УДК 517.929

УМОВИ АБСОЛЮТНОЇ НЕСТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ЗІ САМОСПРЯЖЕНИМИ ОПЕРАТОРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

В. Ю. Слюсарчук, Л. М. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
вул. Соборна, 11, Рівне, 33000, Україна
e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com
L.M.Sliusarchuk@nuwm.edu.ua

We establish conditions for absolute instability of solutions of linear and nonlinear difference equations with self-adjoint operator coefficients.

Наведено умови абсолютної нестійкості розв'язків лінійних та нелінійних різницевих рівнянь зі самоспряженими операторними коефіцієнтами.

1. Основний об'єкт досліджень. Нехай H — гільбертів простір і $\|\cdot\|_H$ — норма в H, що визначається рівністю
$$\|x\|_E = \sqrt{(x,x)},$$
де (x,y) — скалярний добуток x на y, $x,y \in H$. Позначимо через $\mathrm{End}\,H$ банахову алгебру лінійних неперервних операторів $A\colon H \to H$ з одиницею I та нормою
$$\|A\|_{\mathrm{End}\,H} = \sup_{\|x\|_H=1} \|Ax\|_H.$$

Розглянемо самоспряжені оператори $A_k \in \mathrm{End}\,H$, $k=\overline{1,n}$, числа $\Delta_k \ge 1$, $k=\overline{1,n}$, відображення $F\colon [0,+\infty)\times H^n$, для якого
$$F(t,0,0,\ldots,0) \equiv 0,$$
і різницеві рівняння
$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k x(t-\Delta_k), \quad t \ge 0, \tag{1}$$
$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k x(t-\Delta_k) + F\big(t, x(t-\Delta_1), x(t-\Delta_2), \ldots, x(t-\Delta_n)\big), \quad t \ge 0, \tag{2}$$
з неперервним аргументом.

Нульові розв'язки рівнянь (1) і (2) називаються *абсолютно нестійкими* відносно відхилень Δ_k, $k=\overline{1,n}$, якщо ці розв'язки нестійкі при всіх $\Delta_k \ge 1$, $k=\overline{1,n}$.

Зазначимо, що розв'язки рівнянь (1) і (2) можуть бути розривними.

Мета даної статті — встановити умови абсолютної нестійкості нульових розв'язків рівнянь (1) і (2).

2. Допоміжні твердження. Наведемо деякі факти про самоспряжені оператори та нестійкість розв'язків різницевих рівнянь із дискретним аргументом за лінійним наближенням, що будуть використовуватися при дослідженні абсолютної нестійкості розв'язків рівнянь (1) і (2).

2.1. Два твердження про обмежені самоспряжені оператори. Нагадаємо, що оператор $A \in \operatorname{End} H$ називається самоспряженим, якщо він збігається зі спряженим до нього оператором A^*, тобто

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

для всіх $x, y \in H$ (теорія таких операторів викладена, наприклад, в [1 – 3]). Самоспряжений оператор $A \in \operatorname{End} H$ характеризується тим, що його ермітова форма (Ax, x) $(x \in H)$ набуває лише дійсні значення. Спектр самоспряженого оператора $\operatorname{Sp} A$ є не порожньою обмеженою замкненою множиною на дійсній осі. Найменший сегмент, що містить у собі спектр $\operatorname{Sp} A$, позначимо через $[\lambda_{\min}(A), \lambda_{\max}(A)]$. Як відомо

$$\lambda_{\min}(A) = \inf \{(Ax, x) \colon \|x\|_H = 1\},$$

$$\lambda_{\max}(A) = \sup \{(Ax, x) \colon \|x\|_H = 1\},$$

$$r(A) = \|A\|_{\operatorname{End} H} = \max\{\lambda_{\max}(A), -\lambda_{\min}(A)\},$$

де $r(A)$ — спектральний радіус оператора A, тобто число, що визначається рівністю

$$r(A) = \max_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} |\lambda|.$$

Завдяки неперервній залежності скалярного добутку (x, y) від x і y величини $\lambda_{\min}(A)$, $\lambda_{\max}(A)$, $r(A)$ і $\|A\|_{\operatorname{End} H}$ неперервно залежать від A.

Зазначимо, що сума самоспряжених операторів є самоспряжений оператор, а лінійна комбінація їх із дійсними коефіцієнтами також є самоспряжений оператор. Добуток BA самоспряжених операторів A і B є самоспряженим оператором тільки тоді, коли $BA = AB$.

Важливими для подальшого є наступні два твердження.

Теорема 1 [2]. *Точка λ належить спектру самоспряженого оператора $A \in \operatorname{End} H$ тоді і тільки тоді, коли існує послідовність нормованих векторів x_m $(\|x_m\|_H = 1)$, $m \geq 1$, для якої*

$$\lim_{m \to \infty} \|Ax_m - \lambda x_m\|_H = 0.$$

Теорема 2. *Якщо для самоспряженого оператора $A \in \operatorname{End} H$ виконується співвідношення*

$$r(A) \leq 1,$$

то

$$\sup_{m \geq 1} \|A^m\|_{\operatorname{End} H} \leq 1.$$

Теорема 2 є наслідком леми Меррея (див. [1, с. 109 – 111]).

