НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 2 • № 2 • 1999

УДК 519.3

ОПТИМАЛЬНИЙ МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ СКЛАДНОЇ ФОРМИ (ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ З ЕЛІПТИЧНИМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ ОПЕРАТОРОМ 2-ГО ПОРЯДКУ)

О.М. Литвин, К.В. Носов

Укр. інж.-пед. академія,
Україна, 310003, Харків, вул. Університетська, 16
e-mail: docents@uenpa.kharkov.ua;
konstantin.v.nosov@univer.kharkov.ua

О.П. Трофименко

Військ. ін-т льотчиків

We describe an approach for solving of boundary value problem for elliptic equation by Optimum Finite Element Method (OFEM). In OFEM basis functions are found by same way, as constants ih the Rietz method form conditions of minimization of corresponding functional.

Описано підхід до розв'язання граничної задачі для еліптичного диференціального рівняння оптимальним методом скінченних елементів (ОМСЕ), в якому базисні функції не задаються наперед, а знаходяться як сталі в методі Рітца — з умови мінімізації відповідного функціонала.

1. У роботах [1 – 5] ОМСЕ застосовується для випадку, коли область D, в якій знаходиться розв'язок крайової задачі, складається або з прямокутників, або з трикутників.

В даній роботі для еліптичного рівняння 2-го порядку вперше викладено метод знаходження оптимальних координатних функцій у випадку довільної області.

2. Знайдемо наближений розв'язок задачі

$$Au(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in D, \tag{1}$$

$$u(x,y)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

де $\partial\Omega$ — границя D, A — самоспряжений еліптичний диференціальний оператор 2-го порядку

$$Au = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(p_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + c(x,y)u.$$

Вважаємо, що D — довільна однозв'язна область, границя якої складається з дуг відомих кривих, $p_i(x,y) \in C^{(1)}(D), i = 1,2,\ c(x,y) \in C(D)$.

Розіб'ємо D на елементи прямими

$$x = x_k, \quad k = \overline{0,m}; \qquad y = y_l, \quad l = \overline{0,n}. \tag{3}$$

Вважаємо, що в результаті D розіб'ється на такі елементи:

$$\Pi_{kl} = \{(x,y)|x_k \le x \le x_{k+1}, \quad y_l \le y \le y_{l+1}\},$$
$$T_{1,k,l} = \{(x,y)|x_k \le x \le x_{k+1}, y_l \le y \le \varphi_{1,k,l}(x), y_l = \varphi_{1,k,l}(x_{k+1})\},$$
$$T_{2,k,l} = \{(x,y)|x_{k-1} \le x \le x_k, y_l \le y \le \varphi_{2,k,l}(x), y_l = \varphi_{2,k,l}(x_{k-1})\},$$
$$T_{3,k,l} = \{(x,y)|x_{k-1} \le x \le x_k, \varphi_{3,k,l}(x) \le y \le y_l, y_l = \varphi_{3,k,l}(x_{k-1})\},$$
$$T_{4,k,l} = \{(x,y)|x_k \le x \le x_{k+1}, \varphi_{4,k,l}(x) \le y \le y_l, y_l = \varphi_{4,k,l}(x_{k+1})\},$$
$$G_{1,k,l} = \{(x,y)|x_k \le x \le x_{k+1}, y_l \le y \le \varphi_{1,k,l}(x), \varphi_{1,k,l}(x) > y_l, x \in [x_k, x_{k+1}]\},$$
$$G_{2,k,l} = \{(x,y)|x_k \le x \le x_{k+1}, \varphi_{2,k,l}(x) \le y_l \le y, \varphi_{2,k,l}(x) < y_l, x \in [x_k, x_{k+1}]\},$$
$$G_{3,k,l} = \{(x,y)|y_l \le x \le y_{l+1}, x_k \le x \le \psi_{1,k,l}(y), \psi_{1,k,l}(y) > x_k, y \in [y_l, y_{l+1}]\},$$
$$G_{4,k,l} = \{(x,y)|y_l \le x \le y_{l+1}, \psi_{2,k,l}(y) \le x \le x_k, \psi_{2,k,l}(y) < x_k, y \in [y_l, y_{l+1}]\}.$$

Також припустимо, що функції $\varphi_{j,k,l}, j = \overline{1,4}$, в $T_{j,k,l}$ — монотонні, а $\psi_{j,k,l} = \varphi_{j,k,l}^{-1}$ — обернені до них.

