УДК 517.925.3

# ПРО СТІЙКІСТЬ ПОЛОЖЕННЯ РІВНОВАГИ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

**С.І. Гургула, В.І. Горгула**

*Івано-Франків. техн. ун-т нафти і газу,*
*Україна, 284019, Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15*

*This article relates to studying of problem for stability of ordinary solution of uniformity system linear secound order equations with constant coefficients, that is when the trajectory attaines to fome line passing thraugh the beginning of coordinates.*

*Вивчається питання стійкості тривіального розв'язку лінійної однорідної системи другого порядку з постійними коефіцієнтами, яка піддається імпульсній дії при досягненні траєкторією деякої прямої, що проходить через початок координат.*

Розглядається лінійна система диференціальних рівнянь другого порядку з імпульсною дією вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x \notin l, \\ &\Delta x|_{x\in l} = Bx, \end{aligned} \tag{1}$$

де $x = (x_1; x_2)$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ — дійсні сталі $(2 \times 2)$-матриці; $l$ — деяка пряма, що задається рівнянням вигляду $k_1x_1 + k_2x_2 = 0$.

Дослідимо питання стійкості за Ляпуновим тривіального розв'язку такої системи. Зрозуміло, що образи всіх точок прямої $l$ при дії оператора, заданого матрицею $E + B$, де $E$ — одинична матриця другого порядку, утворюють нову пряму $l_1$, рівняння якої неважко одержати. Будемо вважати, що прямі $l$ і $l_1$ співпадають. Це буде мати місце, якщо пряма $l$ співпадає з одним із власних напрямів оператора, заданого матрицею $B$. Отже, якщо цей напрям належить власному значенню $\alpha$, то для $x \in l$ маємо

$$x + \Delta x = x + Bx = (1 + \alpha)\, x\,.$$

Питання стійкості тривіального розв'язку системи (1) вирішуватиметься, очевидно, в залежності від власних значень матриці $A$. У випадку, коли ці власні значення дійсні, питання вирішується просто, тому далі вважатимемо, що власні значення матриці $A$ комплексні. В системі (1) зручно перейти до полярних координат $r, \varphi$: $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, яка при цьому набуває вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{dr}{dt} = r(a_{11}\cos^2\varphi + (a_{12} + a_{21})\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi), \\ &\frac{d\varphi}{dt} = a_{21}\cos^2\varphi + (a_{22} - a_{11})\cos\varphi\sin\varphi - a_{12}\sin^2\varphi, \quad \varphi \neq \varphi_0 + n\pi, \\ &\Delta r|_{\varphi=\varphi_0+n\pi} = (|1+\alpha| - 1)r, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\varphi_0$ — кут, який утворює пряма $l$ з віссю $Ox_1$, $n = 1, 2, \ldots$ .

Зауважимо, що праві частини рівнянь системи (2) містять квадратичні форми від $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, задані матрицями

$$A^H = \frac{1}{2}(A + A^T), \qquad A' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a_{21} & a_{22} - a_{11} \\ a_{22} - a_{11} & -2a_{12} \end{pmatrix}.$$

Позначимо через $\lambda_1$ і $\Lambda_1$ відповідно менше і більше власні значення матриці $A^H$. Зауважимо, що якщо власні значення матриці $A$ комплексні, то власні значення матриці $A'$ одного знаку. Позначимо для зручності через $\lambda_2$ і $\Lambda_2$ відповідно менше і більше за модулем власні значення матриці $A'$ (тобто $0 < \lambda_2 \le \Lambda_2$, або $\Lambda_2 \le \lambda_2 < 0$). Звідси, зокрема, випливає, що $\dfrac{d\varphi}{dt}$ зберігає знак, отже, будь-яка траєкторія, де б вона не починалась, попаде на пряму $l$. Будемо розглядати траєкторії, які починаються на прямій $l$, тобто виконані початкові умови

$$r\,(t_0) = r_0, \qquad \varphi\,(t_0) = \varphi_0\,.$$

Нехай ця траєкторія знову попадає на пряму $l$ в деякий момент часу $t_1$. Тоді, враховуючи, що $|\varphi(t_1) - \varphi_0| = \pi$, при зроблених припущеннях із (2) легко одержати

$$r_0 e^{\lambda_1(t_1 - t_0)} \le r(t_1) \le r_0 e^{\Lambda_1(t_1 - t_0)}, \tag{3}$$