2.2. Теорема про нестійкість розв'язків різницевих рівнянь із дискретним аргументом за лінійним наближенням. Нехай $\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел і $\mathcal{E}$ — довільний банахів простір. Розглянемо оператори $\mathcal{A} \in \operatorname{End} \mathcal{E}$ і $\mathcal{F}_m \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $m \in \mathbb{N}$, та відповідне різницеве рівняння

$$x_m = \mathcal{A}x_{m-1} + \mathcal{F}_m x_{m-1}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Дослідження рівняння (2) буде використовувати наступне твердження.

Теорема 3 [4, 5]**.** *Нехай виконуються умови:*

1) $r(\mathcal{A}) > 1$;

2) $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \|\mathcal{F}_m x\|_{\mathcal{E}} \le a\|x\|_{\mathcal{E}}^{1+p}$ *для всіх* $x \in \{y \in \mathcal{E}\colon \|y\|_{\mathcal{E}} \le \rho\}$, *де* $a,\ p$ *і* ρ *— додатні числа.*

Тоді нульовий розв'язок рівняння (3) нестійкий за Ляпуновим.

3. Формулювання основних результатів. Справедливі наступні твердження.

Теорема 4. *Якщо нульовий розв'язок рівняння (1) абсолютно нестійкий, то*

$$r\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) > 1. \tag{4}$$

Теорема 5. *Якщо виконується співвідношення*

$$\lambda_{\max}\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) > 1, \tag{5}$$

то нульовий розв'язок рівняння (1) абсолютно нестійкий.

Теорема 6. *Нехай виконується співвідношення (5) і*

$$\sup_{t\ge 0}\|F(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)\|_E \le \alpha\left(\sup_{k=\overline{1,n}}\|y_k\|_E\right)^{1+\beta} \tag{6}$$

для всіх $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \{y \in E\colon \|y\|_E \le \gamma\}$, *де* $\alpha,\ \beta$ *і* γ *— додатні числа.*

Тоді нульовий розв'язок рівняння (2) абсолютно нестійкий.

Доведенням цих тверджень присвячено п. 4–6.

4. Доведення теореми 4. Нехай нульовий розв'язок рівняння (1) абсолютно нестійкий. Тоді цей розв'язок нестійкий і при $\Delta_k = 1,\ k = \overline{1,n}$. У цьому випадку рівняння (1) має вигляд

$$x(t) = \left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) x(t-1), \quad t \ge 0. \tag{7}$$

Кожний розв'язок $x(t,\varphi)$ цього рівняння, побудований за обмеженою початковою функцією $\varphi\colon [-1,0) \to H$, подається у вигляді

$$x(t,\varphi) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{якщо } t \in [-1,0), \\ \left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)^{[t]+1} \varphi(\{t\}-1), & \text{якщо } t \ge 0, \end{cases} \tag{8}$$

де $[t]$ і $\{t\}$ — ціла і дробова частина числа t відповідно.

Зазначимо, що завдяки самоспряженості операторів $A_k,\ k = \overline{1,n}$, оператор $\sum_{k=1}^{n} A_k$ також є самоспряженим.

Припустимо, що співвідношення (4) не виконується, тобто

$$r\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) \leq 1. \tag{9}$$

Тоді на підставі теореми 2 кожний розв'язок (8) рівняння (7) з обмеженою функцією $\varphi(t)$ є обмеженим на $[0, +\infty)$, що суперечить нестійкості нульового розв'язку цього рівняння.

Отже, припущення про виконання співвідношення (9) є хибним.

Теорему 4 доведено.

Зауваження 1. Виконання співвідношення (4) не є достатнім для абсолютної нестійкості нульового розв'язку рівняння (1). Це підтверджується наступним прикладом.

Приклад 1. Розглянемо різницеве рівняння

$$x(t) = -x(t - \Delta_1) - \frac{1}{4}\, x(t - \Delta_2), \quad t \geq 0. \tag{10}$$

Для коефіцієнтів правої частини цього рівняння виконується співвідношення

$$\left|-1 - \frac{1}{4}\right| = \frac{5}{4} > 1$$

і тому справджується співвідношення (4). Однак, нульовий розв'язок рівняння (10) не є абсолютно нестійким. Справді, при $\Delta_1 = 1$ і $\Delta_1 = 2$ цей розв'язок експоненціально стійкий, оскільки корені z_1 і z_2 характеристичного рівняння

$$z^2 + z + \frac{1}{4} = 0$$

відповідного різницевого рівняння

$$x(t) = -x(t-1) - \frac{1}{4}\, x(t-2), \quad t \geq 0,$$

збігаються з числом $-\dfrac{1}{2}$, абсолютне значення якого менше 1 [6].