Позначимо $\Delta_{1,k} = x_{k+1} - x_k,\ \Delta_{2,l} = y_{l+1} - y_l$. Наближений розв'язок $\tilde{u}(x,y)$ задамо на елементах розбиття таким чином:

$$\tilde{u}(x,y)|_{\Pi_{kl}} = \tilde{u}_{\Pi_{kl}}(x,y),$$
$$\tilde{u}(x,y)|_{T_{j,k,l}} = \tilde{u}_{T_{j,k,l}}(x,y),\ j = \overline{1,4},$$
$$\tilde{u}(x,y)|_{G_{j,k,l}} = \tilde{u}_{G_{j,k,l}}(x,y),\ j = \overline{1,4},$$

де

$$\tilde{u}_{\Pi_{kl}}(x,y) = \sum_{i=k}^{k+1}\sum_{j=l}^{l+1} u_{ij} h_1\left(i - k + (1 - 2(i-k))\frac{x - x_k}{\Delta_{1,k}}\right)\times$$
$$\times h_2\left(j - l + (1 - 2(j-l))\frac{y - y_l}{\Delta_{2,l}}\right),$$

$$\tilde{u}_{T_j,k,l}(x,y) = u_{kl}\Bigg((-1)^{[j/3]}\frac{y - y_l}{\Delta_{2,l-[j/3]}}(1 - h_2\left((-1)^{[j/3]}\frac{\varphi_{j,k,l}(x) - y_l}{\Delta_{2,l-[j/3]}}\right) -$$
$$-h_1\left((-1)^{j-2[j/3]}\frac{x - x_k}{\Delta_{1,k-2+(2|j-5/2|+1)/2}}\right) + (-1)^{[j/3]}\frac{y_{l+1-2[j/3]} - \varphi_{j,k,l}(x)}{\Delta_{2,l-[j/3]}}\times$$
$$\times\Bigg(1 - h_1\left((-1)^{j-1-[j/3]}\frac{\psi_{j,k,l}(y) - x_k}{\Delta_{1,k-2+(2|j-5/2|+1)/2}}\right) + h_2\left((-1)^{[j/3]}\frac{y - y_l}{\Delta_{2,l-[j/3]}}\right) +$$
$$+h_1\left((-1)^{j-1+[j/3]}\frac{x - x_k}{\Delta_{1,k-2+(2|j-5/2|+1)/2}}\right) + h_2\left((-1)^{[j/3]}\frac{y - y_l}{\Delta_{2,l-[j/3]}}\right) - 1\Bigg),\ j = \overline{1,4}$$

(через $[a]$ позначено цілу частину числа a),

$$\tilde{u}_{G_{j,k,l}}(x,y) = h_2\left(\frac{y - y_l}{\varphi_{j,k,l}(x) - y_l}\right)\left(u_{kl}h_1\left(\frac{x - x_k}{\Delta_{1,k}}\right) + u_{k+1,l}h_1\left(\frac{x_{k+1} - x}{\Delta_{1,k}}\right)\right)$$

при $j = 1, 2,$

$$\tilde{u}_{G_{j,k,l}}(x,y) = h_1\left(\frac{x-x_k}{\psi_{j-2,k,l}(y)-x_k}\right)\left(u_{kl}h_2\left(\frac{y-y_l}{\Delta_{2l}}\right)+u_{k,l+1}h_2\left(\frac{y_{l+1}-y}{\Delta_{2l}}\right)\right)$$

при $j = 3, 4$.

