

## ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ТРУБОПРОВОДА ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКИХ СКОРОСТЯХ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

**О. С. Лимарченко, А. П. Тимохин**

*Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко*  
*просп. Академіка Глушкова, 4е, Київ, 03127, Україна*  
*e-mail: olelim2010@yahoo.com*  
*alexey\_timohin@mail.ru*

*We study particularities of the behavior of a straight pipeline when the velocity of the flowing fluid is in the critical or supercritical range. On the basis of a model that accounts for four oscillation forms and the Coriolis force, we study the stability margin of the straight pipeline. We find new dynamical modes for the behavior of the pipeline in the supercritical case. A numerical modeling within the framework of the twelve-mode model has confirmed the obtained qualitative results. We have also shown specifics of the Coriolis force action for supercritical values of the fluid flow in the pipeline.*

*Вивчаються особливості поведінки прямолінійного трубопроводу з протікаючою рідиною в прикритичному і закритичному діапазонах швидкостей течії рідини. На основі моделі, що враховує чотири форми коливань і сили Кориоліса, досліджуються діапазони стійкості прямолінійної форми коливань. Встановлено нові динамічні режими поведінки трубопроводу в закритичній області. Числове моделювання задачі в рамках нелінійної дванадцятимодової моделі підтвердило встановлені якісні результати. Показано також специфіку дій сил Кориоліса в закритичній області течії рідини в трубопроводі.*

**1. Введение.** Рассматривается задача о колебаниях прямолинейного трубопровода с протекающей жидкостью. В 1951 г. В. И. Феодосьевым [1] на основе одномодовой линейной модели было показано, что для каждого трубопровода существует критическая скорость течения жидкости, при которой происходит уравнивание сил упругости и центробежных сил, вызванных течением жидкости по криволинейному участку трубопровода. Соответственно, возникают два диапазона поведения системы: в докритическом режиме система устойчива, а для закритических скоростей — неустойчива. Большинство исследований таких задач проводится для случая течения жидкости со скоростями, меньшими критических значений. Область закритических течений является малоизученной. В то же время исследования последних лет позволили установить важность учета сил Кориоліса в динамике трубопроводов [2], которые в одномодовой модели В. И. Феодосьева не учитываются. Кроме того, было установлено, что при учете нелинейных свойств системы в трубопроводах с протекающей жидкостью возможны динамические режимы колебаний системы относительно альтернативного прямолинейному положению динамического равновесия [3]. В совокупности важность учета сил Кориоліса и нелинейностей обуславливает задачу пересмотра результатов В. И. Феодосьева на основе более полных моделей.

Целью данной статьи является исследование и классификация режимов динамического поведения консольно закрепленного трубопровода со свободным концом при закри-

тических скоростях течения жидкости.

Исследование выполнено на основе четырехмодовой линейной модели системы с последующим уточнением специфики поведения трубопровода на основе нелинейной двенадцатимодовой модели.

**2. Динамическая модель трубопровода с жидкостью.** Объектом исследования является прямолинейный упругий трубопровод, по которому течет жидкость. Трубопровод описывается на основе балочной модели с изгибной жесткостью  $EJ$ , площадью поперечного сечения  $F$  и линейной плотностью  $\mu$ ,  $l$  — длина трубопровода. Жидкость рассматривается как идеальная, однородная, несжимаемая с линейной плотностью  $\rho$ . Считается, что продольное движение жидкости в трубопроводе происходит с заданной скоростью  $V(t)$ . Труба имеет круговое сечение и закреплена консольно с одной стороны, второй конец трубы свободен.

Исследование выполняется на основе математической модели, разработанной в [2]. Подход основан на методе модальной декомпозиции (вариант метода Канторовича), примененном к вариационной формулировке задачи в виде принципа Гамильтона–Остроградского. Разложение в ряд поперечных перемещений произвольного сечения трубопровода  $u(x, t)$  проводится по формам собственных колебаний трубопровода с неподвижной жидкостью

