УДК 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

С. А. Алдашев

Казах. нац. пед. ун-т им. Абая
ул. Толеби, 86, Алматы, 050012, Казахстан
e-mail: aldash51@mail.ru

We show that a Dirichlet problem, in a cylindrical domain, for a degenerating many-dimension equation of a mixed type has a unique solution. We find a criterion for uniqueness of a regular solution.

Показано, що задача Діріхле в циліндричній області для вироджуваного багатовимірного рівняння мішаного типу однозначно розв'язна. Встановлено також критерій єдиності регулярного розв'язку.

1. Введение. Известно, что колебания упругих мембран в пространстве моделируются уравнениями в частных производных. Если прогиб мембраны считать функцией $u(x,t)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $m \geq 2$, то по принципу Гамильтона приходим к многомерным вырождающимся гиперболическим уравнениям.

Полагая, что в положении изгиба мембрана находится в равновесии, из принципа Гамильтона также получаем многомерные вырождающиеся эллиптические уравнения.

Следовательно, колебания упругих мембран в пространстве можно моделировать в качестве вырождающихся многомерных гиперболо-эллиптических уравнений.

Проблема корректности задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в специальных областях была объектом исследований многих авторов на плоскости [1–5] и в пространстве [6]. В данной работе показано, что задача Дирихле в цилиндрической области для вырождающегося многомерного уравнения смешанного типа однозначно разрешима. Получен также критерий единственности регулярного решения.

2. Постановка задачи и результаты. Пусть $\Omega_{\beta\gamma}$ — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) \colon |x| = 1\}$, плоскостями $t = \beta > 0$ и $t = \gamma < 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Обозначим через Ω_β и Ω_γ части области $\Omega_{\beta\gamma}$, а через Γ_β, Γ_γ части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_β —верхнее, σ_γ — нижнее основание области $\Omega_{\beta\gamma}$. Пусть далее S — общая часть границ областей Ω_β, Ω_γ, представляющая множество $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\beta\gamma}$ рассмотрим вырождающееся многомерное уравнение смешанного типа

$$|t|^p \Delta_x u - \operatorname{sgn} t u_{tt} = 0, \tag{1}$$

где $p = \text{const} > 0, \Delta_x$ — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i \in \{1, 2, \ldots, m-2\}$, $0 \leq \theta_{m-1} < 2\pi$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$.

Задача 1 (Дирихле). Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\beta\gamma}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_{\beta\gamma}) \cap C^1(\Omega_{\beta\gamma}) \cap C^2(\Omega_\beta \cup \Omega_\gamma)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{\sigma_\beta} = \varphi_1(r,\theta), \quad u\big|_{\Gamma_\beta} = \psi_1(t,\theta), \tag{2}$$

$$u\big|_{\Gamma_\gamma} = \psi_2(t,\theta), \quad u\big|_{\sigma_\gamma} = \varphi_2(r,\theta). \tag{3}$$

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l = 0,1,\ldots,$ — пространства Соболева.

Справедливы следующие утверждения [7].

Лемма 1. *Пусть функция $f(r,\theta)$ принадлежит $W_2^l(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. *Для того чтобы функция $f(r,\theta)$ принадлежала $W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам*

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}\left|f_n^k(r)\right|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const}.$$

Через $\overline{\varphi}_{1n}^k(r)$, $\overline{\varphi}_{2n}^k(r)$, $\psi_{1n}^k(t)$, $\psi_{2n}^k(t)$ обозначим коэффициенты ряда (4), соответственно, функций $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$, $\psi_1(t,\theta)$, $\psi_2(t,\theta)$.

Теорема 1. *Если $\varphi_1(r,\theta), \varphi_2(r,\theta) \in W_2^l(S)$, $\psi_1(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\beta)$, $\psi_2(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\gamma)$, $l \geq \dfrac{3m}{2}$ и имеет место*

$$\cos\mu_{s,n}\beta' \operatorname{sh}\mu_{s,n}\gamma' \neq \sin\mu_{s,n}\beta' \operatorname{ch}\mu_{s,n}\gamma', \quad s = 1,2,\ldots, \tag{5}$$

где $\mu_{s,n}$ — положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{m-2}{2}}(z)$, $\beta' = \dfrac{2}{2+p}\times$ $\times\beta^{\frac{2+p}{2}}$, $\gamma' = \dfrac{2}{2+p}\gamma^{\frac{2+p}{2}}$, то задача 1 однозначно разрешима.