5. Доведення теореми 5. Нехай виконується співвідношення (5). Зафіксуємо довільні числа $\Delta_k \geq 1,\ k = \overline{1, n}$, і розглянемо рівняння (1) та операторну функцію $P(z),\ z \in \mathbb{C}$, що визначається рівністю

$$P(z) = I - \sum_{k=1}^{n} e^{-z\Delta_k} A_k. \tag{11}$$

Завдяки самоспряженості операторів $A_k,\ k = \overline{1, n}$, значення функції $P(z)$ при $z \in$ $\in [0, +\infty)$ є самоспряженими операторами і ця функція є неперервною на $[0, +\infty)$. Тому неперервною на $[0, +\infty)$ є функція $\lambda_{\min}(P(z))$.

Оскільки

$$\lambda_{\min}(P(0)) < 0$$

на підставі (4), (5), (11) та рівності

$$\lambda_{\min}(P(0)) = \lambda_{\max}(-P(0))$$

і

$$\lim_{z\to+\infty} \lambda_{\min}(P(z)) = 1$$

на підставі (11) та рівності

$$\lim_{z\to+\infty} P(z) = I,$$

то за теоремою Коші про проміжне значення [7] існує точка $z_0 \in (0, +\infty)$ така, що

$$\lambda_{\min}(P(z_0)) = 0.$$

Ця рівність означає, що

$$0 \in \operatorname{Sp} P(z_0). \tag{12}$$

Покажемо що нульовий розв'язок рівняння (1) нестійкий.

Завдяки теоремі 1 та (12) існує послідовність нормованих векторів $a_p,\ p \geq 1$, для якої

$$\lim_{p\to\infty} \|P(z_0)a_p\|_H = 0. \tag{13}$$

Розглянемо векторні функції $v_p = e^{z_0 t} a_p,\ p \geq 1$. Ці функції є розв'язками відповідно рівнянь

$$v(t) - \sum_{k=1}^{n} A_k v(t - \Delta_k) = e^{z_0 t} P(z_0) a_p, \quad p \geq 1.$$

Далі розглянемо визначені на $[-\Delta, 0]$ $\left(\Delta = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \Delta_k\right)$ функції $\varepsilon_p = \varepsilon_p(t),\ p \geq 1$, такі, що

$$\varepsilon_p(0) - \sum_{k=1}^{n} A_k \varepsilon_p(-\Delta_k) = P(z_0) a_p, \quad p \geq 1,$$

і

$$\lim_{p\to\infty} \sup_{t\in[-\Delta,0]} \|\varepsilon_p(t)\|_H = 0. \tag{14}$$

Такими функціями можуть бути, наприклад, функції

$$\varepsilon_p(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad t \in [-\Delta, -1), \\ (t+1)P(z_0)a_p, & \text{якщо} \quad t \in [-1, 0], \end{cases} \qquad p \geq 1,$$

відповідно.

Позначимо через $\gamma_p(t)$ розв'язок задачі

$$\begin{cases} \gamma(t) - \sum_{k=1}^{n} A_k \gamma(t - \Delta_k) = e^{z_0 t} P(z_0) a_p, \quad t \geq 0, \\ \gamma(\theta) = \varepsilon_p(\theta), \quad \theta \in [-\Delta, 0). \end{cases} \tag{15}$$

Тоді $v_p(t) - \gamma_p(t)$ — розв'язок рівняння (1).

Легко перевірити, використовуючи (14) і (15), що

$$\lim_{p\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\|\gamma_p(t)\|_H=0 \tag{16}$$

для кожного $T>0$. Оскільки для розв'язків $v_p(t)-\gamma_p(t),\ p\geq 1,$ рівняння (1), очевидно, справджуються співвідношення

$$e^{z_0t}+\|\gamma_p(t)\|_H\geq \left\|e^{z_0t}a_p-\gamma_p(t)\right\|_H\geq e^{z_0t}-\|\gamma_p(t)\|_H$$

для всіх $p\geq 1$ і $t\geq 0$, то на підставі (16) і того, що $z_0>0$, нульовий розв'язок рівняння (1) нестійкий. Із довільності вибору в рівнянні (1) чисел $\Delta_k\geq 1,\ k=\overline{1,n}$, випливає абсолютна нестійкість нульового розв'язку цього рівняння.

Теорему 5 доведено.

Зауваження 2. Виконання співвідношення (5) не є необхідним для абсолютної нестійкості нульового розв'язку рівняння (1). Це підтверджується наступним прикладом.

Приклад 2. Розглянемо різницеве рівняння

$$x(t)=-2x(t-\Delta),\quad t\geq 0, \tag{17}$$

де Δ — довільне дійсне число, не менше 1. Очевидно, що для цього рівняння не виконується співвідношення (5). Однак, нульовий розв'язок рівняння є абсолютно нестійким.