Вважаємо, що функції h_1, h_2 задовольняють умови

$$h_\mu(\gamma) = \delta_{\gamma 0}, \quad \mu = 1, 2, \gamma = 0, 1 \tag{4}$$

та $h_\mu(t) \in W_2^1(0,1), \mu = 1, 2$. При такому визначенні наближений розв'язок $\tilde{u}(x, y)$ точно задовольняє крайові умови вихідної задачі (2), $\tilde{u}(x, y) \in W_2^1(D)$ та $\tilde{u}(x, y)$ задовольняє умови

$$\tilde{u}(x_k, y_l) = u_{kl} \;\; \forall\, (x_k, y_l) \in \overline{D}.$$

Задачу розв'язуємо варіаційним методом, тобто наближений розв'язок шукаємо з умови мінімізації функціонала енергії за сталими u_{kl} та функціями h_1, h_2. В роботах $[1-3, 5]$ розроблялась схема ОМСЕ, у якій з кожним вузлом розбиття пов'язувалась єдина система шуканих координатних функцій. Таким чином, їх число не залежало від кількості елементів (на відміну від роботи [6], де з кожним вузлом розбиття пов'язувалась своя система координатних функцій). В даній статті розглядається перший підхід, тобто наближений розв'язок $\tilde{u}(x, y)$ будується з використанням всього двох координатних функцій $h_1(x)$, $h_2(y)$.

Функціонал, що відповідає задачі (1), (2), має вигляд

$$J(u) = \iint\limits_D (p_1(x,y)(u'_x(x,y))^2 + p_2(x,y)(u'_y(x,y))^2 +$$
$$+ c(x,y)u^2(x,y) - 2f(x,y)u(x,y))dxdy.$$

Для знаходження мінімуму функціонала розв'язуємо систему Рітца

$$\frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial u_{pq}} = 0, (x_p, y_q) \in D \tag{5}$$

сумісно з системою диференціально-функціональних рівнянь

$$\delta_{h_\mu} J(\tilde{u}) = 0, \; \mu = 1, 2, \tag{6}$$

де через $\delta_{h_\mu} J(\tilde{u})$ позначені перші варіації функціонала $J(\tilde{u})$ за функціями h_μ.

Нехай $(x_k, y_l) \in D$ — один з внутрішніх вузлів розбиття. Позначимо через $\Phi_{1,k,l}$ визначений вище скінченний елемент, який належить до прямокутника $[x_k, x_{k+1}] \times [y_l, y_{l+1}]$, тобто $\Phi_{1,k,l}$ — один з елементів $\Pi_{kl}, T_{1,k,l}$, або $G_{1,k,l}$. По аналогії вважаємо за $\Phi_{2,k,l}$ той із скінченних елементів, що належить до $[x_{k-1}, x_k] \times [y_l, y_{l+1}]$, тобто $\Pi_{k-1,l}$, $T_{2,k,l}$, або $G_{2,k,l}$. Таким же чином визначаються і $\Phi_{\nu,k,l}$ при $\nu = 3, 4$. Тоді $\tilde{u}(x, y)$ допускає зображення у вигляді

$$\tilde{u}(x,y) = \sum_{(x_k,y_l)\in D} u_{kl}\vartheta_{kl}(x,y),$$

де $\vartheta_{kl}(x,y)$ — функції з обмеженим носієм, що співпадає з $\bigcup\limits_{\nu=1}^{4}\Phi_{\nu,k,l}$ для кожного внутрішнього вузла розбиття $(x_k,y_l)\in D$, які в залежності від конкретного вигляду $\Phi_{\nu,k,l}, \nu = \overline{1,4}$, визначаються таким чином:

для $j=1,2$:

$$\vartheta_{kl}(x,y)=\begin{cases} h_1\left((-1)^{j-1}\dfrac{x-x_k}{\Delta_{1,k+1-j}}\right)h_2\left(\dfrac{y-y_l}{\Delta_{2,l}}\right) \text{ при } (x,y)\in\Phi_{j,k,l}=\Pi_{k+1-j,l}; \\ \dfrac{y-y_l}{\Delta_{2,l}}\left(1-h_2\left(\dfrac{\varphi_{j,k,l}(x)-y_l}{\Delta_{2,l}}\right)-h_1\left((-1)^{j-1}\dfrac{x-x_k}{\Delta_{1,k+1-j}}\right)\right)+ \\ +\dfrac{y_{l+1}-\varphi_{j,k,l}(x)}{\Delta_{2,l}}\left(1-h_1\left(\dfrac{(-1)^j\psi_{j,k,l}(y)-x_{k+1-j}}{\Delta_{1,k+1-j}}\right)-\right. \\ \left.-h_2\left(\dfrac{y-y_l}{\Delta_{2,l}}\right)\right)+h_1\left((-1)^j\dfrac{x-x_k}{\Delta_{1,k+1-j}}\right)+h_2\left(\dfrac{y-y_l}{\Delta_{2,l}}\right)-1 \\ \text{при } (x,y)\in\Phi_{j,k,l}=T_{j,k,l}; \\ h_1\left((-1)^{j-1}\dfrac{x-x_k}{\Delta_{1,k+1-j}}\right)h_2\left(\dfrac{y-y_l}{\varphi_{1,k+1-j,l}(x)-y_l}\right) \\ \text{при } (x,y)\in\Phi_{j,k,l}=G_{1,k+1-j,l}; \\ h_1\left(\dfrac{x-x_k}{\psi_{j,k,l}(y)-x_k}\right)h_2\left(\dfrac{y-y_l}{\Delta_{2l}}\right) \text{ при } (x,y)\in\Phi_{j,k,l}=G_{2+j,k,l}, \end{cases}$$