Теорема 2. *Решение задачи 1 единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие (5).*

Отметим, что эти теоремы при $p = 0$ получены в [8].

3. Доказательство теоремы 1. В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_β имеет вид

$$t^p\left(u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{\delta u}{r^2}\right) - u_{tt} = 0, \tag{6}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \, \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1} \, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \;\; g_1 = 1, \;\; g_j = (\sin\theta_1 \dots \sin\theta_{j-1})^2, \;\; j > 1.$$

Известно [7], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \dots,$ каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Поскольку искомое решение задачи 1 в области Ω_β принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$, то его можно искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{7}$$

где $\bar{u}_n^k(r, t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (7) в (6) и используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [7], имеем

$$t^p \left(\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \, \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \, \bar{u}_n^k \right) - \bar{u}_{ntt}^k = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{8}$$

при этом краевое условие (2), с учетом леммы 1, соответственно запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r, \beta) = \bar{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1, t) = \psi_{1n}^k(t), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots . \tag{9}$$

Выполняя в (8), (9) замену $\bar{\upsilon}_n^k(r, t) = \bar{u}_n^k(r, t) - \psi_{1n}^k(t)$, получаем

$$t^p \left(\bar{\upsilon}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \, \bar{\upsilon}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \, \bar{\upsilon}_n^k \right) - \bar{\upsilon}_{ntt}^k = \overline{f}_n^k(r, t), \tag{10}$$

$$\bar{\upsilon}_n^k(r, \beta) = \varphi_{1n}^k(r), \quad \bar{\upsilon}_n^k(1, t) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{11}$$

$$\overline{f}_n^k(r, t) = \psi_{1ntt}^k + \frac{\lambda_n t^p}{r^2} \, \psi_{1n}^k(t), \quad \varphi_{1n}^k(r) = \overline{\varphi}_{1n}^k(r) - \psi_{1n}^k(\beta).$$

Далее, выполняя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r, t) = r^{\frac{1-m}{2}} \upsilon_n^k(r, t)$ и полагая затем $r = r$, $x_0 = \dfrac{2}{2+p} \, t^{\frac{2+p}{2}}$, задачу (10), (11) сводим к задаче

$$L_\alpha \upsilon_{\alpha,n}^k \equiv \upsilon_{\alpha,nrr}^k - \upsilon_{\alpha,nx_0x_0}^k - \frac{\alpha}{x_0} \, \upsilon_{\alpha,nx_0}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} \, \upsilon_{\alpha,n}^k = f_{\alpha,n}^k(r, x_0), \tag{12}$$

$$\upsilon_{\alpha,n}^k(r, \beta') = \widetilde{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \upsilon_{\alpha,n}^k(1, x_0) = 0, \tag{13}$$

где $0 < \alpha = \dfrac{p}{2+p} < 1$, $\bar{\lambda}_n = \dfrac{(m-1)(3-m) - 4\lambda_n}{2}$,

$$\upsilon^k_{\alpha,n}(r, x_0) = \upsilon^k_n \left[r, \left(\frac{2+p}{2} \, x_0 \right)^{\frac{2}{2+p}} \right],$$

$$f^k_{\alpha,n}(r, x_0) = r^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{x_0}{1-\alpha} \right)^{-2\alpha} \bar{f}^k_n(r) \left[r, \left(\frac{x_0}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \right],$$

$$\tilde{\varphi}^k_{1n}(r) = r^{\frac{m-1}{2}} \varphi^k_{1n}(r).$$

Решение задачи (12), (13) будем искать в виде

$$\upsilon^k_{\alpha,n}(r, x_0) = \upsilon^{k,1}_{\alpha,n}(r, x_0) + \upsilon^{k,2}_{\alpha,n}(r, x_0), \tag{14}$$