Справді, розв'язок $x(t,\varphi)$ цього рівняння, побудований за обмеженою початковою функцією $\varphi\colon[-\Delta,0)\to\mathbb{R}$, подається у вигляді

$$x(t,\varphi)=\begin{cases}\varphi(t), & \text{якщо}\quad t\in[-\Delta,0),\\ (-2)^{[t/\Delta]+1}\,\varphi(\{t/\Delta\}\Delta-\Delta), & \text{якщо}\quad t\geq 0,\end{cases}$$

де $[t/\Delta]$ і $\{t/\Delta\}$ — ціла і дробова частини числа t/Δ відповідно. Звідси випливає, що коли

$$\sup_{t\in[-\Delta,0)}|\varphi(t)|\neq 0,$$

тоді

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{s\in[0,t)}|x(s,\varphi)|=+\infty.$$

Тому нульовий розв'язок рівняння (17) абсолютно нестійкий.

6. Доведення теореми 6. Доведення теореми наведемо в пп. 6.1 – 6.3.

6.1. Перехід від рівняння (2) до рівняння, аналогічного (3). Зафіксуємо довільне число $t_0\geq 0$. Позначимо через $\mathcal{X}([-\Delta,+\infty),H)$ векторний простір визначених на $[-\Delta,+\infty)$ функцій $x=x(\theta)$ зі значеннями в H, що є обмеженими на кожному скінченому проміжку, а через $\mathcal{E}([-\Delta,0),H)$ — банахів простір визначених і обмежених на $[-\Delta,0)$ функцій $y=y(\theta)$ зі значеннями в H з нормою

$$\|y\|_{\mathcal{E}([-\Delta,0),H)}=\sup_{\theta\in[-\Delta,0)}\|y(\theta)\|_H.$$

Тут $\Delta=\max\limits_{k=\overline{1,n}}\Delta_k$.

За допомогою рівнянь (1) і (2) визначимо оператори $\mathcal{A}\colon \mathcal{E}([-\Delta,0),H)\to\mathcal{E}([-\Delta,0),H)$ і $\mathcal{F}_{t_0}\colon \mathcal{E}([-\Delta,0),H)\to\mathcal{E}([-\Delta,0),H)$, що дадуть змогу подати рівняння (2) у вигляді (3). Використаємо одне позначення. Для елемента $x=x(\theta)$ простору $\mathcal{X}([-\Delta,+\infty),H)$ позначимо через $x_{t_0}=x_{t_0}(\theta)$ елемент простору $\mathcal{E}([-\Delta,0),H)$, що визначається співвідношенням

$$x_{t_0}(\theta)=x(t_0+\theta),\quad \theta\in[-\Delta,0).$$

Розглянемо довільний елемент $\varphi=\varphi(\theta)$ простору $\mathcal{E}([-\Delta,0),H)$. Цьому елементу відповідає визначений на проміжку $[t_0-\Delta,+\infty)$ єдиний розв'язок $x=x_{t_0}(t)$ рівняння (1) (його можна визначити, наприклад, за допомогою кроків), що задовольняє початкову умову

$$x_{t_0}(\theta)=\varphi(\theta),\quad \theta\in[-\Delta,0). \tag{18}$$

Отже, кожному елементу $\varphi=\varphi(\theta)$ простору $\mathcal{E}([-\Delta,0),H)$ ставиться у відповідність елемент $x_{t_0+\Delta}(\theta)$ цього ж простору. Це дає змогу визначити оператор $\mathcal{A}\colon \mathcal{E}([-\Delta,0),H)\to$ $\to\mathcal{E}([-\Delta,0),H)$ співвідношенням

$$x_{t_0+\Delta}(\theta)=(\mathcal{A}\varphi)(\theta),\quad \theta\in[-\Delta,0).$$

Завдяки автономності і лінійності рівняння (1) а також неперервності операторів $A_k,\ k=$ $=\overline{1,n}$, цей оператор не залежить від t_0 і є лінійним та неперервним. Очевидно, що також для кожного розв'язку $x=x(t)$ рівняння (1) справджується співвідношення

$$x_{t_0+\Delta}(\theta)=\left(\mathcal{A}x_{t_0}\right)(\theta),\qquad \theta\in[-\Delta,0),\quad t_0\geq 0. \tag{19}$$

Аналогічно елементу $\varphi=\varphi(\theta)$ відповідає визначений на проміжку $[t_0-\Delta,+\infty)$ єдиний розв'язок $x=x_{t_0}(t)$ рівняння (2), що задовольняє початкову умову (18).

Отже, аналогічно, як і у випадку рівняння (1), кожному елементу $\varphi=\varphi(\theta)$ простору $\mathcal{E}([-\Delta,0),H)$ ставиться у відповідність елемент $x_{t_0+\Delta}(\theta)$ цього ж простору. Це дає змогу визначити оператор $\mathcal{B}_{t_0}\colon \mathcal{E}([-\Delta,0),H)\to\mathcal{E}([-\Delta,0),H)$ за допомогою співвідношення

$$x_{t_0+\Delta}(\theta)=(\mathcal{B}_{t_0}\varphi)(\theta),\quad \theta\in[-\Delta,0).$$

Зазначимо тут, що оператор $\mathcal{B}_{t_0}$ залежить від t_0, оскільки різницеве рівняння (2) не є автономним. Очевидно, що для кожного розв'язку $x=x(t)$ рівняння (2) справджується співвідношення

$$x_{t_0+\Delta}(\theta)=(\mathcal{B}_{t_0}x_{t_0})(\theta),\qquad \theta\in[-\Delta,0),\quad t_0\geq 0, \tag{20}$$

аналогічне (19).