для $j=3,4$:

$$\vartheta_{kl}(x,y)=\begin{cases} h_1\left((-1)^{j-3}\dfrac{x_k-x}{\Delta_{1,k-4+j}}\right)h_2\left(\dfrac{y_l-y}{\Delta_{2,l-1}}\right) \\ \text{при } (x,y)\in\Phi_{j,k,l}=\Pi_{k-4+j,l-1}; \\ \dfrac{y_l-y}{\Delta_{2,l-1}}\left(1-h_2\left(\dfrac{y_l-\varphi_{j,k,l}(x)}{\Delta_{2,l-1}}\right)-h_1\left((-1)^{j-2}\dfrac{x_k-x}{\Delta_{1,k-4+j}}\right)\right)+ \\ +\dfrac{\varphi_{j,k,l}(x)-y_{l-1}}{\Delta_{2,l-1}}\left(1-h_1\left((-1)^{j-3}\dfrac{x_k-\psi_{3,k,l}(y)}{\Delta_{1,k-1}}\right)-\right. \\ \left.-h_2\left(\dfrac{y_l-y}{\Delta_{2,l-4+j}}\right)\right)+h_1\left(\dfrac{x_k-x}{\Delta_{1,k-1}}\right)+h_2\left(\dfrac{y_l-y}{\Delta_{2,l-1}}\right)-1 \\ \text{при } (x,y)\in\Phi_{j,k,l}=T_{j,k,l}; \\ h_1\left((-1)^{j-3}\dfrac{x-x_k}{\Delta_{1,k+3-j}}\right)h_2\left(\dfrac{y-y_l}{\varphi_{2,k+3-j,l}(x)-y_l}\right) \\ \text{при } (x,y)\in\Phi_{7-j,k,l}=G_{2,k+3-j,l}; \\ h_1\left(\dfrac{x-x_k}{\psi_{j-2,k,l-1}(y)-x_k}\right)h_2\left(\dfrac{y_l-y}{\Delta_{2,l-1}}\right) \\ \text{при } (x,y)\in\Phi_{7-j,k,l}=G_{j,k,l-1}. \end{cases}$$

Тоді система Рітца (5) запишеться у вигляді

$$\sum_{(x_k,y_l)\in D}u_{kl}\iint\limits_D(p_1(x,y)\vartheta'_{pq,x}(x,y)\vartheta'_{kl,x}(x,y)+p_2(x,y)\vartheta'_{pq,y}(x,y)\vartheta'_{kl,y}(x,y)+$$
$$+c(x,y)\vartheta_{pq}(x,y)\vartheta_{kl}(x,y))dxdy=\iint\limits_D f(x,y)\vartheta_{pq}(x,y))dxdy,\ (x_p,y_q)\in D.$$

Рівняння (6) наберуть вигляду

$$a_{\mu,1}(t)h''_{\mu}(t)+a_{\mu,2}(t)h''_{\mu}(1-t)+b_{\mu,1}(t)h'_{\mu}(t)+b_{\mu,2}(t)h'_{\mu}(1-t)+$$
$$+c_{\mu,1}(t)h_{\mu}(t)+c_{\mu,2}(t)h_{\mu}(1-t)+W_{\mu}(h_1,h_2,t)=g_{\mu}(t), \tag{7}$$
$$t\in(0,1),\quad \mu=1,2,$$