$$\frac{\pi}{|\Lambda_2|} \le t_1 - t_0 \le \frac{\pi}{|\lambda_2|}\,. \tag{4}$$

В цей момент часу точка миттєво перекидається із положення $(r(t_1); \varphi_0 \pm \pi)$ в положення $(r(t_1 + 0); \varphi_0 \pm \pi)$; при цьому $r(t_1 + 0) = |1 + \alpha|\, r(t_1)$, або на підставі (3)

$$|1 + \alpha|\, r_0 e^{\lambda_1(t_1 - t_0)} \le r(t_1 + 0) \le |1 + \alpha|\, r_0 e^{\Lambda_1(t_1 - t_0)}. \tag{5}$$

Оскільки далі рух відбувається аналогічно, то для з'ясування питання стійкості тривіального розв'язку системи (1) досить порівняти $r_0$ і $r(t_1 + 0)$. Очевидно, цей розв'язок буде стійким, якщо $r(t_1 + 0) \le r_0$, асимптотично стійким, якщо $r(t_1 + 0) \le \gamma_1 r_0$ при деякому додатному $\gamma_1 < 1$, і нестійким, якщо $r(t_1 + 0) \ge \gamma_2 r_0$ при деякому $\gamma_2 > 1$.

Із (4) і (5) легко одержати оцінки:

$$r(t_1 + 0) \le |1 + \alpha|\, r_0 \exp\left(\frac{\Lambda_1}{|\lambda_2|}\,\pi\right)$$

при $\Lambda_1 \ge 0$, або

$$r(t_1 + 0) \le |1 + \alpha|\, r_0 \exp\left(\frac{\Lambda_1}{|\Lambda_2|}\,\pi\right)$$

при $\Lambda_1 < 0$, а також

$$r(t_1 + 0) \ge |1 + \alpha|\, r_0 \exp\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}\,\pi\right)$$

при $\lambda_1 \le 0$, або

$$r(t_1 + 0) \ge |1 + \alpha|\, r_0 \exp\left(\frac{\lambda_1}{|\Lambda_2|}\,\pi\right)$$

при $\lambda_1 > 0$. Порівнюючи праві частини цих нерівностей з $r_0$, одержуємо достатні умови стійкості, асимптотичної стійкості і нестійкості розв'язку $x = 0$ системи (1). Отже, доведено таку теорему.

**Теорема.** *Нехай задано систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією (1), в якій пряма $l$ співпадає з власним напрямом оператора, заданого матрицею $B$, що належить власному значенню $\alpha$ цієї матриці. Нехай власні значення матриці $A$ комплексні. Позначимо через $\lambda_1$ і $\Lambda_1$ відповідно менше і більше власні значення матриці $A^H = \dfrac{1}{2}(A + A^T)$, а через $\lambda_2$ і $\Lambda_2$ відповідно менше і більше за модулем власні значення матриці*

$$A' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a_{21} & a_{22} - a_{11} \\ a_{22} - a_{11} & -2a_{12} \end{pmatrix},$$

*де $a_{ij}$, $i = 1, 2$; $j = 1, 2$ — елементи матриці $A$.*

*Тоді тривіальний розв'язок системи (1) стійкий за Ляпуновим, якщо виконана нерівність*

$$|1 + \alpha| \exp\left(\frac{\Lambda_1}{|\lambda_2|}\pi\right) \leq 1$$

*при $\Lambda_1 \geq 0$, або нерівність*

$$|1 + \alpha| \exp\left(\frac{\Lambda_1}{|\Lambda_2|}\pi\right) \leq 1$$

*при $\Lambda_1 < 0$, причому в обох випадках стійкість буде асимптотичною, якщо нерівності строгі.*

Цей розв'язок буде нестійким, якщо виконана нерівність

$$|1 + \alpha| \exp\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}\pi\right) > 1$$

при $\lambda_1 \leq 0$, або нерівність

$$|1 + \alpha| \exp\left(\frac{\lambda_1}{|\Lambda_2|}\pi\right) > 1$$

при $\lambda_1 > 0$.


1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. — 1977. — **13**, № 11. — С. 1981 – 1991.
2. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Об устойчивости решений систем с импульсным воздействием // Там же. — 1981. — **17**, № 11. — С. 1995 – 2001.
3. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Выща шк., 1987. — 288 с.


*Одержано 30.12.98*