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^N A_i(x) c_i(t),$$

где  $N$  — количество форм колебаний трубопровода,  $c_i(t)$  — амплитуда возбуждения  $i$ -й формы. Заметим, что при выводе модели применяется смешанное описание составляющих системы: эйлеровы переменные для описания движения жидкости и лагранжевы переменные для описания движения упругого трубопровода, который моделируется в балочном приближении. Это вносит в систему дополнительные нелинейности. В модели учтены все известные нелинейные механизмы. В итоге модель системы в амплитудных параметрах  $c_i$  может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \ddot{c}_r = & -\frac{EJ}{\rho + \mu} \kappa_r^4 c_r + \frac{7}{2} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 + \frac{2\rho V}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i (\beta_{ri}^1 - \beta_{ir}^1) - \\ & - \frac{PF}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{2\rho \dot{V}}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{1}{2N_r} \sum_{ijk} \ddot{c}_i c_j c_k d_{jkir}^2 - \\ & - \sum_{ijk} \dot{c}_i \dot{c}_j c_k \frac{1}{N_r} \left( d_{jkir}^2 - \frac{1}{2} d_{krij}^2 \right) - \frac{EJ}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkl}^6 - \\ & - \frac{2EF}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk}^3 - \frac{13}{4} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk}^4. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь величины  $\psi_i^0, \psi_i^1, N_i, \beta_{ij}^1, \beta_{ij}^2, \kappa_i^4, \phi_{ijk}^2, \phi_{ijk}^3, d_{ijkl}^2, d_{ijkl}^3, d_{ijkl}^4, d_{ijkl}^6$  определяются численно как квадратуры от известных форм колебаний  $A_i(x)$  по известной области  $[0, l]$ . Частоты свободных колебаний всех форм известны, не являются близкими

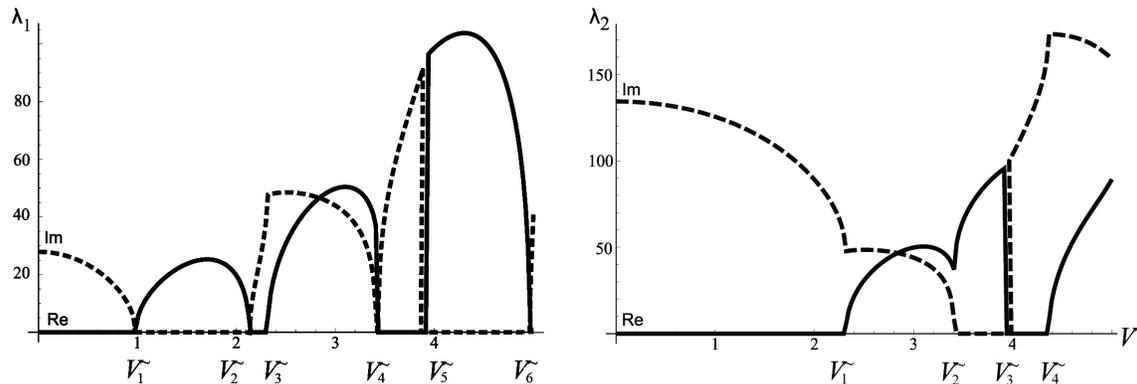


Рис. 1. Зависимость первых двух собственных значений от критической скорости.

и меняются в незначительном интервале, поэтому такая система может быть устойчиво численно проинтегрирована на основе, например, метода Рунге – Кутты.

Заметим, что при выводе этой системы уравнений удерживались члены только до третьего порядка малости. В итоге эта система уравнений не содержит членов второго порядка малости. Это в определенном смысле сужает проявление нелинейностей. Однако система содержит силы Кориолиса (подчеркнутый член в уравнениях (1)). Анализ показал, что именно силы Кориолиса играют основную роль в энергообмене между формами колебаний. При этом их вклад существенно превышает вклад нелинейных механизмов. Это определяется тем, что силы Кориолиса описываются линейными членами. Специфика действия сил Кориолиса обусловлена тем, что их действие приводит к смещению форм колебаний на половину длины волны и временной функции на половину периода. Появившиеся в результате такого преобразования новые элементы временной и пространственной зависимостей не являются элементами исходных базисов, поэтому их соответствующие скалярные произведения будут ненулевыми. Это приводит к установлению зависимости между колебаниями по разным формам колебаний на линейном уровне.

**3. Качественное исследование динамических свойств системы.** Выполним теперь классификацию режимов колебаний трубопровода на основе анализа устойчивости колебаний в окрестности равновесной прямолинейной формы трубопровода. Для анализа устойчивости нулевого решения рассмотрим собственные значения линеаризованной системы дифференциальных уравнений для первых четырех собственных форм колебаний, сведенной к матричному виду понижением степени. На основе полученной системы уравнений восьмого порядка установлены графические зависимости первого  $\lambda_1$  и второго  $\lambda_2$  собственных значений системы уравнений (1) от величины отношения скорости течения жидкости к первой критической скорости  $V^- = \frac{V}{V_{cr1}}$  (рис. 1). На рисунке штриховой линией обозначена мнимая часть собственного значения, а сплошной — действительная часть.