где $\upsilon^{k,1}_{\alpha,n}(r, x_0)$ — решение задачи Коши

$$L_\alpha \upsilon^{k,1}_{\alpha,n} = f^k_{\alpha,n}(r, x_0), \tag{15}$$

$$\upsilon^{k,1}_{\alpha,n}(r, \beta') = 0, \quad \upsilon^{k,1}_{\alpha,n}(1, x_0) = 0, \tag{16}$$

а $\upsilon^{k,2}_{\alpha,n}(r, x_0)$ — решение задачи

$$L_\alpha \upsilon^{k,2}_{\alpha,n} = 0, \tag{17}$$

$$\upsilon^{k,2}_{\alpha,n}(r, \beta') = \tilde{\varphi}_{1n}(r), \quad \upsilon^{k,2}_{\alpha,n}(1, x_0) = 0. \tag{18}$$

Решение вышеуказанных задач рассмотрим в виде

$$\upsilon^k_{\alpha,n}(r, x_0) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_{\alpha,s}(x_0), \tag{19}$$

при этом пусть

$$f^k_{\alpha,n}(r, x_0) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{\alpha,s}(x_0) R_s(r), \quad \tilde{\varphi}^k_{1n}(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s R_s(r). \tag{20}$$

Подставляя (19) в (15), (16), с учетом (20) получаем

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{21}$$

$$R_s(1) = 0, \quad \left| R_s(0) \right| < \infty, \tag{22}$$

$$M_\alpha T_{\alpha,s} \equiv T_{\alpha,sx_0x_0} + \frac{\alpha}{x_0} T_{\alpha,sx_0} + \mu T_{\alpha,s} = -a_{\alpha,s}(x_0), \quad 0 < x_0 < \beta', \tag{23_α}$$

$$T_{\alpha,s}(\beta') = 0. \tag{24}$$

Ограниченным решением задачи (21), (22) является следующее [9]:

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{25}$$

где $\nu = \dfrac{n+m-2}{2}$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Наряду с уравнением (23_α) рассмотрим уравнение

$$M_0 T_{0,s} \equiv T_{0,sx_0x_0} + \mu T_{0,s} = -a_{0,s}(x_0), \quad 0 < x_0 < \beta'. \tag{23_0}$$

Как доказано в [10, 11], существует следующая функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (23_α) и (23_0).

Утверждение 1. *Если $T_{0,s}^1(x_0)$ — решение задачи Коши для уравнения (23_0), удовлетворяющее условиям*

$$T_{0,s}^1(0) = \tau_s, \quad T_{0,sx_0}^1(0) = 0, \tag{26}$$

то функция

$$T_{\alpha,s}^1(x_0) = \gamma_\alpha \int\limits_0^1 T_{0,s}^1(\xi x_0)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} d\xi \equiv 2^{-1}\gamma_\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) x_0^{1-\alpha} D_{0x_0^2}^{-\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{T_{0,s}^1(x_0)}{x_0^2}\right] \tag{27}$$

при $\alpha > 0$ является решением уравнения (23_α) с условиями (26).

Утверждение 2. *Если $T_{0,s}^2(x_0)$ — решение задачи Коши для уравнения (23_0), удовлетворяющее условиям*

$$T_{0,s}^2(0) = \frac{\nu_s}{(1-\alpha)(3-\alpha)\ldots(2q+1-\alpha)}, \quad T_{0,sx_0}^2(0) = 0,$$

то при $0 < \alpha < 1$ функция

$$T_{\alpha,s}^2(x_0) = \gamma_{2-k+2q}\left(\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^q \left[x_0^{1-\alpha+2q}\int\limits_0^1 T_{0,s}^2(\xi x_0)(1-\xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}} d\xi\right] \equiv$$

$$\equiv \gamma_{2-k+2q} 2^{q-1} \Gamma\left(q - \frac{\alpha}{2} + 1\right) D_{0x_0^2}^{\frac{\alpha}{2}-1}\left[\frac{T_{0,s}^2(x_0)}{x_0}\right] \tag{28}$$

является решением уравнения (23_α) с начальными данными

$$T_{\alpha,s}^2(0) = 0, \quad \lim_{x_0 \to +0} x_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x_0} T_{\alpha,s}^2 = \nu_s,$$

где $\sqrt{\pi}\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\gamma_\alpha = 2\Gamma\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция, D_{0t}^α — оператор Римана–Лиувилля [12], $q \geq 0$ — наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $2-\alpha+2q \geq$ $\geq m-1$.