де

$$a_{\mu i}(t)=\sum_{\Pi_{kl}\in D}a_{\mu,i,\Pi_{kl}}(t)+\sum_{T_{m,k,l}\in D}a_{\mu,i,T_{m,k,l}}(t)+\sum_{G_{m,k,l}\in D}a_{\mu,i,G_{m,k,l}}(t),$$
$$i=1,2,\quad \mu=1,2, \tag{8}$$

тобто $a_{\mu,i,\Pi_{kl}}(t), a_{\mu,i,T_{m,k,l}}(t), a_{\mu,i,G_{m,k,l}}(t)$ можна трактувати як „внески” окремих скінченних елементів в рівняння для $\delta_{h_\mu}J(\tilde{u})$. Зрозуміло, що в залежності від форми області і вигляду розбиття окремі члени в сумі (8) можуть зникати. Функції $b_{\mu i}(t), c_{\mu i}(t), g_{\mu}(t)$ розкладаються аналогічно. $W_{\mu}(h_1,h_2,t)$, $\mu=1,2,$ — функціонали від h_1, h_2, які залежать від t як від параметра і мають вигляд

$$W_{\mu}(h_1,h_2,t)=\sum_{T_{m,k,l}\subset D}W_{\mu,T_{m,k,l}}(h_{\mu},t).$$

У зв’язку зі складністю виразів „внесків” елементів $\Phi_{m,k,l}$ їх запис пропускаємо.

В узагальненому вигляді можна записати

$$a_{\mu,j}(t)=a_{\mu,j}(h_{3-\mu},\{u_{ij}\},\{\varphi_{\nu,k,l}\},t),\ \mu=1,2,\ j=1,2,$$

тобто $a_{\mu,j}(t)$ — функціонали від функцій $h_{3-\mu}(t)$, які залежать від функцій $\{\varphi_{\nu,k,l}\}$, що задають границю ∂D, від сукупності $\{u_{ij}\}$ вузлових параметрів і від t як числового параметра. Аналогічно задаються коефіцієнти $b_{\mu,j}(t)$, $c_{\mu,j}(t)$, $g_{\mu}(t)$.

Функціонали $W_{\mu}(t)$ залежать від функцій $h_1(t)$, $h_2(t)$, функцій, які задають границі елементів $T_{\mu,k,l}$, та від $\{u_{ij}\}$, які відповідають вузлам, що належать до $T_{\mu,k,l}$, і від t як від параметрів:

$$W_{\mu}=W_{\mu}(h_1,h_2,\{\varphi_{\nu,k,l}\}',\{u_{ij}\}',t),$$

де через $\{\varphi_{\nu,k,l}\}'$ позначена частина функцій, яка задає частину границі ∂D, що належить до елементів $T_{\mu,k,l}$, а через $\{u_{ij}\}'$ — частина вузлових параметрів, що відповідають вузлам, які належать до $T_{\mu,k,l}$.

Опишемо метод „фліп-флоп” сумісного розв’язання систем (5) та (6) із урахуванням граничних умов (4). За перше наближення оптимальних базисних функцій приймемо лінійні функції, тобто покладемо

$$h_{\mu}^{<1>}(t)=1-t,\quad \mu=1,2,$$

де позначення $<1>$ вказує на номер ітерації методу. Підставивши $h_{\mu}^{<1>}(t)$ в систему Рітца (5) і розв’язавши її, отримаємо перші наближення $u_{ij}^{(1/1)}$ вузлових параметрів. Позначення (1/1) вказує на те, що дані параметри знайдені з перших наближень координатних функцій h_μ при $\mu=1,2$, тобто з $h_{\mu}^{<1>}$. Для знаходження подальших наближень використовуємо систему (7) при $\mu=1$. Від нелінійної системи функціональних рівнянь (7) переходимо до лінійної, замінюючи під знаками інтегралів у виразах для $a_{j,i}$, $b_{j,i}$, $c_{j,i}$ при $\mu = 1$ параметри u_{ij} на знайдені на першому кроці $u_{ij}^{(1/1)}$ та функції h_2 на $h_2^{<1>}$. Після такої підстановки функціонали від функцій $h_2(t)$ $a_{1,i}, b_{1,i}, c_{1,i}$ та сталих u_{ij} перетворюються на функції і отримана система буде лінійною.