Кроме того, характерными точками обозначены разделения режимов колебаний относительно прямолинейного положения равновесия трубопровода с жидкостью. Классификация режимов проведена согласно общей классификации точек равновесия динамиче-

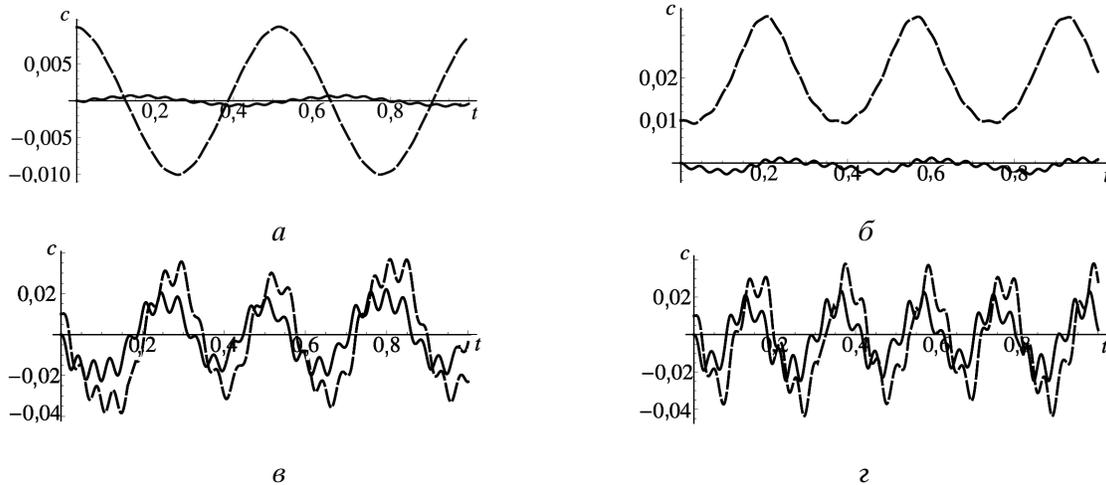


Рис. 2. Амплитуды первых двух форм колебаний системы на основе нелинейной модели.

ских систем по собственным значениям. Для режимов колебаний по первой форме выделены такие интервалы:  $0 - V_1^-$  (устойчивый центр),  $V_1^- - V_2^-$  (неустойчивый узел),  $V_2^- - V_3^-$  (устойчивый центр),  $V_3^- - V_4^-$  (неустойчивый фокус),  $V_4^- - V_5^-$  (устойчивый центр),  $V_5^- - V_6^-$  (неустойчивый узел). Следует отметить наличие в закритической области интервала  $V_2^- - V_3^-$ , где колебания относительно прямолинейной формы снова становятся устойчивыми. Для колебаний по второй форме аналогично выделим следующие характерные интервалы смены типов устойчивости:  $0 - V_1^-$  (устойчивый центр),  $V_1^- - V_2^-$  (неустойчивый фокус),  $V_2^- - V_3^-$  (неустойчивый узел),  $V_3^- - V_4^-$  (устойчивый центр),  $V^- > V_4^-$  (неустойчивый фокус). В этом случае существует область устойчивости  $V_3^- - V_4^-$  в закритическом диапазоне изменения скорости течения. Отметим, что в полученных результатах учтена взаимосвязь между формами колебаний, определяемая силами Кориолиса.

**4. Численное моделирование характерных режимов.** Для верификации результатов качественного анализа рассмотрим характерные динамические режимы поведения трубопровода с протекающей жидкостью при скоростях течения жидкости  $V = 0,9V_{cr}^1$ ,  $V = 1,59V_{cr}^1$ ,  $V = 2,56V_{cr}^1$ ,  $V = 2,7V_{cr}^1$ . Параметры трубопровода и жидкости приняты аналогично [3]. На рис. 2 приведены графики амплитуд двух первых форм колебаний для системы с начальным отклонением по первой форме 0,01 для нелинейной модели, учитывающей двенадцать форм колебаний и действие сил Кориолиса: *a* —  $V = 0,9V_{cr}^1$ , *б* —  $V = 1,5V_{cr}^1$ , *в* —  $V = 2,56V_{cr}^1$ , *г* —  $V = 2,7V_{cr}^1$ , первая форма показана штриховой линией, вторая — сплошной линией.