При этом функции $a_{\alpha,s}(x_0)$ и $a_{0,s}(x_0)$ связаны формулами (27) в случае утверждения 1 и формулами (28) в случае утверждения 2.

В силу (27), (28), учитывая обратимость оператора D_{0t}^{α} [12], из условия (24) получаем условие

$$T_{0,s}(\beta') = 0. \tag{29}$$

Теперь будем решать задачу (23_0), (29).

Общее решение уравнения (23_0) имеет вид [9]

$$T_{0,s}(x_0) = c_{1s}\cos\mu_{s,n}x_0 + c_{2s}\sin\mu_{s,n}x_0 + \frac{\cos\mu_{s,n}x_0}{\mu_{s,n}}\int\limits_0^{x_0} a_{0,s}(\xi)\sin\mu_{s,n}\xi\,d\xi -$$

$$-\frac{\sin\mu_{s,n}x_0}{\mu_{s,n}}\int\limits_0^{x_0} a_{0,s}(\xi)\cos\mu_{s,n}\xi\,d\xi, \tag{30}$$

где c_{1s}, c_{2s} — произвольные пока неизвестные постоянные. Удовлетворив условию (29), будем иметь

$$c_{1s}\cos\mu_{s,n}\beta' + c_{1s}\sin\mu_{s,n}\beta' + \frac{\cos\mu_{s,n}\beta'}{\mu_{s,n}}\int\limits_0^{\beta'} a_{0,s}(\xi)\sin\mu_{s,n}\xi\,d\xi -$$

$$-\frac{\sin\mu_{s,n}\beta'}{\mu_{s,n}}\int\limits_0^{\beta'} a_{0,s}(\xi)\cos\mu_{s,n}\xi\,d\xi = 0. \tag{31}$$

Подставляя (25) в (20), получаем

$$r^{-\frac{1}{2}}f_{\alpha,n}^k(r,x_0) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{\alpha,s}(x_0)J_\nu(\mu_{s,n}r), \quad r^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}J_\nu(\mu_{s,n}r), \quad 0 < r < 1. \tag{32}$$

Ряды (32) — разложение в ряды Фурье – Бесселя [13], если

$$a_{\alpha,s}(x_0) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1 \sqrt{\xi}f_{\alpha,n}^k(\xi,x_0)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)\,d\xi,$$

$$b_s = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1 \sqrt{\xi}\widetilde{\varphi}_{1n}^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)\,d\xi, \tag{33}$$

где $\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \ldots,$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величин.

Таким образом, если известны постоянные c_{1s}, c_{2s}, то из (30) однозначно найдем решение $T_{0,s}(x_0)$ уравнения (23_0).

Далее, подставляя (19) в (17), (18), с учетом (20) получаем задачу

$$M_\alpha T_{\alpha,s} \equiv T_{\alpha,sx_0x_0} + \frac{\alpha}{x_0} T_{\alpha,sx_0} + \mu T_{\alpha,s} = 0, \quad 0 < x_0 < \beta',$$

$$T_{\alpha,s}\left(\beta'\right) = b_s,$$

которая в силу (27), (28) переходит в задачу

$$M_0 T_{0,s} \equiv T_{0,sx_0x_0} + \mu T_{0,s} = 0, \quad 0 < x_0 < \beta', \tag{34_0}$$

$$T_{0,s}\left(\beta'\right) = b_s, \tag{35}$$

где b_s находится из (33).