Далі визначимо оператор $\mathcal{F}_{t_0}\colon \mathcal{E}([-\Delta,0),H)\to\mathcal{E}([-\Delta,0),H)$ за допомогою рівності

$$\mathcal{F}_{t_0}=\mathcal{B}_{t_0}-\mathcal{A}.$$

Завдяки цій рівності співвідношення (20) подається у вигляді

$$x_{t_0+\Delta}(\theta)=\left(\mathcal{A}x_{t_0}\right)(\theta)+\left(\mathcal{F}_{t_0}x_{t_0}\right)(\theta),\qquad \theta\in[-\Delta,0),\quad t_0\geq 0. \tag{21}$$

Окремим випадком (21) є

$$x_{m\Delta}(\theta)=\left(\mathcal{A}x_{(m-1)\Delta}\right)(\theta)+\left(\mathcal{F}_{(m-1)\Delta}x_{(m-1)\Delta}\right)(\theta),\qquad \theta\in[-\Delta,0),\quad m\in\mathbb{N}. \tag{22}$$

Із наведених міркувань випливає, що якщо функція $x = x(t)$ є розв'язком рівняння (2), то послідовність $\big(x_{m\Delta}(\theta)\big)_{m\geq 0}$ є розв'язком рівняння (22). Навпаки, якщо послідовність $\big(y_{m\Delta}(\theta)\big)_{m\geq 0}$ є розв'язком рівняння (22), то з визначення оператора $\mathcal{A}$ випливає, що функція

$$x(t) = y_{[t/\Delta]\Delta+\Delta}(\{t/\Delta\}\Delta - \Delta), \quad t \geq -\Delta,$$

є розв'язком рівняння (2), де $[t/\Delta]$ і $\{t/\Delta\}$ — ціла і дробова частини числа t/Δ відповідно.

Отже, *дослідження абсолютної нестійкості нульового розв'язку рівняння (2) зводиться до дослідження нестійкості нульового розв'язку рівняння (22) для всіх* $\Delta \geq 1$.

Зазначимо, що рівняння (22) аналогічне рівнянню (3).

Далі покажемо, що для операторів $\mathcal{A}$ і $\mathcal{F}_{m\Delta},\ m \geq 0$, виконуються умови теореми 3.

6.2. Виконання першої умови теореми 3 для оператора $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. Припустимо, що виконується співвідношення (5). Зафіксуємо довільні числа $\Delta \geq 1$ і $\Delta_k \geq 1,\ k = \overline{1,n}$, для яких $\Delta = \max_{k=\overline{1,n}} \Delta_k$. У доведенні теореми 5 показано, що існують додатне число z_0 і нормовані вектори $a_p,\ p \geq 1$, для яких виконується співвідношення (13).

Розглянемо функції

$$v^{(p)}(t) = e^{z_0 t} a_p, \quad t \in [-\Delta, \Delta),$$

$$v^{(p)}_{0\Delta}(\theta) = e^{z_0 \theta} a_p, \quad \theta \in [-\Delta, 0),$$

і

$$v^{(p)}_{1\Delta}(\theta) = e^{z_0 \Delta} e^{z_0 \theta} a_p, \quad \theta \in [-\Delta, 0),$$

де $p \geq 1$. Очевидно, що

$$v^{(p)}(t) - \sum_{k=1}^{n} v^{(p)}(t - \Delta_k) A_k = e^{z_0 t} P(z_0) a_p, \qquad p \geq 1, \quad t \in [0, \Delta), \tag{23}$$

і

$$v^{(p)}_{1\Delta}(\theta) = e^{z_0 \Delta} v^{(p)}_{0\Delta}(\theta), \qquad \theta \in [-\Delta, 0), \quad p \geq 1. \tag{24}$$

Позначимо через $\gamma^{(p)} = \gamma^{(p)}(t),\ p \geq 1$, розв'язки рівняння (1), що задовольняють умови

$$\gamma^{(p)}(\theta) = e^{z_0 \theta} a_p, \qquad \theta \in [-\Delta, 0), \quad p \geq 1.$$

відповідно. Очевидно, що

$$\gamma^{(p)}(\theta + \Delta) = \Big(\mathcal{A} v^{(p)}_{0\Delta}\Big)(\theta), \qquad \theta \in [-\Delta, 0), \quad p \geq 1. \tag{25}$$

Завдяки (13) і (23)

$$\lim_{p\to+\infty} \sup_{\theta\in[-\Delta,0)} \Big\| v^{(p)}(\theta + \Delta) - \gamma^{(p)}(\theta + \Delta) \Big\|_H = 0,$$

тобто з урахуванням (24) і (25)

$$\lim_{p\to+\infty} \sup_{\theta\in[-\Delta,0)} \Big\| e^{z_0 \Delta} v^{(p)}_{0\Delta}(\theta) - \Big(\mathcal{A} v^{(p)}_{0\Delta}\Big)(\theta) \Big\|_H = 0.$$

Це означає, що $e^{z_0\Delta} \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}$. Оскільки $r(\mathcal{A}) \geq e^{z_0\Delta}$ і $z_0 > 0$, то $r(\mathcal{A}) > 1$.

