{qt},\\ |y_1^2(t)| &\le \sum_{j=1}^{\infty} |\Lambda_2^{j-1}||\tilde{F}^2(t-j, y_0^1(q(t-j)), y_0^2(q(t-j)))| \le \\ &\le \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^{**})^{j-1} L |y_0^2(q(t-j))| \le \\ &\le \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^{**})^{j-1} L M^2 \lambda_{**}^{q(t-j)} \le \\ &\le LM^2 \frac{1}{\lambda^{**}} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda^{**}}{\lambda_{**}^q}\right)^j \lambda_{**}^{qt} \le \\ &\le M^2 \frac{L}{\lambda_{**}^q - \lambda^{**}} \lambda_{**}^{qt} \le M^2 \Theta \lambda_{**}^{qt},\end{aligned}$$

де $\Theta = \max\left\{\dfrac{2L}{\lambda_{**}^q - \lambda^*}, \dfrac{2L}{\lambda_{**}^q - \lambda^{**}}\right\}$.

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (36) при $i = 2, 3, \ldots,$ легко показати, що ряди

$$y_i^1(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_1^{j-1} \left[\tilde{F}^1 \left(t-j, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(q(t-j)), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(q(t-j)) \right) - \right.$$

$$\left. -\tilde{F}^1 \left(t-j, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(q(t-j)), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(q(t-j)) \right) \right],$$

$$y_i^2(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_2^{j-1} \left[\tilde{F}^2 \left(t-j, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(q(t-j)), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(q(t-j)) \right) - \right.$$

$$\left. -\tilde{F}^2 \left(t-j, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(q(t-j)), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(q(t-j)) \right) \right], \quad i = 2, 3, \ldots.$$

рівномірно збігаються при $t \leq 0$ і задовольняють систему рівнянь (36) при $i = 2, 3, \ldots,$ а також виконуються оцінки

$$\left| y_i^1(t) \right| \leq M^2 \Theta^i \lambda_{**}^{qt},$$

$$\left| y_i^2(t) \right| \leq M^2 \Theta^i \lambda_{**}^{qt}, \quad i = 2, 3, \ldots.$$

Звідси випливає, що ряди (33) рівномірно збігаються при $t \leq 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y(t) = (y^1(t), y^2(t))$, які є розв'язками системи рівнянь (24) і задовольняють умову

$$\left| y^1(t) \right| \leq \frac{M^2}{1-\Theta} \lambda_{**}^t,$$

$$\left| y^2(t) \right| \leq \frac{M^2}{1-\Theta} \lambda_{**}^t.$$

Теорему 8 доведено.

Література

1. *Birkhoff G. D.* General theory of linear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1911. — **12**. — P. 243–284.

2. *Trjitzinsky W. J.* Analytic theory of linear q-difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1933. — **61**. — P. 1–38.

3. *Пелюх Г. П., Сівак О. А.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 3. — С. 307–335.

4. *Пелюх Г. П., Сівак О. А.* Про структуру множини неперервних розв'язків функціонально-різницевих рівнянь з лінійно перетвореним аргументом // Нелінійні коливання. — 2010. — **13**, № 1. — С. 75–95.

5. *Сівак О. А.* Структура множини неперервних розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь // Наук. вісті Нац. техн. ун-ту України «КПІ». — 2011. — № 4. — С. 81 – 87.

6. *Бецко І. В.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем різницевих рівнянь // Наук. вісті Нац. техн. ун-ту України «КПІ». — 2015. — № 4. — С. 7 – 13.

7. *Бецко І. В.* Про існування неперервних розв'язків систем різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. — 2016. — **19**, № 1. — С. 3 – 10.

8. *Бецко І. В.* Побудова неперервних розв'язків систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь // Наук. вісті Нац. техн. ун-ту України «КПІ». — 2016. — № 4. — С. 7 – 13.

Одержано 01.03.17