Общее решение уравнения (34_0) записывается в виде

$$T_{0,s}(x_0) = c'_{1s} \cos \mu_{s,n} x_0 + c'_{2s} \sin \mu_{s,n} x_0. \tag{36}$$

Удовлетворив условию (35), получим

$$c'_{1s} \cos \mu_{s,n} \beta' + c'_{2s} \sin \mu_{s,n} \beta' = b_s. \tag{37}$$

Теперь рассмотрим в области Ω_γ первую краевую задачу для уравнения

$$(-t)^p \left(u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{\delta u}{r^2}\right) + u_{tt} = 0 \tag{38}$$

с условиями

$$u\big|_{\sigma_\gamma} = \varphi_2(r,\theta), \quad u\big|_{\Gamma_\gamma} = \psi_2(t,\theta). \tag{$3'$}$$

Решение задачи (38), ($3'$) будем искать в виде (7).

Подставляя (7) в (38), получаем уравнение

$$(-t)^p \left(\bar{u}^k_{nrr} + \frac{m-1}{r} \bar{u}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}^k_n\right) + \bar{u}^k_{ntt} = 0, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{39}$$

при этом краевое условие ($3'$)принимает вид

$$\overline{u}^k_n(r,\gamma) = \overline{\varphi}^k_{2n}(r), \quad \overline{u}^k_n(1,t) = \psi^k_{2n}(t), \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots. \tag{40}$$

Выполняя в (39), (40) замену $\bar{\omega}^k_n(r,t) = \bar{u}^k_n(r,t) - \psi^k_{2n}(t)$, получаем

$$(-t)^p \left(\bar{\omega}^k_{nrr} + \frac{m-1}{r} \bar{\omega}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{\omega}^k_n\right) + \bar{\omega}^k_{ntt} = \bar{g}^k_n(r,t), \tag{41}$$

$$\bar{\omega}^k_n(r,\gamma) = \varphi^k_{2n}(r), \quad \bar{\omega}^k_n(1,t) = 0, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{42}$$

$$\bar{g}^k_n(r,t) = -\psi^k_{2ntt} + \frac{\lambda_n(-t)^p}{r^2} \psi^k_{2n}, \quad \varphi^k_{2n}(r) = \bar{\varphi}^k_{2n}(r) - \psi^k_{2n}(\gamma).$$

Далее, выполняя замену $\bar{\omega}_n^k(r,t) = r^{\frac{1-m}{2}} \omega_n^k(r,t)$ и полагая затем $r = r$, $x_0 = \dfrac{2}{2+p}(-t)^{\frac{2+p}{2}}$, задачу (41), (42) сводим к задаче

$$L_\alpha \omega_{\alpha,n}^k \equiv \omega_{\alpha,nrr}^k + \omega_{\alpha,nx_0x_0}^k + \frac{\alpha}{x_0}\omega_{\alpha,nx_0}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\omega_{\alpha,n}^k = g_{\alpha,n}^k(r,x_0), \tag{43}$$

$$\omega_{\alpha,n}^k(r,\gamma') = \tilde{\varphi}_{2n}^k(r), \quad \omega_{\alpha,n}^k(1,x_0) = 0, \tag{44}$$

$$\omega_{\alpha,n}^k(r,x_0) = \omega_n^k\left[r, \left(\frac{2+p}{2}x_0\right)^{\frac{2}{2+p}}\right],$$

$$g_{\alpha,n}^k(r,x_0) = r^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{-2\alpha} \bar{g}_n^k(r)\left[r, \left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right],$$

$$\widetilde{\varphi}_{2n}^k(r) = r^{\frac{m-1}{2}}\varphi_{2n}^k(r).$$

Решение задачи (43), (44) ищем в виде

$$\omega_{\alpha,n}^k(r,x_0) = \omega_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0) + \omega_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0), \tag{45}$$

где $\omega_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0)$ — решение задачи

$$L_\alpha \omega_{\alpha,n}^{k,1} = g_{\alpha,n}^k(r,x_0), \tag{46}$$

$$\omega_{\alpha,n}^{k,1}(r,\gamma') = 0, \quad \omega_{\alpha,n}^{k,1}(1,x_0) = 0, \tag{47}$$