Неустойчивость колебаний относительно исходной прямолинейной формы трубопровода проявляется на рис. 2, б. Заметно, что колебания по второй форме происходят относительно начального прямолинейного состояния трубопровода, а по первой форме — относительно альтернативного положения равновесия. Кроме того, в закритической области амплитуды колебаний по первой и второй формам становятся соразмерными, в отличие от докритической и околокритической областей. Результаты, представленные на рис. 2, в, г, подтверждают выводы качественного анализа устойчивости процессов: в

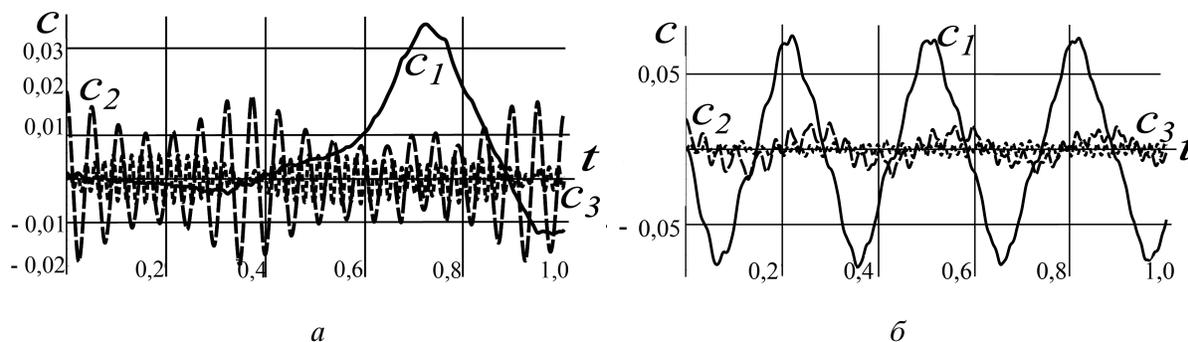


Рис. 3. Амплитуды первых трех форм колебаний системы без учета (а) и с учетом (б) сил Кориолиса для  $V = 1,5V_{cr}^1$ .

этом диапазоне изменения скорости течения закритической области колебания в окрестности прямолинейного положения трубопровода развиваются устойчиво.

Исследование характера влияния сил Кориолиса на развитие динамических процессов показало, что, как и прежде, эти силы являются основным механизмом энергообмена между формами колебаний, однако, в отличие от докритической области изменения скоростей течения жидкости, в закритической области силы Кориолиса проявляют себя как стабилизирующий механизм. На рис. 3 показано развитие динамических процессов в системе при начальном возмущении системы по второй форме колебаний для скорости течения жидкости  $V = 1,5V_{cr}^1$ . При этом рис. 3, а соответствует нелинейной модели, в которой силы Кориолиса не учитываются, а рис. 3, б — полной нелинейной модели, в которой силы Кориолиса учтены.

**4. Выводы.** В работе представлены результаты исследования динамических режимов поведения трубопровода с протекающей жидкостью в диапазоне закритических скоростей. Исследование проведено на основе ранее разработанной нелинейной динамической модели трубопровода с жидкостью, основанной на методе модальной декомпозиции. Построена четырехмодовая линейная модель системы, учитывающая действие сил Кориолиса. Проведенное на основе этой модели исследование устойчивости прямолинейной формы трубопровода в закритической области позволило найти новые режимы поведения трубопровода и обнаружить диапазон устойчивых колебаний в закритической области. Полученные качественные результаты были подтверждены численными результатами на основе двенадцатимодовой нелинейной модели. При этом было установлено, что в отличие от докритического диапазона скоростей течения жидкости силы Кориолиса в закритической области играют роль стабилизирующего фактора.

## Литература

1. Феодосьев В. И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инж. сб. — 1951. — **10**. — С. 251–257.
2. Василевский Ю. Е., Лимарченко О. С. Нелинейная модель динамики трубопровода при скоростном течении жидкости // Комплексний аналіз і течії з вільними границями: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2006. — **2**, № 4. — С. 322–334.
3. Лимарченко О., Тімохін О. Динамічна поведінка трубопроводу з вільним кінцем в околі критичних швидкостей руху рідини // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. — 2011. — № 14. — С. 73–77.

Получено 22.06.15