Розв'язавши систему (7) з урахуванням умов (4) для функцій h_2, одержимо друге наближення $h_1^{<2>}$ функцій h_1 . Знову підставляючи в систему Рітца (5) координатні функції $h_1^{<2>}$ і $h_2^{<1>}$, отримуємо наступне наближення для вузлових параметрів — $u_{ij}^{(2/1)}$, де позначка (2/1) має попередній зміст. Наступний крок аналогічний до першого — замінюючи в системі (7) при $\mu = 2$ вузлові параметри на $u_{ij}^{(2/1)}$ та координатні функції h_1 на $h_1^{<2>}$, після розв'язання системи отримуємо друге наближення для координатних функцій h_2, які позначаємо через $h_2^{<2>}$, і т. д. Таким чином, в ітераційному процесі на кожному кроці знаходиться трійка об'єктів $\{h_1^{<i>}, h_2^{<\mu>}, u_{ij}^{(m/n)}\}$, де індекси i, j, m, n попарно відрізняються не більше, ніж на одиницю, а на наступному кроці при фіксації двох з них знаходиться наступне ітераційне наближення для третього об'єкта.

Таким чином, отримуємо послідовність наближених розв'язків $\tilde{u}^{(1)}(x,y), \tilde{u}^{(2)}(x,y), \ldots$ таку, що

$$J(\tilde{u}^{(1)}) \geq J(\tilde{u}^{(2)}) \geq \ldots .$$

Ітерації проводяться до числа M такого, що

$$\|\tilde{u}^{(M)} - \tilde{u}^{(M+1)}\| < \varepsilon,$$

де ε — задана точність, $\|\cdot\|$ — одна з норм у просторі, якому належить $\tilde{u}^{(j)}$.

Розглянемо частинний випадок рівнянь (7), коли $W_\mu \equiv 0$, коефіцієнти $a_{\mu,j}, c_{\mu,j}$ — сталі і $b_{\mu,j} \equiv 0$. Граничні умови (4) на функції h_μ задамо в загальному вигляді. Таким чином, маємо граничну задачу

$$a_1 h''(t) + a_2 h''(1-t) + b_1 h(t) + b_2 h(1-t) = f(t), \quad t \in (0,1), \tag{9}$$

$$h(0) = \gamma_1, \quad h(1) = \gamma_2. \tag{10}$$

Крайові задачі такого типу для диференціальних рівнянь, в які разом з шуканою функцією від аргумента t входить шукана функція від аргумента $1-t$, дістали назву симетрично-граничних або симетрично-крайових [1].

Розв'язання задачі (9), (10) описується наступною теоремою.

Теорема. *Розв'язок задачі (9), (10) існує і є єдиним, коли існують і є єдиними розв'язки крайових задач для двох звичайних диференціальних рівнянь*

$$(a_1 + (-1)^j a_2) z_j''(t) + (b_1 + (-1)^j b_2) z_j(t) = f_j(t), \quad t \in (0,1), \tag{11}$$

$$z_j(0) = \frac{\gamma_1 + (-1)^{j-1}\gamma_2}{2}, \quad z_j(1) = \frac{\gamma_2 + (-1)^{j-1}\gamma_1}{2}, \tag{12}$$

де $f_j(t) = \dfrac{1}{2}(f(t) + (-1)^{j-1} f(1-t))$, $j = 1, 2$.

У випадку, коли не існує розв'язку хоча б однієї задачі (11), (12), не існує і розв'язку задачі (9), (10). Коли розв'язки задач (11), (12) при $j = 1, 2$ існують, але хоча б одна задача має нескінченну кількість розв'язків, також нескінченну кількість розв'язків буде мати задача (9), (10).

Доведення. В рівнянні (9) зробимо заміну

$$z_1(t) = \frac{h(t) + h(1-t)}{2}, \quad z_2(t) = \frac{h(t) - h(1-t)}{2}.$$

Виражаючи $h(t), h(1-t)$ через $z_1(t), z_2(t)$ і враховуючи єдиність розкладу функції на симетричну і антисиметричну частини $\left(\text{відносно фіксованої точки, в даному випадку відносно } \frac{1}{2}\right)$, задачу (9), (10) розділяємо на 2 крайові задачі (11), (12) для симетричної ($z_1(t)$) і антисиметричної ($z_2(t)$) функцій $\left(\text{відносно точки } \frac{1}{2}\right)$.