а $\omega_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)$ — решение задачи

$$L_\alpha \omega_{\alpha,n}^{k,2} = 0, \tag{48}$$

$$\omega_{\alpha,n}^{k,2}(r,\gamma') = \widetilde{\varphi}_{2n}^k(r), \quad \omega_{\alpha,n}^{k,2}(1,x_0) = 0. \tag{49}$$

Решение вышеуказанных задач рассмотрим в виде

$$\omega_{\alpha,n}^k(r,x_0) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) V_{\alpha,s}(x_0). \tag{50}$$

При этом пусть

$$g_{\alpha,n}^k(r,x_0) = \sum_{s=1}^{\infty} d_{\alpha,s}(x_0) R_s(r), \quad \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_s R_s(r). \tag{51}$$

Подставляя (50) в (46), (47), с учетом (51) получаем задачу

$$P_\alpha V_{\alpha,s} \equiv V_{\alpha,sx_0x_0} + \frac{\alpha}{x_0} V_{\alpha,sx_0} - \mu_{s,n}^2 V_{\alpha,s} = d_{\alpha,s}(x_0), \quad \gamma' < x_0 < 0, \tag{52_α}$$

$$V_{\alpha,s}(\gamma') = 0. \tag{53}$$

Наряду с уравнением (52_α) рассмотрим уравнение

$$P_0 V_{0,s} \equiv V_{0,sx_0x_0} - \mu_{s,n}^2 V_{0,s} = d_{0,s}(x_0), \quad \gamma' < x_0 < 0, \tag{52_0}$$

для которого справедливы утверждения 1 и 2, при этом функции $d_{\alpha,s}(x_0)$ и $d_{0,s}(x_0)$ связаны формулами (27) и (28).

В силу (27), (28) из (53) получим условие

$$V_{0,s}(\gamma') = 0. \tag{54}$$

Общее решение уравнения (52_0) представимо в виде [9]

$$V_{0,s}(x_0) = \widetilde{c}_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} x_0 + \widetilde{c}_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} x_0 + \frac{\operatorname{ch} \mu_{s,n} x_0}{\mu_{s,n}} \int\limits_{x_0}^{0} d_{0,s}(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi \, d\xi -$$

$$- \frac{\operatorname{sh} \mu_{s,n} x_0}{\mu_{s,n}} \int\limits_{x_0}^{0} d_{0,s}(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi \, d\xi. \tag{55}$$

Удовлетворив условию (54), будем иметь

$$\widetilde{c}_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} \gamma' + \widetilde{c}_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} \gamma' + \frac{\operatorname{ch} \mu_{s,n} \gamma'}{\mu_{s,n}} \int\limits_{\gamma'}^{0} d_{0,s}(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi \, d\xi -$$

$$- \frac{\operatorname{sh} \mu_{s,n} \gamma'}{\mu_{s,n}} \int\limits_{\gamma'}^{0} d_{0,s}(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi \, d\xi = 0. \tag{56}$$

Подставляя (25) в (51), получаем ряды

$$r^{-\frac{1}{2}} g_{\alpha,n}^k(r, x_0) = \sum_{s=1}^{\infty} d_{\alpha,s}(x_0) J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad r^{-\frac{1}{2}} \widetilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_s J_\nu(\mu_{s,n} r),$$

которые являются рядами Фурье – Бесселя, если

$$d_{\alpha,s}(x_0) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} g_{\alpha,n}^k(\xi, x_0) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi,$$

$$e_s = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} \widetilde{\varphi}_{2n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi. \tag{57}$$

Далее, подставляя (50) в (48), (49), с учетом (51) получаем задачу

$$P_\alpha V_{\alpha,s} \equiv V_{\alpha,sx_0x_0} + \frac{\alpha}{x_0} V_{\alpha,sx_0} - \mu_{s,n}^2 V_{\alpha,s} = 0, \quad \gamma' < x_0 < 0,$$

$$V_{\alpha,s}(\gamma') = e_s, \tag{58}$$

которая в силу (27), (28) переходит в задачу

$$P_0 V_{0,s} \equiv V_{0,sx_0x_0} - \mu_{s,n}^2 V_{\alpha,s} = 0, \quad \gamma' < x_0 < 0, \tag{59_0}$$

$$V_{0,s}(\gamma') = e_s, \tag{60}$$

где e_s находится из формулы (57).