Отже, *для оператора $\mathcal{A}$ умова 1 теореми 3 виконується.*

6.3. Виконання умови 2 теореми 3 для операторів $\mathcal{F}_{m\Delta}$, $m \geq 0$. Зафіксуємо довільні числа $\Delta \geq 1$, $\Delta_k \geq 1$, $k = \overline{1,n}$, для яких $\Delta = \max_{k=\overline{1,n}} \Delta_k$, і $m \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що

$$\Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \ldots \leq \Delta_n. \tag{26}$$

Розглянемо функцію $\varphi \in \mathcal{E}([-\Delta, 0), H)$. Оцінимо $\|\mathcal{F}_{m\Delta}\varphi\|_{\mathcal{E}([-\Delta,0),H)}$ у випадку достатньо малої норми $\|\varphi\|_{\mathcal{E}([-\Delta,0),H)}$.

Спочатку знайдемо на проміжку $[(m-1)\Delta, (m+1)\Delta)$ розв'язок $y(t)$ рівняння (2), що задовольняє умову

$$y(t) = \varphi(t - m\Delta), \quad t \in [(m-1)\Delta, m\Delta). \tag{27}$$

Для зручності функцію $\varphi(t - m\Delta)$ позначимо через $\varphi^{(0)}(t)$. Цей розв'язок можна знайти за допомогою методу кроків. Використовуючи співвідношення (2), (26) і (27), отримуємо, що для $t \in [m\Delta, m\Delta + \Delta_1)$

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi^{(0)}(t - \Delta_k) + F\Big(t, \varphi^{(0)}(t - \Delta_1), \varphi^{(0)}(t - \Delta_2), \ldots, \varphi^{(0)}(t - \Delta_n)\Big). \tag{28}$$

Далі розглянемо функцію $\varphi^{(1)}(t)$, що визначається наступними двома співвідношеннями

$$\varphi^{(1)}(t) = \varphi^{(0)}(t), \tag{29}$$

якщо $t \in [(m-1)\Delta + \Delta_1, m\Delta)$, і

$$\varphi^{(1)}(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi^{(0)}(t - \Delta_k) + F\Big(t, \varphi^{(0)}(t - \Delta_1), \varphi^{(0)}(t - \Delta_2), \ldots, \varphi^{(0)}(t - \Delta_n)\Big), \tag{30}$$

якщо $t \in [m\Delta, m\Delta + \Delta_1)$.

Аналогічно, використовуючи співвідношення (2), (26) і (27), а також попередні два співвідношення, отримуємо, що для $t \in [m\Delta + \Delta_1, m\Delta + 2\Delta_1)$

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi^{(1)}(t - \Delta_k) + F\Big(t, \varphi^{(1)}(t - \Delta_1), \varphi^{(1)}(t - \Delta_2), \ldots, \varphi^{(1)}(t - \Delta_n)\Big). \tag{31}$$

Далі розглянемо функцію $\varphi^{(2)}(t)$, що визначається співвідношеннями

$$\varphi^{(2)}(t) = \varphi^{(1)}(t), \tag{32}$$

якщо $t \in [(m-1)\Delta + 2\Delta_1, m\Delta + \Delta_1)$, і

$$\varphi^{(2)}(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi^{(1)}(t - \Delta_k) + F\Big(t, \varphi^{(1)}(t - \Delta_1), \varphi^{(1)}(t - \Delta_2), \ldots, \varphi^{(1)}(t - \Delta_n)\Big), \tag{33}$$

якщо $t \in [m\Delta + \Delta_1, m\Delta + 2\Delta_1)$.

Аналогічно, використовуючи співвідношення (2), (26) і (27), а також попередні два співвідношення, отримуємо, що для $t \in [m\Delta + 2\Delta_1, m\Delta + 3\Delta_1)$

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi^{(2)}(t - \Delta_k) + F\Big(t, \varphi^{(2)}(t - \Delta_1), \varphi^{(2)}(t - \Delta_2), \ldots, \varphi^{(2)}(t - \Delta_n)\Big). \qquad (34)$$

Аналогічним чином можна здійснити побудову функцій $\varphi^{(3)}(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t)$ та функції $y(t)$ на відповідних проміжках.