Очевидно, що коли $h(t)$ задовольняє умови (9), (10), то $z_1(t)$, $z_2(t)$ задовольняють умови (11), (12), і навпаки, коли (11), (12) при $j = 1, 2$ мають розв'язки $z_1(t)$, $z_2(t)$, $h(t) = z_1(t) + z_2(t)$ задовольняє умови (9), (10).

Таким чином, встановлено еквівалентність задачі (9), (10) двом задачам (11), (12) при $j = 1, 2$.

Подамо задачу (11), (12) в узагальненому вигляді

$$ay''(t) + by(t) = f(t), \quad t \in (0, 1), \tag{13}$$

$$y(0) = \beta_1, \quad y(1) = \beta_2. \tag{14}$$

Розв'язок задачі (13), (14) існує і є єдиним, коли:

a) $a/b < 0$;

b) $a \neq 0, \quad b = 0$;

c) $b/a > 0$ при умові $\sqrt{a/b} \neq k\pi,\ k = 1, 2, \ldots$.

В інших випадках розв'язки можуть існувати або не існувати, а у випадку існування єдиність може порушуватися. Взагалі можливі такі випадки:

a) $a = 0,\ b \neq 0$; розв'язок існує і є єдиним, коли $\frac{f(0)}{b} = \beta_1,\ \frac{f(1)}{b} = \beta_2$; в іншому випадку розв'язок не існує;

b) $a = 0,\ b = 0,\ f(t) \not\equiv 0$; розв'язок не існує;

c) $a = 0,\ b = 0,\ f(t) \equiv 0$; при цьому граничні умови (14) залишаються, і розв'язком (13), (14) може бути будь-яка функція $y(t)$, яка задовольняє умови симетричності (або антисиметричності), а також граничні умови.

Доведення спирається на зображення загального розв'язку рівняння (13) у вигляді

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_{\text{част.}}(t),$$

де $y_i(t), i = 1, 2,$ — фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння, яке відповідає (13), $y_{\text{част.}}(t)$ — частинний розв'язок (13).

На підставі перерахованих випадків, які описують розв'язки задачі (13), (14), та встановленої еквівалентності задач (9), (10) та (11), (12) при $j = 1, 2$ твердження теореми вважаємо доведеним.

1. *Литвин О.Н.* Оптимальные схемы МКЭ. Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебра. — Киев: Наук. думка, 1978. — С. 160 – 165.
2. *Литвин О.Н.* К вопросу о построении оптимальных схем МКЭ // 2-я Респ. конф. „Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе". — Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1978. — С. 21 – 22.
3. *Литвин О.Н.* О построении оптимальных схем метода конечных элементов // Динамика и устойчивость сложных систем: Сб. научн. тр. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. — С. 116 – 128.
4. *Литвин О.Н.* Нелинейная обобщенная интерполяция на треугольнике и решение краевых задач // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1982. — № 3. — С. 12 – 16.
5. *Литвин О.Н.* Оптимальные координатные функции в методе конечных элементов // Дифференц. уравнения. — 1984. — **20**, № 4. — С. 677 – 688.
6. *Литвин О.Н.* Обобщенная нелинейная интерполяция и решение краевых задач // Там же. — 1983. — **19**, № 3. — С. 508 – 515.
7. *Литвин О.Н.* Оптимальные схемы метода конечных элементов (треугольные элементы) // Математические методы анализа динамических систем. — 1983. — **10**, № 6. — С. 77 – 81.
8. *Баранова Т.А., Литвин О.М., Федько В.В.* Про чисельну реалізацію оптимального методу скінченних елементів (задача Діріхле для рівняння Пуассона, прямокутні елементи) // Вісн. ун-ту "Львів. політехніка". Прикл. математика. — 1997. — **2**, № 337. — С. 294 – 296.
9. *Литвин О.Н., Трофименко О.П.* Точное решение симметрично-граничной краевой задачи // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. — Киев: Ин-т математики НАН Украины. — 1995. — С. 157 – 159.

Одержано 30.12.98