Общее решение уравнения (59_0) имеет вид

$$V_{0,s}(x_0) = \tilde{c'}_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} x_0 + \tilde{c'}_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} x_0. \tag{61}$$

Удовлетворив условию (60), будем иметь

$$\tilde{c'}_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} \gamma' + \tilde{c'}_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} \gamma' = e_s. \tag{62}$$

Поскольку искомое решение u принадлежит $C(\overline{\Omega}_{\beta\gamma}) \cap C^1(\Omega_\beta \gamma)$, то из (7), (19), (50) следует, что

$$T_{\alpha,s}(0) = V_{\alpha,s}(0) = \tau_s,$$

$$\lim_{x_0 \to +0} x_0^\alpha T_{\alpha,sx_0} = \lim_{x_0 \to -0} x_0^\alpha V_{\alpha,sx_0} = \nu_s, \quad s = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда и из утверждений 1, 2 получаем

$$T_{0,s}^1(0) = V_{0,s}^1(0) = \tau_s, \quad T_{0,sx_0}^1(0) = V_{0,sx_0}^1(0) = 0,$$

$$T_{0,s}^2(0) = V_{0,s}^2(0) = \frac{\nu_s}{(1-\alpha)(3-\alpha)\ldots(2q+1-\alpha)}, \quad T_{0,sx_0}^2(0) = V_{0,sx_0}^2(0) = 0. \tag{63}$$

Далее, из (30), (55), (63) следует, что

$$c_{1s} = \tilde{c}_{1s} = \tau_s, \quad c_{2s} = \tilde{c}_{2s} = \frac{\nu_s}{\mu_{s,n}}.$$

Аналогично из (36), (61), (63) имеем $c'_{1s} = \tilde{c'}_{1s}$, $c'_{2s} = \tilde{c'}_{2s}$.

Таким образом, для определения неизвестных коэффициентов c_{1s}, c_{2s}, c'_{1s}, c'_{2s} из (31), (56), (37), (62) получаем системы алгебраических уравнений

$$\mu_{s,n}(c_{1s} \cos \mu_{s,n}\beta' + c_{2s} \sin \mu_{s,n}\beta') = (\sin \mu_{s,n}\beta') \int_0^{\beta'} a_{0,s}(\xi) \cos \mu_{s,n}\xi \, d\xi -$$

$$- (\cos \mu_{s,n}\beta') \int_0^{\beta'} a_{0,s}(\xi) \sin \mu_{s,n}\xi \, d\xi,$$

$$\mu_{s,n}(c_{1s}\operatorname{ch}\mu_{s,n}\gamma' + c_{2s}\operatorname{sh}\mu_{s,n}\gamma') = (\operatorname{sh}\mu_{s,n}\gamma')\int\limits_{\gamma'}^{0} d_{0,s}(\xi)\operatorname{ch}\mu_{s,n}\xi\, d\xi -$$

$$- (\operatorname{ch}\mu_{s,n}\gamma')\int\limits_{\gamma'}^{0} d_{0,s}(\xi)\operatorname{sh}\mu_{s,n}\xi\, d\xi,$$

$$c'_{1s}\cos\mu_{s,n}\beta' + c'_{2s}\sin\mu_{s,n}\beta' = b_s,$$

$$c'_{1s}\operatorname{ch}\mu_{s,n}\gamma' + c'_{2s}\operatorname{sh}\mu_{s,n}\gamma' = e_s,$$

которые однозначно разрешимы, если выполняется условие (5).

Следовательно, решения задач (23_0), (29) и (34_0), (35) определяются по формулам (30) и (36).

Аналогично по формулам (55), (61) находятся решения задач (52_0), (54) и (59_0), (60).