На n-му кроці, коли $0 \leq \Delta - n\Delta_1 < \Delta_1$, функцію $\varphi^{(n)}(t)$ визначаємо за допомогою співвідношень

$$\varphi^{(n)}(t) = \varphi^{(n-1)}(t),$$

якщо $t \in [(m-1)\Delta + n\Delta_1, m\Delta + (n-1)\Delta_1)$, і

$$\varphi^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi^{(n-1)}(t - \Delta_k) + F\Big(t, \varphi^{(n-1)}(t - \Delta_1), \varphi^{(n-1)}(t - \Delta_2), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t - \Delta_n)\Big),$$

якщо $t \in [m\Delta + (n-1)\Delta_1, m\Delta + n\Delta_1)$ (ми вважаємо, що функція $\varphi^{(n-1)}(t)$ відома), а функцію $y(t)$ на проміжку $[m\Delta + n\Delta_1, (m+1)\Delta)$ — за допомогою співвідношення

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi^{(n)}(t - \Delta_k) + F\Big(t, \varphi^{(n)}(t - \Delta_1), \varphi^{(n)}(t - \Delta_2), \ldots, \varphi^{(n)}(t - \Delta_n)\Big). \qquad (35)$$

Отже, можна вважати, що на проміжку $[(m-1)\Delta, (m+1)\Delta)$ розв'язок $y(t)$ рівняння (2), що задовольняє умову (27), знайдено. Цей розв'язок можна подати, використовуючи співвідношення (31), (34) та (35).

Тепер оцінимо $\|\mathcal{F}_{m\Delta}\varphi\|_{\mathcal{E}([-\Delta,0),H)}$, якщо норма $\|\varphi\|_{\mathcal{E}([-\Delta,0),H)}$ є достатньо малою. Будемо використовувати число

$$\delta = \sum_{k=1}^{n} \|A_k\|_{\mathrm{End}\, H},$$

що завдяки (5) більше 1.

Очевидно, що згідно з (6)

$$\sup_{t \in [m\Delta, m\Delta + \Delta_1)} \Big\| F\Big(t, \varphi^{(0)}(t - \Delta_1), \varphi^{(0)}(t - \Delta_2), \ldots, \varphi^{(0)}(t - \Delta_n)\Big) \Big\|_H \leq \alpha \|\varphi\|^{1+\beta}_{\mathcal{E}([-\Delta,0),H)}, \quad (36)$$

якщо

$$\|\varphi\|_{\mathcal{E}([-\Delta,0),H)} \leq \gamma, \qquad (37)$$

і на підставі (28), (29) та (30)

$$\sup_{t \in [m\Delta, m\Delta + \Delta_1)} \|y(t)\|_H = \sup_{t \in [m\Delta, m\Delta + \Delta_1)} \Big\|\varphi^{(1)}(t)\Big\|_H \leq \delta \|\varphi\|_{\mathcal{E}([-\Delta,0),H)} + \alpha \|\varphi\|^{1+\beta}_{\mathcal{E}([-\Delta,0),H)},$$

якщо справджується нерівність (37).

Також очевидно, що

$$\sup_{t\in[m\Delta+\Delta_1,m\Delta+2\Delta_1)}\left\|F\left(t,\varphi^{(1)}(t-\Delta_1),\varphi^{(1)}(t-\Delta_2),\ldots,\varphi^{(1)}(t-\Delta_n)\right)\right\|_H \le$$

$$\le \alpha\left(\delta\|\varphi\|_{\mathcal{E}([-\Delta,0),H)}+\alpha\|\varphi\|^{1+\beta}_{\mathcal{E}([-\Delta,0),H)}\right)^{1+\beta}, \tag{38}$$

якщо

$$\delta\|\varphi\|_{\mathcal{E}([-\Delta,0),H)}+\alpha\|\varphi\|^{1+\beta}_{\mathcal{E}([-\Delta,0),H)}\le\gamma, \tag{39}$$

і на підставі (31), (32) та (33)

$$\sup_{t\in[m\Delta+\Delta_1,m\Delta+2\Delta_1)}\|y(t)\|_H=\sup_{t\in[m\Delta+\Delta_1,m\Delta+2\Delta_1)}\left\|\varphi^{(2)}(t)\right\|_H\le$$

$$\le\delta\left(\delta\|\varphi\|_{\mathcal{E}([-\Delta,0),H)}+\alpha\|\varphi\|^{1+\beta}_{\mathcal{E}([-\Delta,0),H)}\right)+$$

$$+\alpha\left(\delta\|\varphi\|_{\mathcal{E}([-\Delta,0),H)}+\alpha\|\varphi\|^{1+\beta}_{\mathcal{E}([-\Delta,0),H)}\right)^{1+\beta}$$

у випадку виконання нерівності (39).

Такого типу нерівності справджуються на кожному кроці. Наприклад, на заключному кроці виконується співвідношення

$$\sup_{t\in[m\Delta+n\Delta_1,(m+1)\Delta)}\left\|F\left(t,\varphi^{(n)}(t-\Delta_1),\varphi^{(n)}(t-\Delta_2),\ldots,\varphi^{(n)}(t-\Delta_n)\right)\right\|_H\le$$

$$\le\alpha\sup_{t\in[m\Delta+n\Delta_1,(m+1)\Delta)}\sup_{k=\overline{1,n}}\left\|\varphi^{(n)}(t-\Delta_k)\right\|^{1+\beta}_H, \tag{40}$$

якщо

$$\sup_{t\in[m\Delta+n\Delta_1,(m+1)\Delta)}\sup_{k=\overline{1,n}}\left\|\varphi^{(n)}(t-\Delta_k)\right\|_H\le\gamma.$$