Далее, используя утверждения 1 и 2 и формулы (14), (45), получаем единственное решение задачи 1 в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\{\psi_{1n}^k(t) + r^{\frac{1-m}{2}}[v_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0) + v_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)]\}Y_{n,m}^k(\theta), \quad t > 0,$$

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\{\psi_{2n}^k(t) + r^{\frac{1-m}{2}}[\omega_{\alpha,n}^{k,1}(r,x_0) + \omega_{\alpha,n}^{k,2}(r,x_0)]\}Y_{n,m}^k(\theta), \quad t < 0. \tag{64}$$

Учитывая формулу [13] $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$, оценки [7, 14]

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \quad \nu \ge 0,$$

$$|k_n| \le c_1 n^{m-2}, \quad \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q}Y_{n,m}^k(\theta)\right| \le c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \quad j \in \{1,2,\dots,m-1\}, \quad q = 0,1,\dots, \tag{65}$$

а также леммы и ограничения на заданные функции $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$, $\psi_1(t,\theta)$, $\psi_2(t,\theta)$, нетрудно показать, как в [10, 11], что полученное решение (64) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\beta\gamma)\cap$ $\cap C^1(\Omega_\beta\gamma)\cap C^2(\Omega_\beta\cup\Omega_\gamma)$.

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Если выполняется условие (5), то из теоремы 1 следует, что решение задачи 1 единственно.

Пусть теперь условие (5) не выполняется хотя бы для одного $s = l$.

Тогда, если решение однородной задачи, соответствующей задаче 1, будем искать в виде ряда (7), придем к задачам (34_0), (29) при $x_0 > 0$ и (59), (54) при $x_0 < 0$, решениями которых являются функции

$$T_{0,l}(x_0) = \cos\mu_{l,n}x_0 + \sin\mu_{l,n}x_0,$$

$$V_{0,l}(x_0) = \operatorname{ch}\mu_{l,n}x_0 + \operatorname{sh}\mu_{l,n}x_0. \tag{66}$$

Далее, из (27), (66) следует, что однородные задачи (17), (18) и (48), (49) имеют ненулевые решения

$$\upsilon_{\alpha,n}^k(r,x_0) = \gamma_\alpha\sqrt{r}\left(\int_0^1 T_{0,l}(\xi x_0)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\xi\right)J_\nu(\mu_{l,n}r),$$

$$\omega_{\alpha,n}^k(r,x_0) = \gamma_\alpha\sqrt{r}\left(\int_0^1 V_{0,l}(\xi x_0)(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\xi\right)J_\nu(\mu_{l,n}r), \quad \nu = \frac{n+m-2}{2}.$$

Следовательно, нетривиальным решением однородной задачи 1 является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{-p}r^{\frac{1-m}{2}}\left[\upsilon_{\alpha,n}^k(r,x_0)+\omega_{\alpha,n}^k(r,x_0)\right]Y_{n,m}^k(\theta),$$

при этом из (65) следует, что она принадлежит искомому классу, если $p > \dfrac{3m}{2}$.

Литература

1. *Шабат Б. В.* Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа // Докл. АН СССР. — 1957. — **112**, № 3. — С. 386–389.
2. *Бицадзе А. В.* Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в смешанных областях // Докл. АН СССР. — 1958. — **122**, № 2. — С. 167–170.
3. *Солдатов А. П.* Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Докл. РАН. — 1993. — **332**, № 6 — С. 696–698; **333,** № 1. — С. 396–407.
4. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнения в частных производных. — М.: Наука, 2006. — 287 с.
5. *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Докл. РАН. — 2007. — **413**, № 1. — С. 23–26.
6. *Нахушев А. М.* Критерий единственности задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в цилиндрической области // Дифференц. уравнения. — 1970. — **6**, № 1. — С. 190–191.
7. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. — М.: Физматгиз, 1962. — 254 с.
8. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. — 2014. — № 3(295). — С. 136–143.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1965. — 703 с.
10. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. — Алматы: Гылым, 1994. — 170 с.
11. *Алдашев С. А.* Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. — Орал: ЗКАТУ, 2007. — 139 с.
12. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1985. — 301 с.
13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1974. — Т. 2. — 295 с.
14. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. — 724 с.

Получено 21.01.16,
после доработки — 23.08.16