Враховуючи нерівності (36), (38) та (40), приходимо до висновку, що існує таке достатньо мале число $\gamma_1<\gamma$, що коли

$$\|\varphi\|_{\mathcal{E}([-\Delta,0),H)}\le\gamma_1,$$

тоді

$$\|\mathcal{F}_{m\Delta}\varphi\|_{\mathcal{E}([-\Delta,0),H)}\le\alpha\|\varphi\|^{1+\beta}_{\mathcal{E}([-\Delta,0),H)}.$$

Таким чином, *для операторів* $\mathcal{F}_{m\Delta},\ m\ge0,$ *для всіх* $\Delta\ge1$ *виконується умова 2 теореми 3.*

Оскільки для оператора $\mathcal{A}$ *також виконуються умова 1 теореми 3, що показано в п. 6.2, то нульовий розв'язок рівняння (22) нестійкий для всіх* $\Delta\ge1$. *Це рівносильно абсолютній нестійкості нульового розв'язку рівняння (2).*

Теорему 6 доведено.

Завершуючи статтю, зазначимо, що теореми 4, 5 і 6 про умови абсолютної нестійкості нульових розв'язків різницевих рівнянь (1) і (2) з неперервним аргументом є новими і задача про абсолютну нестійкість розв'язків цих рівнянь аналогічна задачам про абсолютні стійкість та нестійкість розв'язків диференціально-різницевих рівнянь, що розв'язувалися в [8 – 21] та інших працях.

Література

1. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. – М: Мир, 1965. – 571 с.
2. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. – М: Наука, 1965. – 520 с.
3. *Садовничий В. А.* Теория операторов. – М: Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 368 с.
4. *Слюсарчук В. Е.* Устойчивость решений разностных уравнений в банаховом пространстве: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Черновцы, 1972. – 91 с.
5. *Слюсарчук В. Е., Царьков Е. Ф.* Разностные уравнения в банаховом пространстве // Латв. мат. ежегод. – 1976. – **17**. – С. 214 – 229.
6. *Слюсарчук В. Ю.* Нестійкість розв'язків еволюційних рівнянь. – Рівне: Вид-во Нац. ун-ту вод. госп-ва та природокористування, 2004. – 416 с.
7. *Дороговцев А. Я.* Математический анализ. Краткий курс в современном изложении. – Издание второе. – Киев: Факт, 2004. – 560 с.
8. *Репин Ю. М.* Об условиях устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений при любых запаздываниях // Уч. зап. Урал. ун-та. – 1960. – С. 34 – 41.
9. *Гоздек В. С.* О галопировании тележек шасси при движении самолета по грунтовому аэродрому // Инж. журн. – 1965. – Вып 4. – С. 743 – 745.
10. *Животовский Л. А.* Абсолютная устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями // Тр. семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом. – 1969. – **23**. – С. 919 – 928.
11. *Слюсарчук В. Е.* Достаточные условия абсолютной асимптотической устойчивости линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с несколькими запаздываниями // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 6. – С. 919 – 923.
12. *Слюсарчук В. Е.* Об абсолютной устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с запаздываниями // Мат. заметки. – 1975. – **18**, № 2. – С. 161 – 165.
13. *Слюсарчук В. Е.* Абсолютная асимптотическая устойчивость линейных дифференциальных уравнений с бесконечным числом запаздываний в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 1976. – **12**, № 5. – С. 840 – 847.
14. *Слюсарчук В. Е.* К вопросу об устойчивости решений бесконечных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1976. – **12**, № 11. – С. 2019 – 2026.
15. *Слюсарчук В. Е.* К вопросу об абсолютной устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений запаздывающего типа в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 8. – С. 1526 – 1528.
16. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия абсолютной экспоненциальной устойчивости решений линейных скалярных дифференциальных уравнений нейтрального типа // Проблемы современной теории периодических движений. – Ижевск, 1982. – № 6. – С. 19 – 24.
17. *Слюсарчук В. Е.* Абсолютно устойчивые системы с запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 8. – С. 1364 – 1373.
18. *Кореневский Д. Г.* Коэффициентный критерий абсолютной (не зависящей от отклонения аргумента) устойчивости систем линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Мат. физика и нелин. механика. – 1989. – Вып 12. – С. 16 – 22.
19. *Слюсарчук В. Ю.* Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. – Рівне: Вид-во Нац. ун-ту вод. госп-ва та природокористування. – 2003. – 366 с.
20. *Слюсарчук В. Ю.* Умови абсолютної нестійкості розв'язків диференціально-різницевих рівнянь // Нелін. коливання. – 2007. – **7**, № 3. – С. 430 – 436.
21. *Kovalev A. M., Martynyuk A. A., Boichuk O. A., Mazko A. G., Petryshyn R. I., Slyusarchuk V. Ye., Zuyev A. L., Slyn'ko V. I.* Novel qualitative methods of nonlinear mechanics and their application to the analisis of multifrequency oscillations, stability and control problems // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2009. – **9**, № 2. – P. 117 – 145.

Одержано 05.11.2016